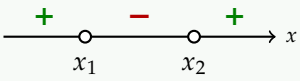
Kvadratinis daugianaris

10 tema: kvadratinio daugianario ženklai – 30 užduočių

Už šaknų $x_1 < x_2$ – a ženklas, tarp šaknų – **priešingas**: 

$(a > 0)$.

$P(x) > 0$, $P(x) < 0$ – šaknys **neįeina**: $(x_1; x_2)$. $P(x) \geq 0$, $P(x) \leq 0$ – šaknys **įeina**: $[x_1; x_2]$. Prie $\pm\infty$ – visada apvalūs skliaustai. $D = 0$: $P = a(x - x_1)^2$; $D < 0$: ženklas visur toks pat kaip a.

1. Atpažink Duotas reiškinys $(x-2)(x+3)$. Kokio ženklo (+, − ar 0) yra kiekvienas dauginamasis ir visa sandauga, kai

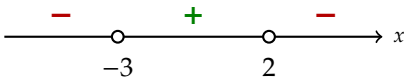
a) $x = -5$; **b)** $x = 0$; **c)** $x = 2$; **d)** $x = 7$?

2. Lentelė Duotas daugianaris $P(x) = (x+2)(x-4)$. Užpildykite ženklų lentelę, nubraižykite ženklų tiesę ir užrašykite, kada $P(x) > 0$ ir kada $P(x) < 0$.

	$x < -2$	$-2 < x < 4$	$x > 4$
$x + 2$			
$x - 4$			
$P(x)$			

3. Intervalai Užrašykite intervalu arba intervalų sąjunga:

a) $x \geq 3$ **b)** $x < -1$ **c)** $-2 \leq x < 5$ **d)** $x \neq 0$

4. Skaityk ženklų tiesę Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ ženklų tiesė: 

a) Kokio ženklo yra a?

b) Išspręskite $P(x) > 0$ ir $P(x) \leq 0$.

c) Kuris iš skaičių $P(-4)$; $P(0)$; $P(5)$ yra teigiamas?

5. Skaidyk ir spręsk Išskaidykite kairiąją pusę dauginamaisiais ir išspręskite nelygybę:

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$ **c)** $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

b) $x^2 - x - 12 < 0$ **d)** $x^2 - 9 \leq 0$

6. Sugretink Kiekvienai nelygybei parinkite jos sprendinių aibę.

A) $x^2 - 4 > 0$	1) $(-2; 2)$
B) $x^2 - 4 < 0$	2) $[-2; 2]$
C) $x^2 - 4 \geq 0$	3) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$
D) $x^2 - 4 \leq 0$	4) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

7. Rask klaidą Mokinys sprendžia $x^2 - 3x - 4 \leq 0$: „Šaknys -1 ir 4, daugianario $a > 0$, tarp šaknų ženklas neigiamas, todėl atsakymas $x \in (-1; 4)$.“ Kur klaida? Užrašykite teisingą atsakymą.

8. Rask klaidą Mokinys sprendžia $(x-1)(x-5) > 0$: „Sandauga teigiama, todėl $x - 1 > 0$ ir $x - 5 > 0$, taigi $x > 5$.“ Kurią sprendinių aibės dalį jis pamiršo? Išspręskite teisingai.

9. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Jei $a > 0$ ir $D > 0$, tai už šaknų $P(x) > 0$.
b) Nelygybė $x^2 + 1 < 0$ turi sprendinių.
c) Nelygybė $(x-2)^2 \geq 0$ teisinga su visais x.
d) Nelygybė $(x-2)^2 > 0$ teisinga su visais x.
e) Nelygybė $-x^2 - 3 < 0$ teisinga su visais x.

10. Pagal D ir a Apskaičiuokite D ir, šaknų neieškodami, nustatykite, ar daugianaris visada teigiamas, visada neigiamas, ar keičia ženklą:

a) $x^2 + 4x + 5$
b) $-x^2 + 2x - 3$
c) $2x^2 + x - 1$
d) $-3x^2 + 6x - 3$

11. Viena šaknis arba nė vienos Išspręskite:

a) $x^2 - 4x + 4 > 0$
b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$
c) $x^2 + x + 1 > 0$
d) $-x^2 + 2x - 5 \geq 0$

12. Pilnasis kvadratas Išskirkite pilnąjį kvadratą ir pagrįskite, kad nelygybė teisinga su visais x:

a) $x^2 - 4x + 5 > 0$ **b)** $x^2 + 10x + 26 > 0$ **c)** $-x^2 + 2x - 3 < 0$

13. Kai $a < 0$ Išspręskite (pirmiausia pertvarkykite, kad koeficientas prie x^2 būtų teigiamas):

a) $-x^2 + 4x - 3 > 0$
b) $-x^2 - x + 6 \geq 0$
c) $-2x^2 + 8 < 0$
d) $3x - x^2 \leq 0$

14. Nepilnosios nelygybės Išspręskite be šaknų formulės (iškelkite x prieš skliaustus arba pasinaudokite kvadratų skirtumu):

a) $x^2 - 7x < 0$
b) $x^2 \geq 16$
c) $2x^2 - 8x > 0$
d) $4x^2 \leq 1$

15. Sveikieji sprendiniai Raskite visus sveikuosius skaičius, tenkinančius nelygybę:

a) $x^2 - 2x - 8 < 0$
b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

16. Daugianaris iš ženklų Raskite daugianarį:

a) $P(x) = x^2 + bx + c$; $P(x) > 0$, kai $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$, ir $P(x) < 0$, kai $x \in (1; 5)$.
b) $P(x) = -x^2 + bx + c$; $P(x) \geq 0$ tik tada, kai $x \in [-2; 3]$.

17. Sugalvok pats Sugalvokite kvadratinę nelygybę su x^2 (užrašykite ją standartiniu pavidalu), kurios sprendinių aibė yra:

a) $[-1; 4]$
b) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
c) $\{5\}$ (vienintelis skaičius)
d) sprendinių nėra

18. Parametras Raskite visas p reikšmes, su kuriomis:

a) nelygybė $x^2 + 4x + p > 0$ teisinga su visais x;
b) nelygybė $x^2 - 6x + p \leq 0$ turi bent vieną sprendinį.

19. Tekstinis Stačiakampio viena kraštinė lygi x cm, kita $-x+3$ cm. Su kuriomis x reikšmėmis stačiakampio plotas mažesnis už 40 cm^2?

20. Tekstinis Dviejų skaičių suma lygi 10. Su kuriomis pirmojo skaičiaus x reikšmėmis jų sandauga didesnė už 21?

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis nelygybė $mx^2 - 4x + m < 0$ teisinga su visais x?

22. Iš ženklų į daugianarį Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ ženklai tokie: $P(x) \geq 0$ tik tada, kai $x \in [-2; 3]$, o $P(0) = 12$.

a) Raskite $P(x)$.

b) Išspręskite nelygybę $P(x) > 12$.

23. Simetrija ir ženklai Daugianaris $P(x) = x^2 + bx + c$ tenkina sąlygą $P(-1) = P(5)$, o jo mažiausia reikšmė lygi -16.

a) Raskite $P(x)$.

b) Išspręskite $P(x) \leq 0$ ir $P(x) > 9$.

24. Sistema Išspręskite nelygybių sistemą ir atsakymą užrašykite intervalu: $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0, \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0. \end{cases}$

25. Neieškok šaknų! Duota lygtis $x^2 - 7x + 3 = 0$.

a) Šaknų neieškodami, įrodykite, kad ji turi dvi šaknis ir abi jos teigiamos.

b) Kiek sveikųjų skaičių yra tarp jos šaknų $x_1 < x_2$? Išvardykite juos. (Šaknų ieškoti nereikia.)

26. Parametras ir Vijeto teorema Su kuriomis m reikšmėmis lygtis $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ turi šaknų ir visos jos teigiamos?

27. Gudriai Išspręskite nelygybę $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$. (Pažymėkite $t = x^2$.)

28. Ar egzistuoja? Nelygybės $P(x) > 0$, kur $P(x) = ax^2 + bx + c$, sprendinių aibė yra intervalas $(1; 3)$.

a) Ar gali būti $P(0) = 3$?

b) Ar gali būti $P(0) = -6$? Jei taip, raskite $P(x)$.

29. Įrodymas Duotas daugianaris $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ir skaičius m, su kuriuo $a \cdot P(m) < 0$ (a ir $P(m)$ skirtingų ženklų). Įrodykite, kad

a) $D > 0$;

b) m yra tarp šaknų, t. y. $x_1 < m < x_2$.

30. Iššūkis Nelygybės $x^2 + bx + c < 0$ sprendinių aibė yra intervalas, kurio ilgis lygus 6.

a) Raskite mažiausią daugianario $x^2 + bx + c$ reikšmę.

b) Raskite b ir c, jei dar žinoma, kad šio intervalo vidurio taškas yra 2.

Atsakymai

1. a) $-$, $-$; $+$. b) $-$, $+$; $-$. c) 0, $+$; 0. d) $+$, $+$; $+$.

2. Ženklai: $x+2$: $-++$; $x-4$: $--+$; P: $+-+$. $P>0$: $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$; $P<0$: $(-2;4)$.

3. a) $[3;+\infty)$. b) $(-\infty;-1)$. c) $[-2;5)$. d) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

4. a) $a<0$. b) $P>0$: $(-3;2)$; $P\le 0$: $(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$. c) $P(0)$.

5. a) $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$. b) $(-3;4)$. c) $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. d) $[-3;3]$.

6. A–3, B–1, C–4, D–2.

7. Šaknys įeina: $[-1;4]$.

8. Pamiršo atvejį, kai abu dauginamieji neigiami. Teisingai: $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

9. a) T. b) K. c) T. d) K ($x=2$ netinka). e) T.

10. a) $D=-4$, visada teigiamas. b) $D=-8$, visada neigiamas. c) $D=9$, keičia ženklą. d) $D=0$, niekada nebūna teigiamas (≤ 0; lygus 0 tik tada, kai $x=1$).

11. a) $x\neq 2$. b) $x=-3$. c) visi x. d) sprendinių nėra.

12. a) $(x-2)^2+1$. b) $(x+5)^2+1$. c) $-(x-1)^2-2$.

13. a) $(1;3)$. b) $[-3;2]$. c) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. d) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.

14. a) $(0;7)$. b) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$. c) $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. d) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

15. a) -1; 0; 1; 2; 3 (5 skaičiai). b) nuo -2 iki 4 (7 skaičiai).

16. a) x^2-6x+5. b) $-x^2+x+6$.

17. Pvz. a) $x^2-3x-4\le 0$. b) $(x-2)^2>0$. c) $(x-5)^2\le 0$. d) $x^2+1<0$.

18. a) $p>4$. b) $p\le 9$.

19. $0<x<5$.

20. $3<x<7$.

21. $m<-2$.

22. a) $P(x)=-2x^2+2x+12$. b) $(0;1)$.

23. a) $x^2-4x-12$. b) $[-2;6]$; $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$.

24. $(-2;-1]$.

25. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) 6 skaičiai: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

26. $m\ge 3$.

27. $(-2;-1)\cup(1;2)$.

28. a) Ne. b) Taip: $P(x)=-2x^2+8x-6$.

29. Įrodymas – žr. sprendimus.

30. a) -9. b) $b=-4$, $c=-5$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Kai $m = 0$, nelygybė tampa tiesine. Kai $m \neq 0$ ir $D < 0$, ženklas visur toks pat kaip $a = m$. Koks turi būti m ženklas?

22. Iš sprendinių aibės nustatykite šaknis ir tai, ar $a > 0$, ar $a < 0$. Tada $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, o a rasite iš $P(0)$.

23. Iš $P(-1) = P(5)$ raskite ekstremumo tašką h. Tada $P(x) = (x - h)^2 + k$.

24. Kiekvieną nelygybę išspręskite atskirai (ženklų tiese), tada raskite abiejų sprendinių aibių bendrąją dalį.

25. Rasti šaknų nereikia: jų ženklus nustatysite iš $x_1 + x_2$ ir $x_1 x_2$ (kai $D \geq 0$). O ką reiškia $P(n) < 0$ šaknų atžvilgiu, kai $a > 0$?

26. Reikia trijų sąlygų: $D \geq 0$, $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$. Raskite m, tenkinančius visas tris.

27. Pažymėję $t = x^2$, gausite kvadratinę nelygybę su t. Paskui grįžkite prie x: $x^2 > 1$ ir $x^2 < 4$.

28. Jei daugianaris teigiamas tik intervale $(1; 3)$, kokio ženklo turi būti a? Užrašykite $P(x) = a(x-1)(x-3)$ ir susiekite a su $P(0)$.

29. Išskirkite pilnąjį kvadratą daugianariui $a \cdot P(x)$ (ne $P(x)$!) ir išreikškite jį per D.

30. Kaip $x_2 - x_1$ susijęs su D? Išreikškite $(x_2 - x_1)^2$ per $x_1 + x_2$ ir $x_1 x_2$.

Sprendimai (21–30)

21. Jei $m = 0$, nelygybė tampa $-4x < 0$, t. y. $x > 0$ – ne su visais x. Todėl $m \neq 0$.
Kai $m \neq 0$, daugianario ženklas su visais x toks pat kaip $a = m$ tada ir tik tada, kai $D < 0$. Reikia neigiamo ženklo, todėl $m < 0$ ir $D < 0$.
$D = (-4)^2 - 4 \cdot m \cdot m = 16 - 4m^2 < 0 \Rightarrow m^2 > 4 \Rightarrow m < -2$ arba $m > 2$.
Kadangi $m < 0$, lieka $m < -2$.
Patikra: $m = -3$: $-3x^2 - 4x - 3$, $D = 16 - 36 < 0$, $a < 0$ ✓.
Atsakymas: $m < -2$.

22. a) Nelygybė $P(x) \geq 0$ teisinga tik intervale $[-2; 3]$ – tarp šaknų ženklas priešingas a ženklui, todėl $a < 0$, o šaknys yra -2 ir 3: $P(x) = a(x + 2)(x - 3)$.
Iš $P(0) = 12$: $a \cdot 2 \cdot (-3) = 12$, $a = -2$ (neigiamas, kaip ir turi būti).
$P(x) = -2(x + 2)(x - 3) = -2(x^2 - x - 6) = -2x^2 + 2x + 12$.
b) $-2x^2 + 2x + 12 > 12 \Rightarrow -2x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow x(x - 1) < 0$ (padalijome iš -2 ir pakeitėme nelygybės ženklą priešingu). Šaknys 0 ir 1, $a > 0$, ženklas neigiamas tarp šaknų.
Patikra: $P(0{,}5) = 12{,}5 > 12$ ✓.
Atsakymas: a) $-2x^2 + 2x + 12$; b) $x \in (0; 1)$.

23. a) Kadangi $P(-1) = P(5)$, tai $h = \frac{-1+5}{2} = 2$. Mažiausia reikšmė -16 (nes $a = 1 > 0$): $P(x) = (x-2)^2 - 16 = x^2 - 4x - 12$.
b) $P(x) \leq 0$: $(x-2)^2 \leq 16$, arba išskaidome: $P(x) = (x-2)^2 - 16 = (x-2-4)(x-2+4) = (x-6)(x+2) \leq 0$. Šaknys -2 ir 6, ženklas neigiamas tarp jų, o $\leq$ – šaknys įeina: $[-2; 6]$.
$P(x) > 9$: $(x - 2)^2 > 25$, $x^2 - 4x - 21 > 0$, $(x - 7)(x + 3) > 0$. Šaknys -3 ir 7, ženklas teigiamas už šaknų (nelygybė griežta – šaknys neįeina).
Patikra: $P(0) = -12 < 0$, $0 \in [-2; 6]$ ✓; $P(8) = 16 > 9$ ✓.
Atsakymas: a) $x^2 - 4x - 12$; b) $[-2; 6]$ ir $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$.

24. Pirmoji nelygybė: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) < 0$, šaknys -2 ir 3, ženklas neigiamas tarp jų: $(-2; 3)$.
Antroji nelygybė: $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1) \geq 0$, šaknys -1 ir 4, ženklas teigiamas už šaknų, šaknys įeina: $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.
Sistemos sprendiniai turi tenkinti abi nelygybes – ieškome bendrosios dalies. Iš $(-2; 3)$ tinka tik ta dalis, kuri yra ≤ -1 (nes $[4; +\infty)$ nepatenka į $(-2; 3)$): $(-2; -1]$.
Patikra: $x = -1$: $1 + 1 - 6 = -4 < 0$, $1 + 3 - 4 = 0 \geq 0$ ✓; $x = -1{,}5$: $2{,}25 + 1{,}5 - 6 < 0$ ir $2{,}25 + 4{,}5 - 4 > 0$ ✓.
Atsakymas: $x \in (-2; -1]$.

25. a) $D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 37 > 0$ – dvi šaknys. Pagal Vijeto teoremą $x_1 + x_2 = 7 > 0$ ir $x_1 x_2 = 3 > 0$. Sandauga teigiama, taigi šaknys vienodo ženklo, o suma teigiama – abi teigiamos.
b) $P(x) = x^2 - 7x + 3$, $a = 1 > 0$, todėl $P(x) < 0$ tik tarp šaknų. $P(1) = 1 - 7 + 3 = -3 < 0$ ir $P(6) = 36 - 42 + 3 = -3 < 0$, taigi 1 ir 6 yra intervale $(x_1; x_2)$ – kartu ir visi sveikieji skaičiai tarp jų: 1; 2; 3; 4; 5; 6. $P(0) = 3 > 0$ ir $P(7) = 49 - 49 + 3 = 3 > 0$ – skaičiai 0 ir 7 jau už šaknų; $x_1 > 0$ (iš a dalies), todėl sveikieji skaičiai ≤ 0 taip pat už šaknų, o 7 yra už šaknų ir didesnis už vidinį tašką 6, todėl ir visi skaičiai ≥ 7 yra už šaknų.
Atsakymas: b) 6 skaičiai: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

26. Reikia, kad šaknys būtų ($D \geq 0$) ir abi būtų teigiamos (pagal Vijeto teoremą: $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$).
$D = (2m)^2 - 4(m + 6) = 4m^2 - 4m - 24 = 4(m - 3)(m + 2) \geq 0$: $m \leq -2$ arba $m \geq 3$.
$x_1 + x_2 = 2m > 0 \Rightarrow m > 0$.
$x_1 x_2 = m + 6 > 0 \Rightarrow m > -6$.
Bendroji dalis: $m \geq 3$.
Patikra: $m = 3$: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, šaknis $3 > 0$ ✓; $m = 4$: $x^2 - 8x + 10$, šaknys $4 \pm \sqrt{6} > 0$ ✓.
Atsakymas: $m \geq 3$.

27. Pažymime $t = x^2$ ($t \geq 0$): $t^2 - 5t + 4 < 0$, $(t - 1)(t - 4) < 0$, todėl $1 < t < 4$, t. y. $1 < x^2 < 4$.
$x^2 > 1$: $x < -1$ arba $x > 1$. $x^2 < 4$: $-2 < x < 2$.

Bendroji dalis: $-2 < x < -1$ arba $1 < x < 2$.
Patikra: $x = 1{,}5$: $5{,}0625 - 11{,}25 + 4 < 0$ ✓; $x = 0$: $4 > 0$, $x = 3$: $81 - 45 + 4 > 0$ ✓.
Atsakymas: $(-2;-1) \cup (1;2)$.

28. $P(x) > 0$ tik intervale $(1;3)$ – tarp šaknų ženklas priešingas a ženklui, todėl $a < 0$, šaknys 1 ir 3: $P(x) = a(x-1)(x-3)$, $P(0) = 3a$.
a) $P(0) = 3$ duoda $a = 1 > 0$ – prieštarauja tam, kad $a < 0$. **Ne**, negali.
b) $P(0) = -6$ duoda $a = -2 < 0$ – tinka. $P(x) = -2(x-1)(x-3) = -2x^2 + 8x - 6$.
Patikra: $P(2) = -8 + 16 - 6 = 2 > 0$ ✓; $P(0) = -6$, $P(4) = -32 + 32 - 6 < 0$ ✓.
Atsakymas: a) ne; b) taip, $-2x^2 + 8x - 6$.

29. Išskirkime pilnąjį kvadratą daugianariui $a \cdot P(x)$:
$a \cdot P(x) = a^2x^2 + abx + ac = \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + ac = \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}$.
a) Jei $D \le 0$, tai $a \cdot P(m) = \left(am + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{D}{4} \ge 0$ – prieštarauja sąlygai $a \cdot P(m) < 0$. Taigi $D > 0$.
b) Vadinasi, yra dvi šaknys $x_1 < x_2$ ir $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Tada $a \cdot P(m) = a^2(m - x_1)(m - x_2) < 0$. Kadangi $a^2 > 0$, tai $(m - x_1)(m - x_2) < 0$, o sandauga neigiama tik tada, kai dauginamieji skirtingų ženklų: $m - x_1 > 0$ ir $m - x_2 < 0$, t. y. $x_1 < m < x_2$. ■

30. a) Jei $P(x) = x^2 + bx + c < 0$ intervale $(x_1; x_2)$, tai x_1, x_2 – šaknys ($D > 0$), o ilgis $x_2 - x_1 = 6$.
$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (-b)^2 - 4c = b^2 - 4c = D$ (pagal Vijeto teoremą).
Todėl $D = 36$. Mažiausia reikšmė (nes $a = 1 > 0$): $P_e = -\frac{D}{4a} = -\frac{36}{4} = -9$.
b) Intervalo vidurio taškas $\frac{x_1+x_2}{2} = 2$, taigi $x_1 + x_2 = 4 = -b$, $b = -4$. Be to, $x_2 - x_1 = 6$, todėl $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. $c = x_1x_2 = -5$.
Patikra: $P(x) = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5) < 0$ tik intervale $(-1;5)$, ilgis 6 ✓; $P(2) = -9$ ✓.
Atsakymas: a) -9; b) $b = -4$, $c = -5$.