Kvadratinis daugianaris

12 tema: didžiausia ir mažiausia reikšmė uždarame intervale – 30 užduočių

Priminimas: $P(x) = a(x-h)^2 + k$ – reikšmė priklauso tik nuo to, **kaip toli** x **nuo** h. Kai $a > 0$: kuo toliau nuo h, tuo reikšmė didesnė; kai $a < 0$ – tuo mažesnė. Intervale $[m;n]$ kandidatai yra tik trys: h (jei $h \in [m;n]$) ir galai m, n. Kai h už intervalo, abi reikšmės yra intervalo galuose.

1. Atpažink Daugianario ekstremumo taškas $h = 4$. Ar h priklauso intervalui? Jei ne – kurioje pusėje nuo intervalo jis yra?

a) $[1;6]$ **c)** $[-2;3]$ **e)** $[-3;4]$
b) $[5;9]$ **d)** $[4;7]$ **f)** $[4{,}5;10]$

2. Arčiau ar toliau Ekstremumo taškas $h = 3$. Kuris intervalo galas yra toliau nuo h? Kiek toli?

a) $[0;5]$ **c)** $[-4;2]$ **e)** $[-1;7]$
b) $[1;8]$ **d)** $[5;6]$ **f)** $[3{,}5;9]$

3. Lentelė Duotas $P(x) = (x-2)^2 - 1$. Užpildykite lentelę.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$P(x)$							

Iš lentelės raskite mažiausią ir didžiausią P reikšmę intervaluose: a) $[0;5]$; b) $[3;5]$; c) $[-1;1]$. Kiekvienu atveju paaiškinkite atstumu nuo $h = 2$.

4. Skaitome iš pavidalo Raskite mažiausią ir didžiausią reikšmę nurodytame intervale.

a) $(x-1)^2 + 3$, $[0;4]$
b) $(x+2)^2 - 5$, $[1;3]$
c) $-(x-4)^2 + 6$, $[2;5]$
d) $-2(x+1)^2 + 7$, $[-5;-3]$
e) $3(x-2)^2$, $[-1;2]$

5. Teisinga ar klaidinga? Duotas $P(x) = (x-5)^2 + 1$. Pagrįskite.

a) Intervale $[2;8]$ mažiausia reikšmė lygi 1.
b) Intervale $[2;8]$ didžiausia reikšmė įgyjama abiejuose intervalo galuose.
c) Intervale $[6;9]$ mažiausia reikšmė lygi 1.
d) Intervale $[0;4]$ didžiausia reikšmė yra $P(0)$.
e) Bet kuriame intervale $[m;n]$ didžiausia reikšmė įgyjama kuriame nors intervalo gale.
f) Bet kuriame intervale $[m;n]$ mažiausia reikšmė įgyjama kuriame nors intervalo gale.

6. Rask klaidą Mokinys ieško mažiausios $P(x) = x^2 - 8x + 10$ reikšmės intervale $[5;9]$: „$x_e = -\frac{-8}{2} = 4$, todėl mažiausia reikšmė $P(4) = -6$.“ Kur klaida? Raskite teisingą mažiausią ir didžiausią reikšmę.

7. Su 2 tema Išskirkite pilnąjį kvadratą ir raskite mažiausią ir didžiausią reikšmę intervale.

a) $x^2 - 4x + 1$, $[-1;3]$
b) $x^2 + 6x + 5$, $[-1;2]$
c) $-x^2 + 2x + 8$, $[-2;0]$
d) $2x^2 - 8x + 3$, $[0;3]$

8. Su 4 tema Duotas $P(x) = 3x^2 - 12x + 7$. Pagal formules $x_e = -\frac{b}{2a}$ ir $P_e = -\frac{D}{4a}$ raskite ekstremumo tašką ir ekstremumą, tada – mažiausią ir didžiausią reikšmę intervale $[1;5]$.

9. Sugretink Kiekvienam atvejui kairėje parinkite teiginį dešinėje.

A) $x^2 - 6x,\ [0;4]$	1) mažiausia – taške 4, didžiausia – taške 8
B) $x^2 - 6x,\ [4;8]$	2) didžiausia – taške 1, mažiausia – taške -2
C) $-x^2 + 6x,\ [0;4]$	3) mažiausia – taške 3, didžiausia – taške 0
D) $-x^2 + 6x,\ [-2;1]$	4) didžiausia – taške 3, mažiausia – taške 0

10. Neskaičiuok – palygink Įrašykite $<$, $>$ arba $=$ ir paaiškinkite atstumu nuo h.

a) $P(x) = 2(x-3)^2 - 5$: $P(1) \square P(4{,}5)$; $P(-1) \square P(7)$; $P(3{,}2) \square P(2{,}9)$.

b) $Q(x) = -(x+1)^2 + 4$: $Q(0) \square Q(-3)$; $Q(1) \square Q(-2)$; $Q(-1) \square Q(5)$.

11. Išdėstyk Neskaičiuodami reikšmių, išdėstykite jas didėjimo tvarka. Vieną palyginimą patikrinkite skaičiuodami.

a) $P(x) = x^2 - 10x + 1$: $P(2)$, $P(7)$, $P(9)$, $P(5{,}5)$, $P(-1)$.

b) $Q(x) = -x^2 + 4x$: $Q(0)$, $Q(3)$, $Q(5)$, $Q(1{,}5)$.

12. Tekstinis Kamuolio aukštis (metrais) po t sekundžių lygus $H(t) = -5t^2 + 20t + 1$.

a) Koks didžiausias ir mažiausias kamuolio aukštis per pirmąsias 3 sekundes, t. y. kai $t \in [0;3]$?

b) O kai $t \in [3;4]$? Kodėl atsakymas 21 m čia netinka?

13. Kas pasikeitė? Duotas $P(x) = (x-2)^2 + 1$. Raskite mažiausią ir didžiausią reikšmę intervale. Kiekviename žingsnyje pasakykite, kas pasikeitė ir kodėl pasikeitė (arba nepasikeitė) atsakymas.

a) $[0;3]$ **c)** $[3;5]$ **e)** $[-1;5]$

b) $[0;5]$ **d)** $[-3;1]$

14. Su 5 tema Duotas $P(x) = x^2 - 2x - 8$.

a) Raskite daugianario šaknis ir, pasinaudoję simetrija, ekstremumo tašką h.

b) Raskite mažiausią ir didžiausią reikšmę intervale $[-3;3]$.

c) Raskite mažiausią ir didžiausią reikšmę intervale $[2;5]$.

d) Kodėl abiejuose intervaluose didžiausia reikšmė ta pati?

15. Su 7 tema Daugianario $x^2 + bx + c$ šaknų suma lygi 6, o sandauga lygi -7. Neieškodami šaknų, raskite ekstremumo tašką, tada – mažiausią ir didžiausią reikšmę intervale $[-1;4]$.

16. Su 10 tema Duotas $P(x) = x^2 - 6x + 5$.

a) Raskite didžiausią reikšmę intervale $[2;4]$ ir įrodykite, kad su visais $x \in [2;4]$ reikšmė $P(x) < 0$.

b) Ar intervale $[0;6]$ daugianaris įgyja ir teigiamų, ir neigiamų reikšmių? Atsakykite rasdami mažiausią ir didžiausią reikšmę.

17. Du kintamieji Skaičiai x ir y tenkina lygybę $x + y = 6$, be to, $x \in [1;4]$. Raskite mažiausią ir didžiausią sandaugos xy reikšmę.

18. Intervalas auga Duotas $P(x) = x^2 - 4x$ ir intervalas $[0;n]$, kur $n > 0$.

a) Raskite mažiausią ir didžiausią reikšmę, kai $n = 1$, $n = 3$, $n = 6$.

b) Su kuriais n didžiausia reikšmė lygi $P(0)$, o su kuriais – $P(n)$? Kas vyksta, kai $n = 4$?

19. Sugalvok pats Sugalvokite du kvadratinius daugianarius – vieną su $a > 0$, kitą su $a < 0$, – kurių intervale $[1;5]$ mažiausia reikšmė įgyjama taške 1, o didžiausia – taške 5. Paaiškinkite, kur turi būti h kiekvienu atveju.

20. Su 11 tema Sudarykite daugianarį $P(x) = a(x-h)^2 + k$, kurio intervale $[0;6]$ mažiausia reikšmė lygi 2 ir įgyjama taške 1, o didžiausia lygi 27. Ar toks daugianaris vienintelis?

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Su 3 tema Įrodykite, kad nėra tokių b ir c, kad daugianario $P(x) = 2x^2 + bx + c$ didžiausia reikšmė intervale $[1;7]$ būtų įgyjama taške 4.

22. Su 5 tema Kvadratiniam daugianariui P galioja $P(1) = P(5)$, o jo mažiausia reikšmė intervale $[0;6]$ įgyjama taške 2. Įrodykite, kad toks daugianaris neegzistuoja.

23. Su 7, 8 ir 10 temomis Kvadratinio daugianario P šaknų suma lygi 2, sandauga lygi -3, be to, $P(0) < 0$. Įrodykite, kad negali būti $P(5) < P(3)$.

24. Su 4 ir 10 temomis Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ koeficientas $a < 0$ ir diskriminantas $D < 0$. Įrodykite, kad jo didžiausia reikšmė intervale $[0;2]$ negali būti lygi 1.

25. Su 5 tema Kvadratiniam daugianariui P galioja $P(-1) = P(7)$ ir $P(0) > P(2)$. Įrodykite, kad jo mažiausia reikšmė intervale $[4;6]$ negali būti įgyjama taške 6.

26. Su 6 tema Kvadratinio daugianario šaknys yra -1 ir 5. Ar gali jo didžiausia reikšmė intervale $[0;4]$ būti lygi 3 ir būti įgyjama taške 0? Pagrįskite.

27. Su 2 tema Įrodykite, kad nėra daugianario $P(x) = x^2 + bx + c$, kurio mažiausia reikšmė intervale $[0;4]$ lygi 1, o didžiausia lygi 2.

28. Du intervalai Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris, kurio mažiausia reikšmė intervale $[1;3]$ įgyjama *tik* taške 1, o didžiausia reikšmė intervale $[2;5]$ įgyjama taške 2? Pagrįskite.

29. Iššūkis Įrodykite, kad nėra daugianario $P(x) = x^2 + bx + c$, kurio didžiausios ir mažiausios reikšmių intervale $[0;2]$ skirtumas lygus $\frac{1}{2}$.

30. Iššūkis Kvadratiniam daugianariui P galioja $P(0) = P(4) = 5$. Įrodykite, kad intervale $[1;3]$ jis negali įgyti ir reikšmės 4, ir reikšmės 6.

Atsakymai

1. a) Priklauso. b) Kairėje. c) Dešinėje. d) Priklauso (galas). e) Priklauso (galas). f) Kairėje.

2. a) 0, atstumas 3. b) 8, 5. c) -4, 7. d) 6, 3. e) Abu vienodai, po 4. f) 9, 6.

3. 8; 3; 0; -1; 0; 3; 8. a) -1 ir 8. b) 0 ir 8. c) 0 ir 8.

4. a) 3 ir 12. b) 4 ir 20. c) 2 ir 6. d) -25 ir -1. e) 0 ir 27.

5. a) T. b) T ($P(2) = P(8) = 10$). c) K ($P(6) = 2$). d) T (26). e) T. f) K.

6. $4 \notin [5;9]$. Mažiausia $P(5) = -5$, didžiausia $P(9) = 19$.

7. a) $(x-2)^2 - 3$: -3 ir 6. b) $(x+3)^2 - 4$: 0 ir 21. c) $-(x-1)^2 + 9$: 0 ir 8. d) $2(x-2)^2 - 5$: -5 ir 3.

8. $x_\text{e} = 2$, minimumas $P_\text{e} = -5$; intervale: -5 ir $P(5) = 22$.

9. A–3, B–1, C–4, D–2.

10. a) $>$; $=$; $>$. b) $>$; $<$; $>$.

11. a) $P(5{,}5) < P(7) < P(2) < P(9) < P(-1)$. b) $Q(5) < Q(0) < Q(3) < Q(1{,}5)$.

12. a) Didžiausias 21 m ($t = 2$), mažiausias 1 m ($t = 0$). b) Didžiausias 16 m ($t = 3$), mažiausias 1 m ($t = 4$); $t = 2 \notin [3;4]$.

13. a) 1 ir 5. b) 1 ir 10. c) 2 ir 10. d) 2 ir 26. e) 1 ir 10 (abiejuose galuose).

14. a) -2 ir 4; $h = 1$. b) -9 ir 7. c) -8 ir 7. d) $P(-3) = P(5) = 7$ – simetriški taškai.

15. $h = 3$; $x^2 - 6x - 7$: -16 ir 0.

16. a) Didžiausia -3. b) Taip: -4 ir 5.

17. Mažiausia 5, didžiausia 9.

18. a) $n = 1$: -3 ir 0; $n = 3$: -4 ir 0; $n = 6$: -4 ir 12. b) $P(0)$, kai $n \le 4$; $P(n)$, kai $n \ge 4$; kai $n = 4$, abu lygūs 0.

19. Pvz. $(x-1)^2$ ($h \le 1$) ir $-(x-6)^2$ ($h \ge 5$).

20. $P(x) = (x-1)^2 + 2$; vienintelis.

21. Įrodymas – žr. sprendimus.

22. Neegzistuoja (įrodymas – žr. sprendimus).

23. Įrodymas – žr. sprendimus.

24. Įrodymas – žr. sprendimus.

25. Įrodymas – žr. sprendimus.

26. Negali (įrodymas – žr. sprendimus).

27. Įrodymas – žr. sprendimus.

28. Neegzistuoja (įrodymas – žr. sprendimus).

29. Įrodymas – žr. sprendimus.

30. Įrodymas – žr. sprendimus.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Koks a ženklas? Kur galuose reikšmė didesnė: palyginkite atstumus nuo h iki 4 ir iki tolimesnio galo.

22. Iš $P(1) = P(5)$ raskite h. Atskirai išnagrinėkite $a > 0$ ir $a < 0$.

23. Užrašykite $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (8 tema). Ką apie a pasako $P(0) < 0$? Kur yra h?

24. Koks ekstremumo $P_\text{e} = -\frac{D}{4a}$ ženklas? Kokia tai ekstremumo rūšis?

25. Iš $P(-1) = P(7)$ raskite h. Ką apie a pasako $P(0) > P(2)$? Kuris galas arčiau h?

26. Kur yra h? Jei $a < 0$, kur intervale $[0; 4]$ didžiausia reikšmė? Jei $a > 0$ – koks $P(0)$ ženklas?

27. Skirtumas lygus 1. Išnagrinėkite: h intervale (tolimesnis galas – bent per 2) ir h už intervalo.

28. Atskirai $a > 0$ ir $a < 0$. Kiekvienu atveju iš kiekvienos sąlygos gaukite, kur turi būti h, ir palyginkite.

29. Kaip 27 uždavinyje: intervalo ilgis 2, todėl tolimesnis galas nutolęs nuo h bent per 1.

30. $h = 2$. Visi intervalo $[1; 3]$ taškai nutolę nuo h ne daugiau kaip per 1, o taškas 0 – per 2.

Sprendimai (21–30)

21. $a = 2 > 0$, todėl kuo toliau nuo h, tuo reikšmė didesnė. Palyginkime taško 4 ir galų atstumus iki h.

- Jei $h \le 4$: $7 - h > 4 - h \ge 0$ – galas 7 toliau nuo h nei 4, todėl $P(7) > P(4)$.
- Jei $h \ge 4$: $h - 1 > h - 4 \ge 0$ – galas 1 toliau nuo h nei 4, todėl $P(1) > P(4)$.

Abiem atvejais kuriame nors gale reikšmė didesnė už $P(4)$, todėl $P(4)$ negali būti didžiausia. **Išvada:** kai $a > 0$, didžiausia reikšmė įgyjama tik intervalo gale.

22. Iš $P(1) = P(5)$: $h = \frac{1+5}{2} = 3$ (5 tema).

- $a > 0$: mažiausia reikšmė – taške, arčiausiai 3, t. y. pačiame $3 \in [0;6]$. Taškas 2 nutolęs per 1, todėl $P(2) > P(3)$.
- $a < 0$: mažiausia reikšmė – taške, toliausiai nuo 3, t. y. galuose 0 ir 6 (abu nutolę per 3). Taškas 2 arčiau, todėl $P(2) > P(0)$.

Abiem atvejais $P(2)$ nėra mažiausia reikšmė – prieštara. Toks daugianaris neegzistuoja.

23. Šaknys x_1, x_2 tenkina $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = -3$, todėl $P(x) = a(x^2 - 2x - 3)$ (8 tema). Tada $P(0) = -3a < 0$, taigi $a > 0$. Ekstremumo taškas – šaknų vidurkis: $h = \frac{x_1+x_2}{2} = 1$. Taškai 3 ir 5 yra dešinėje nuo h; 5 nutolęs per 4, 3 – per 2. Kadangi $a > 0$, toliau esančio taško reikšmė didesnė: $P(5) > P(3)$. Todėl $P(5) < P(3)$ būti negali. (Patikra: šaknys -1 ir 3; pvz. $a = 1$: $P(3) = 0$, $P(5) = 12$.)

24. Ekstremumas $P_\mathrm{e} = -\frac{D}{4a}$. Čia $-D > 0$, o $4a < 0$, todėl $P_\mathrm{e} < 0$. Kadangi $a < 0$, tai maksimumas: su *visais* x teisinga $P(x) \le P_\mathrm{e} < 0$ (10 tema: $a < 0$, $D < 0$ – visos reikšmės neigiamos). Todėl ir intervale $[0;2]$ visos reikšmės neigiamos, o didžiausia reikšmė negali būti lygi 1.

25. Iš $P(-1) = P(7)$: $h = 3$. Taškas 0 nutolęs nuo 3 per 3, taškas 2 – per 1. Kadangi $P(0) > P(2)$, toliau esančio taško reikšmė didesnė, todėl $a > 0$ (jei būtų $a < 0$, būtų $P(0) < P(2)$). Intervalas $[4;6]$ yra dešinėje nuo $h = 3$: galas 4 arčiau (per 1), galas 6 toliau (per 3). Kai $a > 0$, mažiausia reikšmė – arčiau esančiame gale: $P(4) < P(6)$. Todėl mažiausia reikšmė negali būti įgyjama taške 6.

26. Negali. Šaknų vidurkis $h = \frac{-1+5}{2} = 2 \in [0;4]$.

- $a < 0$: didžiausia reikšmė intervale – pačiame taške $h = 2$, o $P(0) < P(2)$ (taškas 0 toliau). Prieštara.
- $a > 0$: tada $P(x) = a(x+1)(x-5)$ ir $P(0) = -5a < 0$ (taškas 0 yra tarp šaknų – 10 tema). Bet didžiausia reikšmė turi būti $3 > 0$. Prieštara.

27. $P(x) = (x - h)^2 + k$, skirtumas turi būti $2 - 1 = 1$.

- $h \in [0;4]$: mažiausia k, didžiausia – tolimesniame gale. Galai nutolę vienas nuo kito per 4, todėl tolimesnis nuo h nutolęs bent per 2: skirtumas $\ge 2^2 = 4$.
- h už intervalo: artimesnis galas nutolęs per $u \ge 0$, tolimesnis – per $u + 4$. Skirtumas $(u+4)^2 - u^2 = 8u + 16 \ge 16$.

Abiem atvejais skirtumas ≥ 4, todėl jis negali būti lygus 1.

28. Neegzistuoja.

- $a > 0$ (mažiausia – arčiausiai h). Mažiausia reikšmė intervale $[1;3]$ tik taške 1: taškas 1 turi būti arčiau h nei visi kiti intervalo taškai, todėl $h \le 1$. Didžiausia intervale $[2;5]$ taške 2: galas 2 ne arčiau h nei galas 5, todėl $h \ge 3{,}5$. Bet $h \le 1$ ir $h \ge 3{,}5$ kartu negali būti.
- $a < 0$ (mažiausia – toliausiai nuo h). Mažiausia intervale $[1;3]$ tik taške 1: galas 1 *griežtai* toliau nuo h nei galas 3, todėl $h > 2$. Didžiausia intervale $[2;5]$ taške 2: taškas 2 arčiausiai h, todėl $h \le 2$. Prieštara.

Pastaba: be žodžio „tik“ daugianaris egzistuotų, pvz. $-(x-2)^2$.

29. $P(x) = (x - h)^2 + k$.

- $h \in [0;2]$: tolimesnis galas nutolęs bent per 1 (galai vienas nuo kito per 2), todėl skirtumas $\geq 1^2 = 1$.
- h už intervalo: artimesnis galas – per $u \geq 0$, tolimesnis – per $u + 2$; skirtumas $(u+2)^2 - u^2 = 4u + 4 \geq 4$.

Visada skirtumas $\geq 1 > \frac{1}{2}$. (Skirtumas lygus 1 tik tada, kai $h = 1$, pvz. $x^2 - 2x$.)

30. Iš $P(0) = P(4)$: $h = 2$. Kiekvienas $x \in [1;3]$ nutolęs nuo 2 ne daugiau kaip per 1, o taškas 0 – per 2.

- $a > 0$: toliau – didesnė. Taškas 0 toliau nei bet kuris $x \in [1;3]$, todėl $P(x) < P(0) = 5$. Reikšmės 6 intervale nėra.
- $a < 0$: toliau – mažesnė, todėl $P(x) > P(0) = 5$. Reikšmės 4 intervale nėra.

Abiem atvejais visos reikšmės intervale $[1;3]$ yra toje pačioje skaičiaus 5 pusėje, todėl 4 ir 6 kartu įgyti negalima.