Kvadratinis daugianaris

6 tema: kvadratinio daugianario šaknys – 30 užduočių

Skaičius r yra **šaknis**, jei $P(r) = 0$. Kai $b = 0$: $x^2 = -\frac{c}{a}$. Kai $c = 0$: $x(ax + b) = 0$. Bendru atveju: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$. $D > 0$ – dvi šaknys; $D = 0$ – viena šaknis $x = -\frac{b}{2a}$; $D < 0$ – realiųjų šaknų nėra.

1. Atpažink Ar nurodytas skaičius yra daugianario šaknis? Patikrinkite įrašydami.

a) $x^2 - 2x - 3,\ r = 3$
b) $x^2 - 2x - 3,\ r = -1$
c) $x^2 - 2x - 3,\ r = 1$
d) $2x^2 + x - 6,\ r = \frac{3}{2}$
e) $2x^2 + x - 6,\ r = -2$
f) $2x^2 + x - 6,\ r = 2$

2. Kai $b = 0$ Raskite šaknis arba pagrįskite, kad jų nėra. Pirmiausia išreikškite x^2.

a) $x^2 - 49$
b) $3x^2 - 75$
c) $4x^2 + 1$
d) $9x^2 - 16$
e) $-2x^2 + 18$
f) $5x^2$

3. Kai $c = 0$ Iškelkite x prieš skliaustus ir raskite šaknis.

a) $x^2 - 7x$
b) $3x^2 + 6x$
c) $-2x^2 + 8x$
d) $4x^2 - x$

4. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite (klaidingam teiginiui pateikite pavyzdį).

a) Jei $P(r) = 0$, tai r yra daugianario P šaknis.
b) Skaičius -3 yra daugianario $x^2 + 9$ šaknis.
c) Kiekvienas daugianaris $ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) turi šaknį 0.
d) Jei $P(0) \neq 0$, tai daugianaris P šaknų neturi.
e) Daugianaris $3x^2 + 5$ turi dvi šaknis.
f) Jei skaičius r yra daugianario šaknis, tai ir $-r$ yra jo šaknis.

5. Rask klaidą Mokinys sprendžia: $5x^2 = 20x \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$, ir teigia, kad 4 yra vienintelė daugianario $5x^2 - 20x$ šaknis. Kur klaida? Raskite visas šaknis.

6. Rask klaidą Mokinys ieško daugianario $x^2 - 6x + 5$ šaknų pagal formulę:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16, \qquad x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -5.$$

Patikrinkite įrašydami, raskite klaidą ir pataisykite.

7. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite jo šaknis dešinėje.

A) $x^2 - 6x + 9$
B) $x^2 - 6x + 8$
C) $x^2 - 6x + 10$
D) $x^2 - 6x$

1) šaknys 2 ir 4
2) šaknų nėra
3) viena šaknis 3
4) šaknys 0 ir 6

8. Šaknų formulė Apskaičiuokite D ir raskite šaknis.

a) $x^2 - 7x + 10$
b) $2x^2 + 3x - 2$
c) $3x^2 - 2x - 1$
d) $-x^2 + 4x + 5$

9. Kiek šaknų? Šaknų neieškodami, pagal D nustatykite, kiek jų turi daugianaris.

a) $x^2 - 5x + 7$
b) $4x^2 - 12x + 9$
c) $2x^2 + x - 3$
d) $-x^2 + 2x - 5$

10. Koeficientai iš šaknų Raskite b ir c (sudarykite lygčių sistemą iš sąlygų $P(r) = 0$), jei:

a) daugianario $x^2 + bx + c$ šaknys yra 2 ir 5;
b) daugianario $2x^2 + bx + c$ šaknys yra 1 ir -3.

11. Parametras Raskite parametro reikšmę, su kuria:

a) skaičius 3 yra daugianario $x^2 + px - 12$ šaknis;
b) skaičius 2 yra daugianario $2x^2 - 5x + q$ šaknis.

b) dalyje raskite ir antrąją šaknį.

12. Išskirk ir išspręsk Išskirkite pilnąjį kvadratą, perkelkite laisvąjį narį ir raskite šaknis (arba pagrįskite, kad jų nėra).

a) $x^2 - 8x + 7$
b) $x^2 + 6x + 10$
c) $2x^2 - 4x - 6$
d) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$

13. Tekstinis Stačiakampio formos sodo ilgis 5 m didesnis už plotį, o plotas lygus 24 m^2. Raskite sodo matmenis. Kodėl vienas iš gautų sprendinių netinka?

14. Lentelė Duotas daugianaris $x^2 - 4x + c$. Užpildykite lentelę.

c	D	šaknų skaičius	šaknys
0			
3			
4			
5			

15. Neatskliausk! Daugianariai jau užrašyti pilnojo kvadrato pavidalu. Neatskliausdami raskite jų šaknis (arba pagrįskite, kad jų nėra).

a) $3(x - 2)^2 - 12$
b) $-2(x + 1)^2 + 8$
c) $(x - 5)^2 + 4$
d) $5(x + 3)^2$

16. Ekstremumas ir šaknys Raskite ekstremumo tašką x_e ir ekstremumą, o remdamiesi jais pagrįskite, kiek šaknų turi daugianaris.

a) $x^2 - 6x + 12$ **b)** $-2x^2 + 4x - 5$ **c)** $3x^2 - 12x + 12$

17. Simetrija Žinoma, kad dvi daugianario šaknys simetriškos ekstremumo taško x_e atžvilgiu.

a) Daugianario $x^2 + bx + c$ šaknys yra 1 ir 7. Raskite x_e, b ir c.
b) Daugianaris $x^2 - 6x + c$ turi šaknį 1. Raskite c, o antrąją šaknį – pasinaudodami simetrija.

18. Sugalvok pats Sugalvokite po vieną kvadratinį daugianarį, kuris

a) turi šaknis 3 ir -3;
b) turi vienintelę šaknį 5 ir $b \neq 0$;
c) neturi realiųjų šaknų.

Kiekvienam apskaičiuokite D ir patikrinkite.

19. Gudriai Pažymėję $t = x^2$, išspręskite lygtis.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + x^2 - 6 = 0$

20. Iššūkis Įrodykite: jei $D > 0$, tai daugianario $ax^2 + bx + c$ šaknų x_1 ir x_2 vidurkis lygus ekstremumo taškui x_e. Patikrinkite su daugianariu $2x^2 - 8x + 6$.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis daugianaris $x^2 + mx + m + 3$ turi vienintelę šaknį? Raskite tą šaknį kiekvienu atveju.

22. Šaknys ir simetrija Daugianaris $P(x) = ax^2 + bx + c$ turi šaknis -1 ir 7, o $P(0) = -14$. Raskite a, b, c.

23. Šaknų atstumas Daugianario $2x^2 - 12x + c$ didesniosios ir mažesniosios šaknų skirtumas lygus 4. Raskite c ir abi šaknis.

24. Be šaknų radimo Įrodykite: jei a ir c yra skirtingų ženklų, tai daugianaris $ax^2 + bx + c$ turi dvi skirtingas šaknis (su bet kuriuo b). Ar teisingas atvirkščias teiginys? Pateikite pavyzdį.

25. Ekstremumas ir šaknis Mažiausia daugianario $x^2 + bx + c$ reikšmė lygi -4, o viena jo šaknis – 5. Raskite visus tokius daugianarius ir jų šaknis.

26. Sveikasis skaičius Įrodykite: jei b ir c – sveikieji skaičiai ir daugianaris $x^2 + bx + c$ turi vienintelę šaknį, tai ta šaknis – sveikasis skaičius.

27. Viena šaknis Daugianaris $P(x) = ax^2 + bx + c$ turi vienintelę šaknį 4, o $P(0) = 48$. Raskite a, b, c.

28. Gudriai Išspręskite lygtį, pažymėję $t = x^2 - 2x$: $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$.

29. Tekstinis Stačiakampio kraštinės skiriasi 3 cm, o jo įstrižainė lygi 15 cm. Raskite kraštines.

30. Su visais m Įrodykite:

a) su kiekvienu realiuoju m daugianaris $x^2 + mx - 1$ turi dvi skirtingas šaknis;

b) jokiam realiajam m daugianaris $x^2 + mx + m^2 + 1$ neturi šaknų.

Atsakymai

1. a) taip; b) taip; c) ne; d) taip; e) taip; f) ne.

2. a) ± 7. b) ± 5. c) šaknų nėra. d) $\pm\frac{4}{3}$. e) ± 3. f) 0.

3. a) 0; 7. b) 0; -2. c) 0; 4. d) 0; $\frac{1}{4}$.

4. a) T. b) K. c) T. d) K. e) K. f) K.

5. Prarasta šaknis 0. Šaknys: 0 ir 4.

6. Klaida ženkle: turi būti $\frac{6\pm 4}{2}$. Šaknys: 1 ir 5.

7. A–3, B–1, C–2, D–4.

8. a) $D = 9$; 2 ir 5. b) $D = 25$; $\frac{1}{2}$ ir -2. c) $D = 16$; 1 ir $-\frac{1}{3}$. d) $D = 36$; -1 ir 5.

9. a) $D = -3$, nėra. b) $D = 0$, viena. c) $D = 25$, dvi. d) $D = -16$, nėra.

10. a) $b = -7$, $c = 10$. b) $b = 4$, $c = -6$.

11. a) $p = 1$. b) $q = 2$; antroji šaknis $\frac{1}{2}$.

12. a) 1; 7. b) nėra. c) -1; 3. d) $-\frac{3}{2}$.

13. Plotis 3 m, ilgis 8 m (sprendinys -8 netinka, nes plotis turi būti teigiamas).

14. $c = 0$: $D = 16$, dvi, 0 ir 4. $c = 3$: $D = 4$, dvi, 1 ir 3. $c = 4$: $D = 0$, viena, 2. $c = 5$: $D = -4$, nėra.

15. a) 0; 4. b) 1; -3. c) nėra. d) -3.

16. a) $x_\mathrm{e} = 3$, $P_\mathrm{min} = 3$, šaknų nėra. b) $x_\mathrm{e} = 1$, $P_\mathrm{max} = -3$, šaknų nėra. c) $x_\mathrm{e} = 2$, $P_\mathrm{min} = 0$, viena šaknis 2.

17. a) $x_\mathrm{e} = 4$, $b = -8$, $c = 7$. b) $c = 5$; antroji šaknis 5.

18. Pvz. a) $x^2 - 9$, $D = 36$. b) $x^2 - 10x + 25$, $D = 0$. c) $x^2 + 1$, $D = -4$.

19. a) ± 1; ± 2. b) $x = \pm\sqrt{2}$.

20. $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = x_\mathrm{e}$; pavyzdyje $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_\mathrm{e} = 2$.

21. $m = 6$: šaknis -3; $m = -2$: šaknis 1.

22. $a = 2$, $b = -12$, $c = -14$.

23. $c = 10$; šaknys 1 ir 5.

24. Įrodymas – žr. sprendimus. Atvirkščias teiginys neteisingas, pvz. $x^2 - 5x + 6$.

25. $x^2 - 6x + 5$ (šaknys 1; 5) ir $x^2 - 14x + 45$ (šaknys 5; 9).

26. Įrodymas – žr. sprendimus.

27. $a = 3$, $b = -24$, $c = 48$.

28. $x = -1$; 1; 3.

29. 9 cm ir 12 cm.

30. Įrodymas – žr. sprendimus.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Kad šaknis būtų viena, reikia $D = 0$. Išreiškę D per m, gausite lygtį su m – spręskite ją išskirdami pilnąjį kvadratą.

22. Šaknys -1 ir 7 simetriškos x_e atžvilgiu: kam lygus x_e? Tada užrašykite $P(x) = a(x - x_\mathrm{e})^2 + k$ ir pasinaudokite lygybėmis $P(-1) = 0$ bei $P(0) = -14$.

23. Šaknys – $x_\mathrm{e} - s$ ir $x_\mathrm{e} + s$. Kam tada lygus s? Iš lygties $P(x) = 0$ išreikškite $(x - 3)^2$.

24. Kaip $-4ac$ ženklas susijęs su skirtingais a ir c ženklais? Prisiminkite, kad $b^2 \geq 0$. Atvirkščiam teiginiui ieškokite pavyzdžio su dviem šaknimis ir vienodų ženklų a, c.

25. Daugianarį galima užrašyti pavidalu $(x - h)^2 + k$ (kodėl $a = 1$ ir kam lygus k?). Įrašykite $x = 5$ ir išspręskite lygtį su h.

26. Vienintelė šaknis reiškia, kad $D = 0$, t. y. $b^2 = 4c$. Ar nelyginio skaičiaus kvadratas gali būti lyginis?

27. Jei šaknis vienintelė, tai $D = 0$, o šaknis $x = -\frac{b}{2a}$. Kaip tada atrodo $P(x)$, užrašytas pilnojo kvadrato pavidalu?

28. Kai $t = x^2 - 2x$, lygtis tampa kvadratine kintamojo t atžvilgiu. Radę t, grįžkite prie x.

29. Pažymėkite mažesniąją kraštinę x. Kokia kita kraštinė? Pritaikykite Pitagoro teoremą.

30. Apskaičiuokite D kiekvienu atveju. Koks m^2 ženklas? Kuriuo atveju D visada teigiamas, o kuriuo – visada neigiamas?

Sprendimai (21–30)

21. Šaknis vienintelė, kai $D = 0$. Čia $a = 1$, $b = m$, $c = m + 3$:

$$D = m^2 - 4(m + 3) = m^2 - 4m - 12 = 0.$$

Išskiriame pilnąjį kvadratą: $(m-2)^2 - 4 - 12 = 0$, $(m-2)^2 = 16$, $m - 2 = \pm 4$, todėl $m = 6$ arba $m = -2$. Šaknis $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2}$: $m = 6$: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$, šaknis -3; $m = -2$: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, šaknis 1.
Atsakymas: $m = 6$, šaknis -3; $m = -2$, šaknis 1. Patikra: $9 - 18 + 9 = 0$ ✓, $1 - 2 + 1 = 0$ ✓

22. Šaknys -1 ir 7 simetriškos x_e atžvilgiu (5 tema), todėl $x_\text{e} = \frac{-1+7}{2} = 3$. Taigi $P(x) = a(x-3)^2 + k$. Iš sąlygų:

$$P(-1) = 16a + k = 0, \qquad P(0) = 9a + k = -14.$$

Atėmę lygybes: $7a = 14$, $a = 2$; tada $k = -32$. Atskliaudžiame:

$$P(x) = 2(x-3)^2 - 32 = 2x^2 - 12x + 18 - 32 = 2x^2 - 12x - 14.$$

Atsakymas: $a = 2$, $b = -12$, $c = -14$. Patikra: $P(7) = 98 - 84 - 14 = 0$ ✓, $P(-1) = 2 + 12 - 14 = 0$ ✓

23. Čia $a = 2$, $b = -12$, todėl $x_\text{e} = -\frac{-12}{4} = 3$. Išskiriame pilnąjį kvadratą: $2x^2 - 12x + c = 2(x-3)^2 - 18 + c$. Lygtis $P(x) = 0$: $2(x-3)^2 = 18 - c$, $(x-3)^2 = 9 - \frac{c}{2}$. Pažymėkime $s^2 = 9 - \frac{c}{2}$, kur $s > 0$ (šaknys dvi). Tada $x = 3 \pm s$, o jų skirtumas lygus $2s = 4$, todėl $s = 2$. Tuomet $9 - \frac{c}{2} = 4$, $c = 10$. Šaknys: 3 ± 2, t. y. 1 ir 5.
Atsakymas: $c = 10$; šaknys 1 ir 5. Patikra: $D = 144 - 80 = 64$, $x = \frac{12 \pm 8}{4} - 5$ ir 1 ✓

24. Kadangi a ir c yra skirtingų ženklų, sandauga ac neigiama, todėl $-4ac > 0$. Tada $D = b^2 - 4ac$ yra neneigiamo skaičiaus b^2 ir teigiamo skaičiaus suma, todėl $D > 0$. Kai $D > 0$, daugianaris turi dvi skirtingas šaknis.
Atvirkščias teiginys: jei šaknys dvi, tai a ir c būtinai skirtingų ženklų – **neteisinga**. Pavyzdys: $x^2 - 5x + 6$ ($a = 1$, $c = 6$ vienodų ženklų): $D = 25 - 24 = 1 > 0$, šaknys 2 ir 3.

25. Kadangi vyriausiasis koeficientas lygus 1, o mažiausia reikšmė lygi -4, tai $P(x) = (x-h)^2 - 4$ (3 tema). Šaknis 5: $(5-h)^2 - 4 = 0$, $(5-h)^2 = 4$, $5 - h = \pm 2$, todėl $h = 3$ arba $h = 7$.

- $h = 3$: $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5$. Šaknys: $(x-3)^2 = 4$, $x = 1$ arba $x = 5$.
- $h = 7$: $(x-7)^2 - 4 = x^2 - 14x + 45$. Šaknys: $(x-7)^2 = 4$, $x = 5$ arba $x = 9$.

Atsakymas: $x^2 - 6x + 5$ (šaknys 1; 5) ir $x^2 - 14x + 45$ (šaknys 5; 9). Patikra: $25 - 30 + 5 = 0$ ✓, $25 - 70 + 45 = 0$ ✓

26. Šaknis vienintelė, kai $D = 0$: $b^2 - 4c = 0$, $b^2 = 4c$. Todėl b^2 lyginis (dalijasi iš 4). Jei b būtų nelyginis, tai ir b^2 būtų nelyginis (nelyginių sandauga nelyginė) – prieštara. Vadinasi, b lyginis: $b = 2k$, kur k – sveikasis skaičius. Vienintelė šaknis $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2k}{2} = -k$ – sveikasis skaičius. (Be to, $c = \frac{b^2}{4} = k^2$.)
Pavyzdys: $b = -6$, $c = 9$: $x^2 - 6x + 9$, šaknis 3 ✓

27. Kadangi šaknis vienintelė, $D = 0$, todėl $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ir šaknis yra $-\frac{b}{2a} = 4$. Todėl $P(x) = a(x-4)^2$. Iš $P(0) = 48$: $a \cdot 16 = 48$, $a = 3$. Atskliaudžiame: $3(x-4)^2 = 3(x^2 - 8x + 16) = 3x^2 - 24x + 48$.
Atsakymas: $a = 3$, $b = -24$, $c = 48$. Patikra: $D = 576 - 576 = 0$ ✓, $P(4) = 48 - 96 + 48 = 0$ ✓

28. Pažymėję $t = x^2 - 2x$, gauname $t^2 - 2t - 3 = 0$. $D = 4 + 12 = 16$, $t = \frac{2 \pm 4}{2}$: $t = 3$ arba $t = -1$.

- $x^2 - 2x = 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $D = 16$, $x = \frac{2 \pm 4}{2}$: $x = 3$ arba $x = -1$.
- $x^2 - 2x = -1$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$: $x = 1$.

Atsakymas: $x = -1; 1; 3$. Patikra: $x = 1$: $t = -1$, $1 + 2 - 3 = 0$ ✓; $x = 3$: $t = 3$, $9 - 6 - 3 = 0$ ✓

29. Tarkime, mažesnioji kraštinė lygi x cm, tada didesnioji – $(x+3)$ cm. Pagal Pitagoro teoremą: $x^2 + (x+3)^2 = 15^2$, $2x^2 + 6x + 9 = 225$, $2x^2 + 6x - 216 = 0$, $x^2 + 3x - 108 = 0$. $D = 9 + 432 = 441 = 21^2$, $x = \frac{-3 \pm 21}{2}$: $x = 9$ arba $x = -12$. Kraštinės ilgis teigiamas, todėl $x = 9$.
Atsakymas: 9 cm ir 12 cm. Patikra: $81 + 144 = 225 = 15^2$ ✓

30. a) $D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = m^2 + 4$. Kadangi $m^2 \geq 0$ (3 tema), tai $D \geq 4 > 0$ su kiekvienu m. Todėl visada yra dvi skirtingos šaknys.
b) $D = m^2 - 4(m^2 + 1) = -3m^2 - 4$. Kadangi $m^2 \geq 0$, tai $-3m^2 \leq 0$ ir $D \leq -4 < 0$ su kiekvienu m. Todėl realiųjų šaknų niekada nėra.
Patikra: $m = 0$: a) $x^2 - 1$, šaknys ± 1 ✓; b) $x^2 + 1$, šaknų nėra ✓