Kvadratinis daugianaris

7 tema: Vijeto teorema – 30 užduočių

Jei $D = b^2 - 4ac \geq 0$, tai daugianario $ax^2 + bx + c$ šaknims x_1, x_2: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ (kai $D = 0$: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$). Kai $D < 0$, realiųjų šaknų nėra – teoremos netaikome.
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$, $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$. Ryšys su ekstremumo tašku: $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_e$.

1. Atpažink Kuriems daugianariams galima taikyti Vijeto teoremą? Pirmiausia patikrinkite D, tada nurodykite $x_1 + x_2$ ir x_1x_2.

a) $x^2 - 7x + 10$ **b)** $x^2 + x + 3$ **c)** $2x^2 - 4x + 2$ **d)** $-x^2 + 3x + 4$

2. Apskaičiuok Visų daugianarių $D > 0$. Nerasdami šaknų, apskaičiuokite $x_1 + x_2$ ir x_1x_2.

a) $3x^2 - 12x + 5$ **b)** $-2x^2 + 7x - 3$ **c)** $x^2 - 9$ **d)** $5x^2 + 10x$

3. Lentelė Užpildykite lentelę: šaknis raskite pagal šaknų formulę ir įsitikinkite, kad jų suma ir sandauga sutampa su $-\frac{b}{a}$ ir $\frac{c}{a}$.

daugianaris	D	šaknys	$x_1 + x_2$	x_1x_2	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$x^2 - 8x + 15$						
$2x^2 + 3x - 2$						
$4x^2 - 12x + 9$						

4. Rask klaidą Raskite mokinių klaidas ir parašykite teisingai.

a) $x^2 - 6x + 8$: $D = 36 - 32 = 4 \geq 0$, todėl $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} = -6$, $x_1x_2 = \frac{c}{a} = 8$.
b) $2x^2 + 5x - 3$: $D = 49 \geq 0$, todėl $x_1 + x_2 = -5$, $x_1x_2 = -3$.

5. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Daugianario $x^2 + 4x + 5$ šaknų suma lygi -4.
b) Daugianario $2x^2 - 6x + 1$ šaknų suma lygi 3.
c) Jei $c = 0$, tai viena iš daugianario $ax^2 + bx + c$ šaknų lygi 0.
d) Jei a ir c skirtingų ženklų, tai šaknys egzistuoja ir jų sandauga neigiama.
e) Kai $D = 0$, Vijeto teorema netaikoma, nes šaknis viena.

6. Kita šaknis Įsitikinkite, kad nurodytas skaičius yra šaknis, ir pagal Vijeto teoremą raskite kitą šaknį.

a) $x^2 - 9x + 14$, $x_1 = 2$
b) $2x^2 - 9x + 4$, $x_1 = 4$
c) $3x^2 + x - 2$, $x_1 = -1$
d) $x^2 - 10x + 25$, $x_1 = 5$

7. Simetriniai reiškiniai Daugianario $x^2 - 5x + 3$ šaknys – x_1 ir x_2 (patikrinkite, kad $D > 0$). Nerasdami šaknų, apskaičiuokite:

a) $x_1^2 + x_2^2$ **b)** $(x_1 - x_2)^2$ **c)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ **d)** $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

8. Šaknų ženklai Patikrinkite, kad šaknys realiosios ir skirtingos, ir, jų nerasdami, nustatykite ženklus. Jei ženklai skirtingi – kurios šaknies modulis didesnis?

a) $x^2 - 7x + 10$ **b)** $x^2 + 6x + 8$ **c)** $2x^2 + x - 6$ **d)** $3x^2 - x - 4$

9. Sugretink Kiekvienam daugianariui (visų $D > 0$) parinkite jo šaknų sumą ir sandaugą.

A) $x^2 - 6x + 5$ 1) $x_1 + x_2 = -6;\ x_1x_2 = 5$

B) $5x^2 + 6x + 1$ 2) $x_1 + x_2 = \frac{6}{5};\ x_1x_2 = -\frac{1}{5}$

C) $x^2 + 6x + 5$ 3) $x_1 + x_2 = 6;\ x_1x_2 = 5$

D) $5x^2 - 6x - 1$ 4) $x_1 + x_2 = -\frac{6}{5};\ x_1x_2 = \frac{1}{5}$

10. Parametras Viena daugianario šaknis lygi 2. Įrašę šaknį, raskite parametrą, o tada pagal Vijeto teoremą – kitą šaknį.

a) $x^2 + px + 6$ **b)** $3x^2 - 5x + k$

11. Parametras Raskite parametrą m ir patikrinkite, ar su juo šaknys realiosios.

a) Daugianario $x^2 + (m - 3)x + 4$ šaknų suma lygi 5.
b) Daugianario $mx^2 - 6x + 2$ šaknų sandauga lygi $\frac{1}{2}$.
c) Daugianario $2x^2 + mx - 8$ šaknų suma lygi 3.

12. Vidurys Daugianaris turi realiąsias šaknis. Nenaudodami formulės $x_e = -\frac{b}{2a}$, raskite trūkstamą dydį.

a) Šaknys -3 ir 9. Raskite x_e.
b) Šaknys 4 ir 7. Raskite x_e.
c) $x_e = 5$, viena šaknis 1. Raskite kitą šaknį.
d) $x_e = -2$, viena šaknis 0. Raskite kitą šaknį.

13. Su 1 tema Kvadratinio daugianario $P(x) = 2x^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = 6$ ir $P(1) = 0$. Raskite b ir c. Tada, nerasdami šaknų, apskaičiuokite $x_1 + x_2$ bei x_1x_2 ir pagal Vijeto teoremą raskite kitą šaknį (viena šaknis lygi 1).

14. Su 2 tema Atskliauskite ir, patikrinę D, raskite šaknų sumą ir sandaugą.

a) $(x - 3)^2 - 4$ **b)** $2(x + 1)^2 - 8$ **c)** $-(x - 2)^2 + 9$

15. Su 3 ir 4 temomis Daugianario $P(x) = 2x^2 - 8x + c$ ekstremumas $P_e = -6$. Raskite c, patikrinkite D ir apskaičiuokite $x_1 + x_2$ bei x_1x_2. Palyginkite $\frac{x_1+x_2}{2}$ su ekstremumo tašku x_e.

16. Ar egzistuoja? Ar egzistuoja c, su kuriuo daugianario $x^2 - 6x + c$ šaknų sandauga lygi:

a) 10 **b)** 8 **c)** 9

Jei taip – nurodykite šaknis.

17. Su 5 tema Kvadratinio daugianario $P(x) = 2x^2 + bx + c$ reikšmės tenkina $P(1) = P(5)$ ir $P(0) = 10$. Raskite b ir c, patikrinkite D ir, nerasdami šaknų, apskaičiuokite $x_1 + x_2$ ir x_1x_2.

18. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus daugianarius, kurių šaknų suma lygi 5, o sandauga – 6. Apskaičiuokite jų D ir įsitikinkite, kad šaknys tikrai realiosios.

19. Be šaknų Daugianario $x^2 - 6x + 4$ šaknys – x_1 ir x_2. Nerasdami jų, apskaičiuokite:

a) $x_1^2 + x_2^2$ **b)** $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ **c)** $x_1^3 + x_2^3$ **d)** $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

20. Iššūkis Įrodykite: jei $D \geq 0$, tai $(x_1 - x_2)^2 = \dfrac{D}{a^2}$. Pritaikykite daugianariui $2x^2 - 7x + 3$ ir patikrinkite, radę šaknis pagal formulę.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Iššūkis Duotas daugianaris $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

a) Įrodykite: jei $a + b + c = 0$, tai $D \geq 0$, o šaknys yra 1 ir $\frac{c}{a}$.

b) Įrodykite: jei $a - b + c = 0$, tai -1 yra šaknis, o kita šaknis lygi $-\frac{c}{a}$.

c) Nenaudodami šaknų formulės, raskite visas daugianarių $13x^2 - 8x - 5$ ir $5x^2 + 12x + 7$ šaknis.

22. Parametras Daugianario $x^2 - mx + m + 6$ realiųjų šaknų kvadratų suma lygi 12. Raskite m. Nepamirškite patikrinti, ar su rastomis m reikšmėmis šaknys tikrai yra.

23. Simetrija ir skirtumas Daugianario $P(x) = x^2 + bx + c$ reikšmės tenkina $P(1) = P(9)$, o dvi jo realiosios šaknys skiriasi 6 vienetais (t. y. $|x_1 - x_2| = 6$). Raskite $P(x)$ ir jo šaknis.

24. Priešingos šaknys Su kuriomis m reikšmėmis daugianario $x^2 + (m^2 - 9)x + m - 1$ šaknys realiosios ir viena kitai priešingos (t. y. $x_2 = -x_1$)? Kokios tada šaknys?

25. Iš sąlygų Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ realiųjų šaknų suma lygi 4, jų kvadratų suma – 10, o $P(0) = -3$. Raskite $P(x)$ ir patikrinkite visas sąlygas.

26. Gudriai Daugianario $x^2 - 4x + 1$ šaknys – x_1 ir x_2. Nerasdami šaknų, apskaičiuokite:

a) $x_1^4 + x_2^4$;

b) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ (pirmiausia pagrįskite, kad šaknys teigiamos).

27. Įrodykite ir pritaikykite

a) Įrodykite: jei daugianario $ax^2 + bx + c$ šaknys realiosios ir viena šaknis lygi kitai, padaugintai iš 2, tai $2b^2 = 9ac$.

b) Su kuriomis b reikšmėmis daugianario $x^2 + bx + 8$ viena šaknis lygi kitai, padaugintai iš 2? Kokios tada šaknys?

28. Su 2 tema Daugianaris užrašytas pavidalu $P(x) = a(x - h)^2 + k$ ir turi realiąsias šaknis. Įrodykite, kad $x_1 + x_2 = 2h$ ir $x_1 x_2 = h^2 + \frac{k}{a}$. Remdamiesi tuo, nenaudodami šaknų formulės, raskite abiejų daugianarių šaknis:

a) $3(x - 2)^2 - 12$ **b)** $-2(x + 1)^2 + 8$

29. Dvi galimybės Daugianario $x^2 + bx + 12$ realiųjų šaknų kvadratų suma lygi 25. Raskite b, užrašykite abu daugianarius ir jų šaknis.

30. Mažiausia reikšmė Duotas daugianaris $x^2 - (m - 2)x - m$.

a) Įrodykite, kad su kiekvienu m šaknys realiosios.

b) Išreikškite šaknų kvadratų sumą $x_1^2 + x_2^2$ per m ir raskite, su kuriuo m ji mažiausia. Kokia jos mažiausia reikšmė?

Atsakymai

1. a) $D = 9$; 7; 10. b) $D = -11 < 0$: ne. c) $D = 0$; 2; 1. d) $D = 25$; 3; -4.

2. a) 4; $\frac{5}{3}$. b) $\frac{7}{2}$; $\frac{3}{2}$. c) 0; -9. d) -2; 0.

3. I: $D = 4$; 3 ir 5; 8; 15; 8; 15. II: $D = 25$; $\frac{1}{2}$ ir -2; $-\frac{3}{2}$; -1; $-\frac{3}{2}$; -1. III: $D = 0$; $\frac{3}{2}$; 3; $\frac{9}{4}$; 3; $\frac{9}{4}$.

4. a) $x_1 + x_2 = 6$; $x_1x_2 = 8$. b) $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$; $x_1x_2 = -\frac{3}{2}$.

5. a) K. b) T. c) T. d) T. e) K.

6. a) 7. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{2}{3}$. d) 5 (dviguboji šaknis).

7. a) 19. b) 13. c) $\frac{5}{3}$. d) 9.

8. a) abi teigiamos. b) abi neigiamos. c) skirtingų ženklų, didesnio modulio – neigiama. d) skirtingų ženklų, didesnio modulio – teigiama.

9. A–3, B–4, C–1, D–2.

10. a) $p = -5$; kita šaknis 3. b) $k = -2$; kita šaknis $-\frac{1}{3}$.

11. a) $m = -2$. b) $m = 4$. c) $m = -6$.

12. a) 3. b) $\frac{11}{2}$. c) 9. d) -4.

13. $b = -8$, $c = 6$; $x_1 + x_2 = 4$; $x_1x_2 = 3$; kita šaknis 3.

14. a) 6; 5. b) -2; -3. c) 4; -5.

15. $c = 2$; $D = 48 > 0$; $x_1 + x_2 = 4$; $x_1x_2 = 1$; $\frac{x_1+x_2}{2} = 2 = x_e$.

16. a) Ne ($D = -4 < 0$). b) Taip, $c = 8$; šaknys 2 ir 4. c) Taip, $c = 9$; šaknis 3 (dviguboji).

17. $b = -12$, $c = 10$; $D = 64 > 0$; $x_1 + x_2 = 6$; $x_1x_2 = 5$.

18. Pvz. $x^2 - 5x + 6$ ($D = 1$) ir $2x^2 - 10x + 12$ ($D = 4$).

19. a) 28. b) 24. c) 144. d) 7.

20. Įrodymas – žr. sprendimus. $|x_1 - x_2| = \frac{5}{2}$.

21. a), b) Įrodymas – žr. sprendimus. c) 1 ir $-\frac{5}{13}$; -1 ir $-\frac{7}{5}$.

22. $m = -4$ ($m = 6$ netinka, nes tada $D < 0$).

23. $P(x) = x^2 - 10x + 16$; šaknys 2 ir 8.

24. $m = -3$; šaknys 2 ir -2 ($m = 3$ netinka).

25. $P(x) = -x^2 + 4x - 3$.

26. a) 194. b) $\sqrt{6}$.

27. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $b = \pm 6$; $b = 6$: šaknys -2 ir -4; $b = -6$: šaknys 2 ir 4.

28. Įrodymas – žr. sprendimus. a) šaknys 0 ir 4. b) šaknys -3 ir 1.

29. $b = -7$: $x^2 - 7x + 12$, šaknys 3 ir 4. $b = 7$: $x^2 + 7x + 12$, šaknys -3 ir -4.

30. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $m = 1$; mažiausia reikšmė 3.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. a) Įrašykite $x = 1$ ir panaudokite $a + b + c = 0$. Į diskriminanto reiškinį įrašykite $b = -(a + c)$. b) Taip pat, tik su $x = -1$. c) Patikrinkite, kuri iš dviejų sąlygų ($a + b + c$ ar $a - b + c$) tinka.

22. Kvadratų suma: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Gausite lygtį su m – išspręskite ją išskirdami pilnąjį kvadratą. Tada patikrinkite D.

23. Iš $P(1) = P(9)$ raskite x_e, o iš jo – b. Tada $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.

24. Šaknys priešingos, kai $x_1 + x_2 = 0$. Su gauta m reikšme dar turi būti $D \geq 0$.

25. Iš $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$ raskite x_1x_2. Tada iš $\frac{c}{a}$ ir $P(0)$ raskite a.

26. a) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$. b) Apskaičiuokite $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$.

27. Pažymėkite šaknis x_1 ir $2x_1$. Užrašykite Vijeto formules ir iš pirmosios išreikškite x_1 per a ir b.

28. Atskliauskite $a(x - h)^2 + k$ ir raskite b bei c per a, h, k.

29. $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$. Suma gali būti teigiama arba neigiama. Patikrinkite D.

30. a) Apskaičiuokite $D = b^2 - 4ac$. b) Kvadratų sumą išreikškite parametru m ir išskirkite pilnąjį kvadratą (3 tema).

Sprendimai (21–30)

21. a) Jei $a+b+c=0$, tai $b=-(a+c)$, todėl

$$D=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geq 0,$$

taigi šaknys realiosios. Be to, $P(1)=a+b+c=0$, vadinasi, 1 yra šaknis. Pagal sandaugos formulę $1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, todėl $x_2=\frac{c}{a}$.
b) Jei $a-b+c=0$, tai $P(-1)=a-b+c=0$, taigi -1 yra šaknis (analogiškai $D=(a+c)^2-4ac\geq 0$, nes $b=a+c$). Iš $x_1x_2=\frac{c}{a}$: $-x_2=\frac{c}{a}$, todėl $x_2=-\frac{c}{a}$.
c) $13x^2-8x-5$: $13-8-5=0$, todėl šaknys 1 ir $\frac{-5}{13}$. $5x^2+12x+7$: $5-12+7=0$, todėl šaknys -1 ir $-\frac{7}{5}$.
Patikra (sumos): $1-\frac{5}{13}=\frac{8}{13}=-\frac{-8}{13}$ ✓; $-1-\frac{7}{5}=-\frac{12}{5}$ ✓

22. Pagal Vijeto teoremą (galioja, kai $D\geq 0$ – tai patikrinsime pabaigoje): $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=m+6$. Tada

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2(m+6)=m^2-2m-12.$$

Gauname lygtį $m^2-2m-12=12$, t. y. $m^2-2m-24=0$. Išskiriame pilnąjį kvadratą: $(m-1)^2=25$, taigi $m=6$ arba $m=-4$.
Tikriname $D=m^2-4(m+6)=m^2-4m-24$:

- $m=6$: $D=36-24-24=-12<0$ – šaknų nėra, netinka;
- $m=-4$: $D=16+16-24=8>0$ ✓

Atsakymas: $m=-4$. Patikra: x^2+4x+2, $x_1+x_2=-4$, $x_1x_2=2$, kvadratų suma $16-4=12$ ✓

23. Iš $P(1)=P(9)$ pagal simetriją (5 tema) $x_e=\frac{1+9}{2}=5$. Kadangi $a=1$, tai $x_e=-\frac{b}{2}$, todėl $b=-10$. Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2=10$, $x_1x_2=c$. Tada

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=100-4c=6^2=36\ \Rightarrow\ c=16.$$

Daugianaris $x^2-10x+16$: $D=100-64=36>0$ ✓, šaknys $\frac{10\pm 6}{2}$, t. y. 2 ir 8.
Atsakymas: $P(x)=x^2-10x+16$, šaknys 2 ir 8. Patikra: $P(1)=7=P(9)$ ✓, $8-2=6$ ✓

24. Šaknys priešingos tada ir tik tada, kai $x_1+x_2=0$ (ir $D\geq 0$). Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2=-(m^2-9)=0$, taigi $m^2=9$, $m=3$ arba $m=-3$. Dabar tikriname $D=(m^2-9)^2-4(m-1)=-4(m-1)$:

- $m=3$: $D=-8<0$ – šaknų nėra, netinka;
- $m=-3$: $D=16>0$ ✓

Kai $m=-3$, gauname daugianarį x^2-4; jo šaknys 2 ir -2.
Atsakymas: $m=-3$; šaknys 2 ir -2. Patikra: $2+(-2)=0$ ✓

25. Žinome, kad $x_1+x_2=4$ ir $x_1^2+x_2^2=10$. Iš $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$: $16=10+2x_1x_2$, todėl $x_1x_2=3$. Pagal Vijeto teoremą

$$-\frac{b}{a}=4,\qquad \frac{c}{a}=3.$$

Be to, $P(0)=c=-3$, todėl $a=\frac{c}{3}=-1$, o $b=-4a=4$. Taigi $P(x)=-x^2+4x-3$.
Patikra: $D=16-12=4>0$; $x_1+x_2=-\frac{4}{-1}=4$ ✓, $x_1x_2=\frac{-3}{-1}=3$ ✓, šaknys 1 ir 3, kvadratų suma $1+9=10$ ✓
Atsakymas: $P(x)=-x^2+4x-3$.

26. Pirmiausia $D=16-4=12>0$, todėl galima taikyti Vijeto teoremą: $x_1+x_2=4$, $x_1x_2=1$.
a) $x_1^2+x_2^2=4^2-2\cdot 1=14$. Tada

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2=14^2-2\cdot 1=194.$$

b) Sandauga $1>0$, todėl šaknys vienodo ženklo; suma $4>0$, todėl abi teigiamos ir reiškiniai $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ apibrėžti. Tada

$$(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=4+2\cdot 1=6.$$

Kadangi $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$, tai $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{6}$.
Atsakymas: a) 194; b) $\sqrt{6}$. Patikra: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}\approx 3{,}732;\ 0{,}268$, $1{,}932+0{,}518\approx 2{,}449\approx\sqrt{6}$ ✓

27. a) Pažymėkime šaknis x_1 ir $2x_1$. Pagal Vijeto teoremą

$$x_1 + 2x_1 = 3x_1 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot 2x_1 = 2x_1^2 = \frac{c}{a}.$$

Iš pirmosios $x_1 = -\frac{b}{3a}$. Įrašome į antrąją: $2 \cdot \frac{b^2}{9a^2} = \frac{c}{a}$, padauginame iš $9a^2$ ir gauname $2b^2 = 9ac$.
b) Čia $a = 1$, $c = 8$: $2b^2 = 72$, $b^2 = 36$, $b = \pm 6$. Tikriname $D = 36 - 32 = 4 > 0$ ✓ $b = 6$: šaknų suma -6, šaknys -2 ir -4 ($-4 = 2 \cdot (-2)$). $b = -6$: šaknys 2 ir 4.
Atsakymas: $b = \pm 6$.

28. Atskliauskime: $P(x) = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$, todėl $b = -2ah$, $c = ah^2 + k$. Pagal Vijeto teoremą

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2h, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = h^2 + \frac{k}{a}.$$

(Taigi $\frac{x_1+x_2}{2} = h = x_e$ – vėl matome ryšį su ekstremumo tašku.)
a) $a = 3$, $h = 2$, $k = -12$: $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = 4 - 4 = 0$. Sandauga 0 – viena šaknis 0, kita 4.
b) $a = -2$, $h = -1$, $k = 8$: $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 x_2 = 1 - 4 = -3$. Šaknys 1 ir -3 (suma -2, sandauga -3).
Patikra: $P(1) = -2 \cdot 4 + 8 = 0$ ✓, $P(-3) = -2 \cdot 4 + 8 = 0$ ✓.
Atsakymas: a) 0 ir 4; b) -3 ir 1.

29. Pagal Vijeto teoremą $x_1 x_2 = 12$. Tada

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 25 + 24 = 49,$$

taigi $x_1 + x_2 = 7$ arba $x_1 + x_2 = -7$. Kadangi $x_1 + x_2 = -b$, tai $b = -7$ arba $b = 7$.
Tikriname $D = b^2 - 48 = 49 - 48 = 1 > 0$ abiem atvejais ✓
$b = -7$: $x^2 - 7x + 12$, šaknys $\frac{7 \pm 1}{2}$, t. y. 3 ir 4. $b = 7$: $x^2 + 7x + 12$, šaknys -3 ir -4.
Patikra: $9 + 16 = 25$ ✓abiem atvejais.
Atsakymas: $b = \pm 7$.

30. a) Su visais m: $x_1 x_2 = -m$, $x_1 + x_2 = m - 2$. Tada

$$D = (m-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = m^2 - 4m + 4 + 4m = m^2 + 4.$$

Kadangi $m^2 \geq 0$, tai $D = m^2 + 4 \geq 4 > 0$ su kiekvienu m, taigi daugianaris visada turi dvi skirtingas realiąsias šaknis.
b) $x_1^2 + x_2^2 = (m-2)^2 - 2(-m) = m^2 - 4m + 4 + 2m = m^2 - 2m + 4$. Išskiriame pilnąjį kvadratą:

$$x_1^2 + x_2^2 = (m-1)^2 + 3.$$

Kadangi $(m-1)^2 \geq 0$, tai $x_1^2 + x_2^2 \geq 3$, o lygybė pasiekiama, kai $m = 1$.
Atsakymas: mažiausia reikšmė 3, kai $m = 1$. Patikra: $m = 1$: $x^2 + x - 1$, $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -1$, kvadratų suma $1 + 2 = 3$ ✓