Kvadratinis daugianaris

8 tema: atvirkštinė Vijeto teorema – 30 užduočių

Jei $u+v=-\frac{b}{a}$ ir $uv=\frac{c}{a}$, tai u ir v yra daugianario ax^2+bx+c šaknys. Daugianaris iš šaknų: $x^2-(u+v)x+uv=(x-u)(x-v)$; visi tokie daugianariai: $a(x-u)(x-v)$.
Sistema $x+y=\ldots$, $xy=\ldots$: x ir y yra lygties $t^2-(\text{suma})\,t+(\text{sandauga})=0$ šaknys; jei $D<0$, sistema sprendinių neturi.

1. Atpažink Ar nurodyti skaičiai yra daugianario šaknys? Patikrinkite jų sumą ir sandaugą.

a) $x^2-9x+14$: 2 ir 7
b) $x^2+3x-10$: 2 ir 5
c) x^2-6x+9: 3 ir 3
d) $2x^2-5x+2$: 2 ir $\frac{1}{2}$
e) $x^2-7x+10$: 3 ir 4

2. Apskaičiuok Sudarykite daugianarį x^2+px+q, kurio šaknys yra duotieji skaičiai.

a) 3 ir 8 **b)** -2 ir 7 **c)** -4 ir -5 **d)** 0 ir 6

3. Lentelė Užpildykite lentelę (visų daugianarių, išskyrus e) eilutę, vyriausiasis koeficientas lygus 1).

	šaknys	suma	sandauga	daugianaris
a)	4 ir 6	□	□	□
b)	-3 ir 5	□	□	□
c)	□	-7	10	□
d)	□	□	□	x^2-x-12
e)	$\frac{1}{2}$ ir 4	□	□	su $a=2$: □

4. Sistema Išspręskite sistemas.

a) $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=12 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-15 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=25 \end{cases}$

5. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Jei $u+v=5$ ir $uv=6$, tai u ir v yra x^2-5x+6 šaknys.
b) Sistema $x+y=3$, $xy=4$ turi sprendinį.
c) Sistema $x+y=6$, $xy=8$ turi vienintelį sprendinį $(2;4)$.
d) Jei skaičių u ir v suma lygi $-\frac{b}{a}$, tai jie yra daugianario ax^2+bx+c šaknys.

6. Rask klaidą Mokinys sprendžia sistemą $x+y=-5$, $xy=6$: „Sudarau $t^2-5t+6=0$, gaunu $t=2$ ir $t=3$, todėl sprendiniai $(2;3)$ ir $(3;2)$.“ Kur klaida? Išspręskite teisingai ir patikrinkite.

7. Rask klaidą ($a\neq 1$) Mokinys ieško daugianario $2x^2-10x+12$ šaknų: „Ieškau skaičių, kurių suma 10, o sandauga 12.“ Kokia iš tikrųjų turi būti suma ir sandauga? Raskite šaknis.

8. Sugretink Kiekvienam daugianariui parinkite jo šaknų porą.

A) x^2-3x-4
B) x^2+3x-4
C) x^2-5x+4
D) x^2+5x+4

1) 1 ir 4
2) -4 ir 1
3) -1 ir -4
4) 4 ir -1

9. Parametras Raskite koeficientus, kai žinomos šaknys:

a) $x^2 + px - 15$ turi šaknis 3 ir -5; p =?
b) $x^2 - 8x + q$ turi šaknis 2 ir 6; q =?
c) $2x^2 + bx + c$ turi šaknis 1 ir 3; b =?, c =?
d) $3x^2 + bx + c$ turi šaknis -2 ir $\frac{1}{3}$; b =?, c =?

10. Rask a Kvadratinio daugianario $P(x)$ šaknys yra -1 ir 4, o $P(0) = 8$. Raskite $P(x)$ standartiniu pavidalu.

11. Rask a (kita sąlyga) Kvadratinio daugianario $P(x)$ šaknys yra 2 ir 5, o $P(1) = -12$. Raskite $P(x)$ ir patikrinkite, kad $P(2) = P(5) = 0$.

12. Su ekstremumu Daugianario $x^2 + px + q$ ekstremumo taškas $x_e = 3$, o viena šaknis lygi 1. Raskite p, q ir kitą šaknį.

13. Šaknys → ekstremumas Daugianario $x^2 + px + q$ šaknys yra -1 ir 7.

a) Sudarykite daugianarį.
b) Raskite ekstremumo tašką x_e ir ekstremumą P_e. Ar tai mažiausia, ar didžiausia reikšmė? Kaip x_e susijęs su šaknimis?
c) Užrašykite daugianarį pilnojo kvadrato pavidalu $(x - h)^2 + k$.

14. Reiškinys su šaknimis Skaičiai x ir y tenkina lygybes $x + y = 7$ ir $x^2 + y^2 = 29$. Raskite xy, tada – visas poras $(x; y)$.

15. Gudriai Išspręskite sistemą $x - y = 2$, $xy = 15$. (Pažymėkite $z = -y$ ir pasinaudokite suma $x + z$.)

16. Tekstinis Stačiakampio perimetras 26 cm, plotas 40 cm^2. Raskite jo kraštines. Ar egzistuoja stačiakampis, kurio perimetras 20 cm, o plotas 30 cm^2?

17. Ar egzistuoja? Ar yra du realieji skaičiai, kurių:

a) suma 6, sandauga 10
b) suma -6, sandauga 9
c) suma 0, sandauga -4
d) suma 0, sandauga 4

Jei yra – raskite juos.

18. Parametras Duota sistema $x + y = k$, $xy = 9$.

a) Kiek sprendinių ji turi, kai $k = 10$? Raskite juos.
b) Kiek sprendinių ji turi, kai $k = 2$?
c) Su kuriomis k reikšmėmis sistema turi tik vieną sprendinį? Raskite jį.

19. Sugalvok pats

a) Sugalvokite sistemą $x + y = \ldots$, $xy = \ldots$, kurios vienas sprendinys yra $(2; 9)$.
b) Sugalvokite tokio pat pavidalo sistemą, kuri sprendinių neturi, ir pagrįskite.

20. Nerasdami šaknų Daugianario $x^2 - 5x + 3$ šaknys – x_1 ir x_2. Nerasdami jų, sudarykite redukuotąją kvadratinę lygtį, kurios šaknys yra:

a) $2x_1$ ir $2x_2$
b) $x_1 + 1$ ir $x_2 + 1$
c) $-x_1$ ir $-x_2$

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Įrodymas Tarkime, kad $a \neq 0$, o realieji skaičiai u, v tenkina $u+v=-\frac{b}{a}$ ir $uv=\frac{c}{a}$. Įrodykite, kad u ir v yra daugianario ax^2+bx+c šaknys (nenaudokite šaknų formulės). Pritaikykite: ar $\frac{2}{3}$ ir -1 yra daugianario $3x^2+x-2$ šaknys?

22. Neatskliausk! Daugianario x^2-6x+4 šaknys – x_1 ir x_2.

a) Įsitikinkite, kad jos realiosios.

b) Nerasdami šaknų, sudarykite redukuotąją kvadratinę lygtį su šaknimis x_1^2 ir x_2^2.

c) Sudarykite kvadratinę lygtį su sveikaisiais koeficientais, kurios šaknys – $\frac{1}{x_1}$ ir $\frac{1}{x_2}$. Kodėl šie skaičiai apibrėžti?

23. Iššūkis Išspręskite sistemą

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$$

(Skaičiai $x+y$ ir xy – kokia jų suma ir sandauga?)

24. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis skaičiai $2m$ ir $m+1$ yra daugianario $x^2-7x+12$ šaknys? Kodėl neužtenka patikrinti tik sandaugos?

25. Dviem būdais Dviejų realiųjų skaičių suma lygi 10. Kokia didžiausia gali būti jų sandauga?

a) Išreikškite sandaugą per x ir raskite kvadratinio daugianario ekstremumą.

b) Kitaip: sistema $x+y=10$, $xy=m$ turi sprendinį tik tada, kai $D \geq 0$. Kokia m reikšmė duoda $D=0$? Kodėl su didesnėmis m reikšmėmis sprendinių nėra?

26. Kubai Raskite visas poras $(x;\, y)$, kai $x+y=6$ ir $x^3+y^3=72$. (Pirmiausia įrodykite, kad $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$.)

27. Iš reikšmių į šaknis Kvadratinio daugianario $P(x)=ax^2+bx+c$ reikšmės: $P(0)=12$, $P(1)=4$, $P(-1)=24$.

a) Raskite a, b, c.

b) Nenaudodami šaknų formulės, raskite $P(x)$ šaknis ir patikrinkite.

28. Gudriai Kvadratinio daugianario $P(x)$ reikšmės: $P(2)=P(6)=5$ ir $P(0)=-19$.

a) Raskite $P(x)$. (Kokias šaknis turi $P(x)-5$?)

b) Raskite jo ekstremumo tašką ir ekstremumą. Ar tai mažiausia, ar didžiausia reikšmė?

29. Šaknys = koeficientai Raskite visus daugianarius x^2+px+q, kurių šaknys yra p ir q (šaknys gali sutapti).

30. Iššūkis Nagrinėkite lygtį $(x-a)(x-b)=c^2$; čia a, b, c – bet kurie realieji skaičiai.

a) Užrašykite ją pavidalu $x^2+px+q=0$ ir raskite šaknų sumą bei sandaugą (jei šaknys yra).

b) Įrodykite, kad lygtis visada turi realiųjų šaknų. Kada ji turi tik vieną šaknį?

c) Išspręskite, kai $a=1$, $b=5$, $c=2$.

Atsakymai

1. a) taip; b) ne (suma 7, o turi būti -3); c) taip; d) taip; e) ne (sandauga $12 \neq 10$).

2. a) $x^2 - 11x + 24$. b) $x^2 - 5x - 14$. c) $x^2 + 9x + 20$. d) $x^2 - 6x$.

3. a) 10; 24; $x^2 - 10x + 24$. b) 2; -15; $x^2 - 2x - 15$. c) -2 ir -5; $x^2 + 7x + 10$. d) 4 ir -3; suma 1; sandauga -12. e) $\frac{9}{2}$; 2; $2x^2 - 9x + 4$.

4. a) (4; 5), (5; 4). b) $(-3; -4)$, $(-4; -3)$. c) $(5; -3)$, $(-3; 5)$. d) (5; 5).

5. a) T. b) K ($D < 0$). c) K (yra ir (4; 2)). d) K (reikia ir sandaugos).

6. Reikia $t^2 + 5t + 6 = 0$ (suma -5): $(-2; -3)$ ir $(-3; -2)$.

7. Suma 5, sandauga 6; šaknys 2 ir 3.

8. A–4, B–2, C–1, D–3.

9. a) $p = 2$. b) $q = 12$. c) $b = -8$, $c = 6$. d) $b = 5$, $c = -2$.

10. $P(x) = -2x^2 + 6x + 8$.

11. $P(x) = -3x^2 + 21x - 30$.

12. $p = -6$, $q = 5$; kita šaknis 5.

13. a) $x^2 - 6x - 7$. b) $x_e = 3$, $P_e = -16$ (mažiausia); x_e – šaknų vidurkis. c) $(x - 3)^2 - 16$.

14. $xy = 10$; (2; 5) ir (5; 2).

15. (5; 3) ir $(-3; -5)$.

16. Kraštinės 5 cm ir 8 cm. Antrojo stačiakampio nėra.

17. a) ne. b) taip: -3 ir -3. c) taip: 2 ir -2. d) ne.

18. a) du: (1; 9), (9; 1). b) nė vieno. c) $k = 6$: (3; 3); $k = -6$: $(-3; -3)$.

19. Pvz. a) $x + y = 11$, $xy = 18$. b) pvz. $x + y = 4$, $xy = 5$ ($D = -4 < 0$).

20. a) $x^2 - 10x + 12 = 0$. b) $x^2 - 7x + 9 = 0$. c) $x^2 + 5x + 3 = 0$.

21. Įrodymas – žr. sprendimus; taip, $\frac{2}{3}$ ir -1 yra šaknys.

22. a) $D = 20$. b) $x^2 - 28x + 16 = 0$. c) $4x^2 - 6x + 1 = 0$.

23. (2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1).

24. $m = 2$ (šaknys 4 ir 3).

25. Didžiausia sandauga 25 (kai $x = y = 5$).

26. (2; 4) ir (4; 2).

27. a) $P(x) = 2x^2 - 10x + 12$. b) 2 ir 3.

28. a) $P(x) = -2x^2 + 16x - 19$. b) $x_{\max} = 4$, $P_{\max} = 13$.

29. x^2 (šaknys 0 ir 0) ir $x^2 + x - 2$ (šaknys 1 ir -2).

30. a) suma $a + b$, sandauga $ab - c^2$. b) Įrodymas – žr. sprendimus. c) $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Padalykite $ax^2 + bx + c$ iš a ir vietoj $\frac{b}{a}$ bei $\frac{c}{a}$ įrašykite $-(u+v)$ ir uv. Tada atpažinkite sandaugą $(x-u)(x-v)$.

22. Vijeto teorema: $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 x_2 = 4$. Reiškinį $x_1^2 + x_2^2$ išreikškite reiškiniais $(x_1+x_2)^2$ ir x_1x_2; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$.

23. Nagrinėkite du skaičius $x + y$ ir xy: jų suma 11, sandauga 30. Raskite juos pagal atvirkštinę Vijeto teoremą, o tada su kiekviena pora išspręskite sistemą.

24. Atvirkštinei teoremai reikia ir sumos, ir sandaugos. Išnagrinėkite abi sąlygas atskirai ir palyginkite rezultatus.

25. a) $xy = x(10-x)$. b) $D = 100 - 4m$; kada $D = 0$, o kada jis neigiamas?

26. Atskliauskite $(x+y)^3$. Radę xy, kartu su $x + y = 6$ sudarykite lygtį $t^2 - 6t + (\dots) = 0$.

27. Įrašykite $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ į $ax^2 + bx + c$. Tada $P(x)$ padalykite iš a ir ieškokite skaičių su reikiama suma ir sandauga.

28. Daugianario $P(x) - 5$ koeficientai a, b tie patys, o šaknys – 2 ir 6, todėl $P(x) - 5 = a(x-2)(x-6)$. Įrašę $x = 0$, raskite a.

29. Atvirkštinė teorema: $p + q = -p$ ir $pq = q$. Antrąją lygybę perrašykite pavidalu $q(p-1) = 0$.

30. Atskliauskite kairiąją pusę ir perkelkite c^2 į kairę. Diskriminantas $D = (a-b)^2 + 4c^2$ – ką galima pasakyti apie dviejų kvadratų sumą?

Sprendimai (21–30)

21. Iškelkime a prieš skliaustus: $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$. Pagal sąlygą $\frac{b}{a} = -(u+v)$ ir $\frac{c}{a} = uv$, todėl

$$ax^2+bx+c = a\big(x^2-(u+v)x+uv\big) = a(x-u)(x-v).$$

Įrašę $x=u$ gauname $a\cdot 0\cdot(u-v)=0$, o įrašę $x=v$ – $a(v-u)\cdot 0=0$. Taigi u ir v yra šaknys. Kitų šaknų nėra: sandauga $a(x-u)(x-v)$ lygi 0 tik tada, kai $x=u$ arba $x=v$.
Pritaikymas: $3x^2+x-2$: $\frac{2}{3}+(-1) = -\frac{1}{3} = -\frac{b}{a}$ ✓, $\frac{2}{3}\cdot(-1) = -\frac{2}{3} = \frac{c}{a}$ ✓. Taigi $\frac{2}{3}$ ir -1 yra šaknys. Patikra: $3\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-2 = \frac{4}{3}+\frac{2}{3}-2 = 0$ ✓, $3-1-2=0$ ✓.

22. a) $D = 36-16 = 20$. Diskriminantas teigiamas, todėl daugianaris turi dvi realiąsias šaknis. Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=4$.
b) $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = 36-8=28$; $x_1^2\cdot x_2^2 = (x_1x_2)^2 = 16$. Pagal atvirkštinę Vijeto teoremą ieškomoji lygtis: $x^2-28x+16=0$.
c) Kadangi $x_1x_2 = 4\neq 0$, nė viena šaknis nelygi 0, todėl $\frac{1}{x_1}$ ir $\frac{1}{x_2}$ apibrėžti. Suma: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; sandauga: $\frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{4}$. Lygtis $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=0$; padauginę iš 4, gauname $4x^2-6x+1=0$.
Patikra: $x_1 = 3+\sqrt{5}$: $x_1^2 = 14+6\sqrt{5}$, o $x_2^2 = 14-6\sqrt{5}$; suma 28, sandauga $196-180=16$ ✓

23. Skaičiai $x+y$ ir xy turi sumą 11 ir sandaugą 30, todėl pagal atvirkštinę teoremą jie yra lygties $t^2-11t+30=0$ šaknys. $D = 121-120 = 1$, $t = \frac{11\pm1}{2}$, t. y. 5 ir 6.

- $x+y=5$, $xy=6$: $t^2-5t+6=0$, $t=2$ arba 3. Poros (2; 3), (3; 2).
- $x+y=6$, $xy=5$: $t^2-6t+5=0$ ($D=16$), $t=1$ arba 5. Poros (1; 5), (5; 1).

Atsakymas: (2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1). Patikra: (1; 5): $1+5+5=11$ ✓, $5\cdot 6=30$ ✓

24. Pagal atvirkštinę teoremą skaičiai yra šaknys, kai suma lygi 7 *ir* sandauga lygi 12.
Suma: $2m+m+1 = 3m+1 = 7$, todėl $m=2$.
Sandauga: $2m(m+1)=12$, todėl $m^2+m-6=0$; $D = 1+24=25$, $m=\frac{-1\pm5}{2}$, t. y. $m=2$ arba $m=-3$.
Abi sąlygos kartu tenkinamos tik tada, kai $m=2$. Iš sandaugos gauta reikšmė $m=-3$ netinka: skaičiai -6 ir -2 turi sandaugą 12, bet sumą $-8\neq 7$ (jie yra $x^2+8x+12$ šaknys).
Atsakymas: $m=2$. Patikra: skaičiai 4 ir 3: $4+3=7$ ✓, $4\cdot 3=12$ ✓

25. a) $xy = x(10-x) = -x^2+10x$. Vyriausiasis koeficientas $-1<0$, todėl daugianaris įgyja didžiausią reikšmę, kai $x_e = -\frac{10}{2\cdot(-1)} = 5$; tada $y=5$ ir $xy=25$.
b) Sistema $x+y=10$, $xy=m \Leftrightarrow t^2-10t+m=0$. Šios lygties diskriminantas $D=100-4m$. Sprendinių yra, kai $D\geq 0$. $D=0$, kai $m=25$ (tada $x=y=5$). Didėjant m, D mažėja, todėl, kai $m>25$, $D<0$ ir sprendinių nėra.
Atsakymas: 25. Abiem būdais gaunamas tas pats atsakymas.

26. Atskliaudę gauname $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$, todėl $x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y)$.
Įrašome: $72 = 6^3-3xy\cdot 6 = 216-18xy$, todėl $18xy=144$ ir $xy=8$.
Taigi x ir y yra lygties $t^2-6t+8=0$ šaknys; $D=36-32=4$, $t=\frac{6\pm2}{2}$: $t=2$ arba $t=4$.
Atsakymas: (2; 4) ir (4; 2). Patikra: $8+64=72$ ✓, $2+4=6$ ✓

27. a) $P(0)=c=12$. $P(1)=a+b+12=4$, todėl $a+b=-8$. $P(-1)=a-b+12=24$, todėl $a-b=12$. Sudėję gauname $2a=4$, $a=2$; tada $b=-10$. $P(x)=2x^2-10x+12$.
b) Padalijus iš 2, šaknys nepasikeičia: x^2-5x+6. Reikia skaičių, kurių suma 5, o sandauga 6: tai 2 ir 3. Pagal atvirkštinę teoremą tai yra šaknys (kitų nėra).
Atsakymas: $P(x)=2x^2-10x+12$, šaknys 2 ir 3. Patikra: $P(2)=8-20+12=0$ ✓, $P(3)=18-30+12=0$ ✓

28. a) Daugianaris $P(x)-5 = ax^2+bx+(c-5)$ yra kvadratinis, jo šaknys 2 ir 6 (nes $P(2)-5=P(6)-5=0$), todėl $P(x)-5 = a(x-2)(x-6)$. Įrašome $x=0$: $P(0)-5=-24=12a$, todėl $a=-2$. Tada

$$P(x) = -2(x-2)(x-6)+5 = -2(x^2-8x+12)+5 = -2x^2+16x-19.$$

Patikra: $P(0) = -19$ ✓, $P(2) = -8 + 32 - 19 = 5$ ✓, $P(6) = -72 + 96 - 19 = 5$ ✓
b) Kadangi $P(2) = P(6)$, pagal simetriją ekstremumo taškas $x_e = \frac{2+6}{2} = 4$. Kadangi $a = -2 < 0$, tai ekstremumas yra didžiausia reikšmė: $P_{\max} = P(4) = -32 + 64 - 19 = 13$.
Atsakymas: $P(x) = -2x^2 + 16x - 19$, $x_{\max} = 4$, $P_{\max} = 13$.

29. Šaknys yra p ir q, todėl pagal Vijeto teoremą (ir atvirkštinę): $p + q = -p$ ir $pq = q$.
Antroji lygybė: $pq - q = 0$, $q(p-1) = 0$, todėl $q = 0$ arba $p = 1$.

- $q = 0$: pirmoji lygybė virsta $p = -p$, todėl $p = 0$. Daugianaris x^2, šaknys 0 ir 0 ✓
- $p = 1$: pirmoji lygybė virsta $1 + q = -1$, todėl $q = -2$. Daugianaris $x^2 + x - 2$, šaknys 1 ir -2, t. y. p ir q ✓($1 - 2 = -1 = -p$, $1 \cdot (-2) = -2 = q$).

Atsakymas: x^2 ir $x^2 + x - 2$.

30. a) $(x-a)(x-b) = c^2 \Leftrightarrow x^2 - (a+b)x + ab - c^2 = 0$. Šaknų suma $a+b$, sandauga $ab - c^2$ (Vijeto teorema).
b) Diskriminantas: $D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2 = (a-b)^2 + 4c^2$. Kvadratai neneigiami, todėl $D \geq 0$ ir šaknys visada yra. $D = 0$ tik tada, kai $(a-b)^2 = 0$ ir $c^2 = 0$, t. y. $a = b$ ir $c = 0$ (tada lygtis $(x-a)^2 = 0$).
c) $(x-1)(x-5) = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 - 4 = 0$, $x^2 - 6x + 1 = 0$, $D = 36 - 4 = 32$, $x = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$.
Patikra: suma $6 = a + b$ ✓, sandauga $9 - 8 = 1 = ab - c^2 = 5 - 4$ ✓