Kvadratinis daugianaris

9 tema: skaidymas dauginamaisiais – 30 užduočių

Jei $D \geq 0$ ir x_1, x_2 – šaknys: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. $D = 0$: $a(x - x_1)^2$. $D < 0$: daugianaris **neskaidomas**. **II būdas:** ieškome tokių m, n, kad $m \cdot n = a \cdot c$ ir $m + n = b$; tada rašome $ax^2 + mx + nx + c$ ir grupuojame. Tikrinkite atskliausdami.

1. Atpažink Iš skaidinio $a(x - x_1)(x - x_2)$ nurodykite a, x_1 ir x_2.

a) $2(x - 1)(x - 4)$

b) $-3(x + 2)(x - 5)$

c) $(x - 3)^2$

d) $5x(x + 4)$

2. Šaknys → skaidinys Raskite šaknis ir suskaidykite dauginamaisiais.

a) $x^2 - 7x + 10$ **b)** $x^2 + 2x - 15$ **c)** $x^2 - 9x$ **d)** $x^2 - 16$

3. Per diskriminantą Apskaičiuokite D, raskite šaknis ir suskaidykite. Atsakymą užrašykite be trupmenų, pvz. $(2x + 1)(x - 3)$.

a) $2x^2 - 5x - 3$

b) $3x^2 + 10x + 3$

c) $4x^2 - 12x + 9$

d) $6x^2 - x - 2$

4. Lentelė Užpildykite lentelę (jei daugianaris neskaidomas, parašykite „neskaidomas“).

	daugianaris	D	$x_1; x_2$	skaidinys
a)	$x^2 - x - 12$			
b)	$2x^2 + 3x - 2$			
c)	$-x^2 + x + 6$			
d)	$x^2 + 3x + 5$			

5. Rask klaidą Mokinys rašo: $2x^2 - 7x + 3$: $D = 49 - 24 = 25$, $x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4}$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, todėl $2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Kur klaida? Užrašykite teisingai ir patikrinkite atskliausdami.

6. II būdas: $a \cdot c$ Suskaidykite, vidurinį narį išskaidę į du narius (pirmiausia raskite m ir n).

a) $2x^2 + 7x + 3$

b) $3x^2 - 8x + 4$

c) $6x^2 + 7x - 3$

d) $5x^2 - 13x - 6$

7. Sugretink Kiekvienam daugianariui parinkite II būdui tinkamą porą $(m; n)$ $(mn = ac, m + n = b)$.

A) $3x^2 + 10x + 8$ 1) $m = -3$, $n = -8$

B) $2x^2 - 5x - 12$ 2) $m = 4$, $n = 6$

C) $4x^2 - 11x + 6$ 3) $m = 4$, $n = -3$

D) $6x^2 + x - 2$ 4) $m = 3$, $n = -8$

8. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite (atskliausdami arba apskaičiuodami D).

a) Daugianaris $x^2 + x + 1$ neskaidomas.

b) $x^2 + 4 = (x+2)^2$.

c) $2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)$.

d) $x^2 - 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.

9. Prastink Suskaidę dauginamaisiais, suprastinkite trupmenas (vardikliai nelygūs nuliui).

a) $\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

b) $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$

d) $\dfrac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$

10. Atvirkščiai Užrašykite kvadratinį daugianarį, kurio koeficientai sveikieji, a – mažiausias galimas natūralusis skaičius, o šaknys:

a) 2 ir 5 **b)** -3 ir $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}$ ir $\frac{3}{2}$

11. Tekstinis Stačiakampio plotas lygus $3x^2 + 11x + 10$ (cm^2), o vienos jo kraštinės ilgis – $x + 2$ (cm).

a) Kokiu reiškiniu užrašomas kitos kraštinės ilgis?

b) Koks stačiakampio perimetras, kai $x = 4$?

12. Su 1 tema Daugianario $P(x) = x^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = -12$ ir $P(1) = -10$. Raskite b, c ir suskaidykite $P(x)$.

13. Žinome šaknį Daugianaris $3x^2 - 10x + c$ turi šaknį 3. Raskite c, antrąją šaknį ir suskaidykite jį (be trupmenų).

14. Patikra pagal Vijeto teoremą Suskaidykite $2x^2-9x+4$. Raskite šaknis x_1, x_2 ir įsitikinkite, kad $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ bei $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Apskaičiuokite $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

15. Mintinai Suskaidę skaitiklį, apskaičiuokite be skaičiuotuvo:

a) $\dfrac{1003^2 - 5\cdot 1003 + 6}{1001}$

b) $\dfrac{2\cdot 1999^2 + 1999 - 1}{2\cdot 1999 - 1}$

16. Ekstremumas Suskaidykite $P(x) = 2x^2 - 12x + 10$. Šaknų vidurio taškas – ekstremumo taškas x_e (dėl simetrijos). Raskite x_e ir ekstremumą P_e; ar tai mažiausia, ar didžiausia reikšmė?

17. Parametras Su kuriomis p reikšmėmis daugianarį galima užrašyti pavidalu $a(x - x_1)^2$? Užrašykite jį tokiu pavidalu.

a) $x^2 + px + 25$

b) $px^2 + 12x + 9$ $(p > 0)$

18. Ar egzistuoja? Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris $P(x)$ su sveikaisiais koeficientais, kurio šaknys 2 ir 5, o $P(0)$ lygi: a) 20; b) 15; c) -30? Jei taip – užrašykite jį.

19. Sugalvok pats Sugalvokite kvadratinį daugianarį su sveikaisiais koeficientais, kurio $a = 2$ ir $D = 81$. Suskaidykite jį dauginamaisiais.

20. Iššūkis Įrodykite: jei $D = 0$, tai $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ (pasinaudokite pilnojo kvadrato formule su D). Pritaikykite daugianariui $18x^2 - 24x + 8$.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Neskaidomas Įrodykite, kad daugianario $x^2 + x + 1$ negalima užrašyti pavidalu $(x - p)(x - q)$ su realiaisiais p, q.

22. Koeficientai iš reikšmių Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = -10$, $P(1) = -6$, $P(-1) = -8$. Raskite $P(x)$ ir suskaidykite jį be trupmenų.

23. Simetrija ir skaidymas Daugianaris $P(x) = 2x^2 + bx + c$ tenkina sąlygas $P(-1) = P(6)$ ir $P(0) = 12$. Raskite b, c ir suskaidykite $P(x)$. Patikrinkite, kad šaknų vidurio taškas sutampa su x_e.

24. Raidiniai koeficientai Suskaidykite dauginamaisiais (kintamasis x, $a \neq 0$):

a) $x^2 - 5ax + 6a^2$ **b)** $3x^2 + 10ax + 3a^2$

25. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis daugianarį $x^2 + 2mx + 3m + 4$ galima užrašyti pavidalu $a(x - x_1)^2$? Užrašykite juos tokiu pavidalu.

26. Pirminiai skaičiai Su kuriais natūraliaisiais n skaičius $n^2 - 5n + 6$ yra pirminis?

27. Gudriai Pažymėję $t = x^2$, suskaidykite į tiesinius dauginamuosius:

a) $x^4 - 10x^2 + 9$ **b)** $x^4 - 13x^2 + 36$

28. Prastinimas su parametru Su kuriomis a reikšmėmis trupmena $\dfrac{x^2 + ax + 6}{x^2 - x - 2}$ prastinama? Kiekvienu atveju suprastinkite.

29. Sveikosios šaknys Raskite visus sveikuosius b, su kuriais $x^2 + bx + 12 = (x - p)(x - q)$, kur p ir q yra sveikieji skaičiai.

30. Iššūkis Daugianario $x^2 + bx + c$ koeficientai sveikieji.

a) Įrodykite: jei jis turi sveikąją šaknį, tai ir antroji šaknis sveika.

b) Įrodykite: jei b ir c nelyginiai, tai sveikųjų šaknų jis neturi.

Atsakymai

1. a) $a = 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. b) $a = -3$; -2 ir 5. c) $a = 1$; $x_1 = x_2 = 3$. d) $a = 5$; 0 ir -4.

2. a) $(x-2)(x-5)$. b) $(x-3)(x+5)$. c) $x(x-9)$. d) $(x-4)(x+4)$.

3. a) $D = 49$; $(x-3)(2x+1)$. b) $D = 64$; $(3x+1)(x+3)$. c) $D = 0$; $(2x-3)^2$. d) $D = 49$; $(3x-2)(2x+1)$.

4. a) 49; 4; -3; $(x-4)(x+3)$. b) 25; $\frac{1}{2}$; -2; $(2x-1)(x+2)$. c) 25; -2; 3; $-(x+2)(x-3)$. d) $D = -11$; neskaidomas.

5. Pamirštas koeficientas $a = 2$: $2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x-3)(2x-1)$.

6. a) $(2x+1)(x+3)$. b) $(3x-2)(x-2)$. c) $(3x-1)(2x+3)$. d) $(5x+2)(x-3)$.

7. A–2, B–4, C–1, D–3.

8. a) T. b) K. c) T. d) K.

9. a) $\frac{x+3}{x-2}$. b) $\frac{2x-1}{x-1}$. c) $\frac{x-2}{x+1}$. d) $\frac{3x+2}{x+2}$.

10. a) $x^2-7x+10$. b) $2x^2+5x-3$. c) $6x^2-11x+3$.

11. a) $3x+5$ (cm). b) 46 cm.

12. $b = 1$, $c = -12$; $(x-3)(x+4)$.

13. $c = 3$; antroji šaknis $\frac{1}{3}$; $(x-3)(3x-1)$.

14. $(2x-1)(x-4)$; $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_1 + x_2 = \frac{9}{2}$, $x_1x_2 = 2$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{9}{4}$.

15. a) 1000. b) 2000.

16. $2(x-1)(x-5)$; $x_e = 3$; $P_e = -8$ (mažiausia reikšmė).

17. a) $p = \pm 10$: $(x+5)^2$ arba $(x-5)^2$. b) $p = 4$: $(2x+3)^2$.

18. a) Taip: $2x^2-14x+20$. b) Ne. c) Taip: $-3x^2+21x-30$.

19. Pvz. $2x^2+x-10 = (2x+5)(x-2)$ arba $2x^2+3x-9 = (2x-3)(x+3)$.

20. Įrodymas: $ax^2+bx+c = a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a}$. $18x^2-24x+8 = 2(3x-2)^2$.

21. Įrodymas – žr. sprendimus.

22. $P(x) = 3x^2+x-10 = (3x-5)(x+2)$.

23. $b = -10$, $c = 12$; $P(x) = 2(x-2)(x-3)$.

24. a) $(x-2a)(x-3a)$. b) $(3x+a)(x+3a)$.

25. $m = 4$: $(x+4)^2$; $m = -1$: $(x-1)^2$.

26. $n = 1$ ir $n = 4$ (abiem atvejais skaičius lygus 2).

27. a) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$. b) $(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.

28. $a = -5$: $\frac{x-3}{x+1}$; $a = 7$: $\frac{x+6}{x-2}$.

29. $b = \pm 7; \pm 8; \pm 13$.

30. Įrodymas – žr. sprendimus.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Tarkime priešingai: $x^2 + x + 1 = (x - p)(x - q)$ su visais x. Atskliauskite ir palyginkite koeficientus – kokią lygtį gausite su p?

22. Iš $P(0)$ iškart gaunate c. Iš $P(1)$ ir $P(-1)$ sudarykite sistemą $a + b = \ldots$, $a - b = \ldots$.

23. Dviejų taškų, kuriuose reikšmės lygios, vidurys – $x_e = -\frac{b}{2a}$. Kam lygūs x_e ir b?

24. Raskite D (gausite reiškinio su a kvadratą) ir šaknis; su a elkitės kaip su skaičiumi.

25. Sąlyga $D = 0$ duoda lygtį su m; išspręskite ją pagal atvirkštinę Vijeto teoremą.

26. Suskaidykite $n^2 - 5n + 6$. Kada dviejų sveikųjų dauginamųjų sandauga yra pirminis skaičius?

27. Daugianarį $t^2 - 10t + 9$ suskaidykite kaip įprastą kvadratinį daugianarį su kintamuoju t, tada vietoj t vėl įrašykite x^2 ir pasinaudokite kvadratų skirtumu $x^2 - k^2$.

28. Suskaidykite vardiklį. Trupmena prastinama, kai skaitiklis dalijasi iš kurio nors vardiklio dauginamojo, t. y. turi tą pačią šaknį.

29. Atskliauskite $(x - p)(x - q)$ ir palyginkite su $x^2 + bx + 12$: kam lygūs pq ir $-b$? Išvardykite visas skaičiaus 12 daliklių poras.

30. a) Pasinaudokite Vijeto teorema: $x_1 + x_2 = -b$. b) Dviejų sveikųjų skaičių suma nelyginė – koks jų lyginumas? Ką tada galima pasakyti apie $x_1 x_2 = c$?

Sprendimai (21–30)

21. Tarkime, kad su visais x galioja $x^2+x+1=(x-p)(x-q)=x^2-(p+q)x+pq$. Palyginame koeficientus:

$$p+q=-1, \qquad pq=1.$$

Iš pirmosios lygybės $q=-1-p$; įrašome į antrąją: $p(-1-p)=1$, t. y. $p^2+p+1=0$. Šios lygties $D=1-4=-3<0$, todėl tokio realiojo p nėra (atvirkštinė Vijeto teorema: sistema sprendinių neturi). **Išvada:** taip užrašyti negalima – daugianaris neskaidomas.

22. Iš $P(0)=c$: $c=-10$. $P(1)=a+b-10=-6$, todėl $a+b=4$. $P(-1)=a-b-10=-8$, todėl $a-b=2$. Sudėję: $2a=6$, $a=3$; tada $b=1$. $P(x)=3x^2+x-10$. Skaidome: $D=1+120=121$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm11}{6}$: $x_1=\frac{5}{3}$, $x_2=-2$. $P(x)=3\big(x-\frac{5}{3}\big)(x+2)=(3x-5)(x+2)$. **Atsakymas:** $3x^2+x-10=(3x-5)(x+2)$. Patikra: $(3x-5)(x+2)=3x^2+6x-5x-10$ ✓

23. $P(0)=c=12$. Kadangi $P(-1)=P(6)$, ekstremumo taškas yra šių taškų vidurys: $x_e=\frac{-1+6}{2}=\frac{5}{2}$. Antra vertus, $x_e=-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{4}$, todėl $-\frac{b}{4}=\frac{5}{2}$, $b=-10$. $P(x)=2x^2-10x+12$; $D=100-96=4$, $x_{1,2}=\frac{10\pm2}{4}$: 3 ir 2. $P(x)=2(x-2)(x-3)$. Šaknų vidurys $\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}=x_e$ ✓ Patikra: $P(-1)=2+10+12=24$, $P(6)=72-60+12=24$ ✓

24. a) $D=25a^2-24a^2=a^2$. $x_{1,2}=\frac{5a\pm a}{2}$: $x_1=3a$, $x_2=2a$. Koeficientas prie x^2 lygus 1, todėl $x^2-5ax+6a^2=(x-2a)(x-3a)$. Patikra: $x^2-3ax-2ax+6a^2$ ✓
b) $D=100a^2-36a^2=64a^2$. $x_{1,2}=\frac{-10a\pm8a}{6}$: $-\frac{a}{3}$ ir $-3a$. $3x^2+10ax+3a^2=3\big(x+\frac{a}{3}\big)(x+3a)=(3x+a)(x+3a)$. Patikra: $3x^2+9ax+ax+3a^2$ ✓

25. Daugianarį $x^2+2mx+3m+4$ galima užrašyti pavidalu $a(x-x_1)^2$ tada ir tik tada, kai $D=0$:

$$D=(2m)^2-4(3m+4)=4m^2-12m-16=4(m^2-3m-4).$$

$m^2-3m-4=0$. Pagal atvirkštinę Vijeto teoremą $m_1+m_2=3$, $m_1m_2=-4$, todėl $m=4$ arba $m=-1$. $m=4$: $x^2+8x+16=(x+4)^2$. $m=-1$: $x^2-2x+1=(x-1)^2$. ✓

26. $n^2-5n+6=(n-2)(n-3)$ (šaknys 2 ir 3).

- $n=2$ ir $n=3$: sandauga lygi 0 – ne pirminis.
- $n=1$: $(-1)(-2)=2$ – pirminis. $n=4$: $2\cdot1=2$ – pirminis.
- $n\geq5$: abu dauginamieji $n-2\geq3$ ir $n-3\geq2$ didesni už 1, todėl skaičius sudėtinis.

Atsakymas: $n=1$ ir $n=4$.

27. a) $t=x^2$: $t^2-10t+9$, $D=100-36=64$, $t=\frac{10\pm8}{2}$: 9 ir 1. Taigi $(t-1)(t-9)=(x^2-1)(x^2-9)=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$.
b) $t^2-13t+36$, $D=169-144=25$, $t=\frac{13\pm5}{2}$: 9 ir 4. $(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.
Patikra: $(x^2-1)(x^2-9)=x^4-10x^2+9$ ✓

28. Vardiklis: x^2-x-2, $D=9$, šaknys 2 ir -1: $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. Trupmena prastinama tik tada, kai skaitiklis turi šaknį 2 arba -1.

- Šaknis 2: $4+2a+6=0$, $a=-5$. Tada $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ ir trupmena lygi $\frac{x-3}{x+1}$.
- Šaknis -1: $1-a+6=0$, $a=7$. Tada $x^2+7x+6=(x+1)(x+6)$ ir trupmena lygi $\frac{x+6}{x-2}$.

Atsakymas: $a=-5$ arba $a=7$. Patikra: $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$ ✓, $(x+1)(x+6)=x^2+7x+6$ ✓

29. Atskliaudę $(x-p)(x-q)=x^2-(p+q)x+pq$, gauname $pq=12$ ir $b=-(p+q)$. Skaičiaus 12 skaidiniai į sveikuosius dauginamuosius (dauginamųjų tvarka nesvarbi):

$\{p;q\}$	$\{1;12\}$	$\{2;6\}$	$\{3;4\}$	$\{-1;-12\}$	$\{-2;-6\}$	$\{-3;-4\}$
$b=-(p+q)$	-13	-8	-7	13	8	7

Atsakymas: $b=\pm7;\pm8;\pm13$. Patikra: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$ ✓

30. a) Tarkime, x_1 – sveikoji šaknis. Kadangi šaknis yra, $D \geq 0$ ir galioja Vijeto teorema: $x_1 + x_2 = -b$. Todėl $x_2 = -b - x_1$ – sveikųjų skaičių skirtumas, t. y. sveikasis skaičius.
b) Tarkime, kad yra sveikoji šaknis x_1. Pagal a dalį antroji šaknis x_2 irgi sveikoji. Pagal Vijeto teoremą $x_1 + x_2 = -b$ – nelyginis skaičius, todėl vienas iš x_1, x_2 lyginis, kitas nelyginis, tad $x_1 x_2 = c$ lyginis. Bet c nelyginis – prieštaravimas. **Išvada:** sveikųjų šaknų nėra.