Kvadratinis daugianaris

5 tema: simetriškos reikšmės – 30 užduočių

Priminimas: ekstremumo taškas h. $P(h+t) = P(h-t)$ su kiekvienu t. Jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $h = \dfrac{u+v}{2}$. Skaičiui u simetriškas h atžvilgiu yra $v = 2h - u$. Taip pat $h = x_e = -\dfrac{b}{2a}$.

1. Atpažink Daugianario ekstremumo taškas $h = 4$. Kurios skaičių poros yra simetriškos h atžvilgiu?

a) 1 ir 7 **b)** 2 ir 6 **c)** 0 ir 9 **d)** -1 ir 9 **e)** 3 ir 6 **f)** -2 ir 10 **g)** 1,5 ir 6,5 **h)** 4 ir 5

2. Apskaičiuok Raskite skaičių $v = 2h - u$, kuris h atžvilgiu simetriškas skaičiui u:

a) $h = 5,\ u = 2$ **b)** $h = 5,\ u = 7$ **c)** $h = 5,\ u = -1$ **d)** $h = -2,\ u = 1$ **e)** $h = -2,\ u = -6$ **f)** $h = \frac{1}{2},\ u = 3$

3. Lentelė Duotas $P(x) = (x-2)^2 + 3$. Užpildykite lentelę, tada nurodykite, su kuriais x reikšmės $P(x)$ lygios ir kam lygus h.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$P(x)$							

4. Neatskliausk! Duotas $P(x) = 3(x-4)^2 - 5$. Neatskliausdami apskaičiuokite $P(6)$, $P(2)$, $P(9)$, $P(-1)$ ir $P(4+t)$. Ką pastebite?

5. Teisinga ar klaidinga? Duotas $P(x) = -2(x+1)^2 + 5$ (ekstremumo taškas $h = -1$). Pagrįskite.

a) $P(0) = P(-2)$
b) $P(2) = P(-4)$
c) $P(1) = P(-1)$
d) $P(-1+t) = P(-1-t)$ su kiekvienu t
e) Kadangi $a < 0$, simetrijos nėra.

6. Rask klaidą Mokinys samprotauja: „$P(3) = P(11)$, todėl ekstremumo taškas $h = \frac{3-11}{2} = -4$.“ Kur klaida? Raskite teisingą h ir patikrinkite su daugianariu $P(x) = x^2 - 14x + 5$.

7. Rask h Raskite daugianario P ekstremumo tašką h, jei:

a) $P(1) = P(9)$ **b)** $P(-3) = P(5)$ **c)** $P(-8) = P(-2)$ **d)** $P\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2}\right)$

8. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite dešinėje lygybę, kuri jam teisinga ($u \neq v$).

A) $x^2 - 6x + 1$
B) $x^2 + 6x$
C) $x^2 - 2x + 5$
D) $-x^2 + 4x$

1) $P(-5) = P(-1)$
2) $P(-1) = P(3)$
3) $P(0) = P(4)$
4) $P(2) = P(4)$

9. Pasinaudok simetrija Duotas $P(x) = x^2 - 8x + 3$. Žinoma, kad $P(1) = -4$, $P(2) = -9$, $P(-1) = 12$. Neskaičiuodami raskite $P(7)$, $P(6)$, $P(9)$. Vieną iš jų patikrinkite tiesiogiai.

10. Tekstinis Kamuolys metamas aukštyn; jo aukštis (metrais) po t sekundžių lygus $P(t) = -5t^2 + 20t$.

a) Po kiek sekundžių aukštis toks pat kaip po 1 s? Patikrinkite.
b) Kada kamuolys būna aukščiausiai ir koks tada jo aukštis?
c) Metimo momentu $P(0) = 0$. Kada aukštis vėl bus lygus 0?

d) Kada aukštis toks pat kaip po 0,5 s? Koks tas aukštis?

11. Su 4 tema Duotas $P(x) = 2x^2 - 12x + 7$.

a) Raskite ekstremumo tašką $h = -\frac{b}{2a}$.

b) Raskite skaičius, h atžvilgiu simetriškus skaičiams 5, -1 ir 3,5.

c) Patikrinkite, kad $P(5)$ lygi P reikšmei simetriškame taške.

d) Raskite ekstremumą P_e ir jo rūšį.

12. Rask koeficientus Daugianariui $P(x) = x^2 + bx + c$ galioja lygybės $P(1) = P(7)$ ir $P(0) = 5$. Raskite b ir c.

13. Parametras Raskite m, jei:

a) daugianario $P(x) = x^2 + (m-3)x + 5$ ekstremumo taškas $h = 4$;

b) daugianariui $P(x) = 3x^2 - (m+1)x + 2$ galioja $P(1) = P(5)$.

14. Ar egzistuoja? Ar gali egzistuoti kvadratinis daugianaris P, kuriam:

a) $P(1) = P(4) = P(6)$;

b) $P(2) = P(8)$, o ekstremumo taškas $h = 4$;

c) $P(0) = P(6)$, o ekstremumo taškas $h = 3$?

Atsakymą pagrįskite.

15. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus kvadratinius daugianarius, kuriems $P(2) = P(10)$ ir $P(0) = 5$. Užrašykite juos standartiniu pavidalu ir patikrinkite.

16. Gudriai Be skaičiuotuvo apskaičiuokite:

a) $P(1234) - P(-1230)$, kai $P(x) = x^2 - 4x + 9$;

b) $P(500) - P(-504)$, kai $P(x) = 3x^2 + 12x - 1$;

c) $P(10) - P(-4)$, kai $P(x) = x^2 - 4x$.

17. Iš pilnojo kvadrato Duota $P(x) = x^2 - 10x + 13$.

a) Išskirkite pilnąjį kvadratą.

b) Raskite ekstremumo tašką, ekstremumo rūšį ir P_e.

c) Kuri kita reikšmė lygi $P(-1)$? Patikrinkite apskaičiuodami abi.

18. Poros Daugianario P ekstremumo taškas $h = 5$. Iš skaičių 0; 1; 3; 5; 7; 9; 10 sudarykite poras, kuriose P reikšmės lygios. Kuris skaičius lieka be poros ir kodėl?

19. Dviem būdais Duota $P(x) = 4x^2 - 24x + 5$.

a) Raskite h pagal formulę $x_e = -\frac{b}{2a}$.

b) Raskite h kitaip: žinodami, kad $P(0) = c$, raskite kitą skaičių su ta pačia reikšme ir imkite abiejų skaičių vidurkį.

c) Raskite P_e dviem būdais: kaip $P(h)$ ir pagal formulę $-\frac{D}{4a}$.

20. Iššūkis Neišskirdami pilnojo kvadrato, tiesiogiai įrodykite: jei $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ir $h = -\frac{b}{2a}$, tai $P(h+t) = P(h-t)$ su kiekvienu t.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Iš reikšmių lygybės Duota $P(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Įrodykite: jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $u + v = -\frac{b}{a}$.

b) Su kuriuo b daugianario $2x^2 + bx + 1$ reikšmės taškuose -1 ir 4 lygios?

22. Rask a, h, k Daugianario $P(x) = a(x-h)^2 + k$ reikšmės: $P(-1) = P(7) = -25$ ir $P(2) = 5$. Raskite a, h, k.

23. Trys reikšmės Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = P(6) = 8$ ir $P(1) = -2$. Raskite a, b, c, ekstremumo rūšį ir ekstremumą P_e.

24. Dvi vietos Duotas $P(x) = x^2 - 8x + 3$. Raskite visas m reikšmes, su kuriomis $P(m-1) = P(3m+1)$. Išnagrinėkite visus atvejus.

25. Netikėta lygybė Duotas $P(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Įrodykite: jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $P(u+v) = P(0)$.

b) Patikrinkite su $P(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $u = 1$, $v = 3$.

26. Ar egzistuoja? Įrodykite: kvadratinis daugianaris negali įgyti tos pačios reikšmės trijuose *skirtinguose* taškuose, t. y. nėra tokių skirtingų u, v, w, kad $P(u) = P(v) = P(w)$.

27. Arčiau ar toliau Duotas $P(x) = a(x-h)^2 + k$, $a > 0$.

a) Įrodykite: jei u yra arčiau h nei v (atstumas $|u-h|$ mažesnis už $|v-h|$), tai $P(u) < P(v)$.

b) Daugianario $P(x) = x^2 - 6x + 11$ reikšmes $P(2{,}5)$, $P(4{,}1)$, $P(0)$, $P(5{,}5)$ išdėstykite didėjimo tvarka *jų neskaičiuodami*, o paskui patikrinkite apskaičiuodami.

28. Tapatybė Kvadratiniam daugianariui $P(x) = ax^2 + bx + c$ su *visais* x galioja lygybė $P(x) = P(8-x)$. Įrodykite, kad $b = -8a$, ir raskite ekstremumo tašką. Kaip tai susiję su simetrija?

29. Tekstinis Turime 20 m tvoros ir norime aptverti stačiakampį. Viena kraštinė – x m, kita – $(10-x)$ m, plotas – $S(x) = x(10-x)$.

a) Užrašykite $S(x)$ pavidalu $ax^2 + bx + c$. Raskite ekstremumo tašką, ekstremumo rūšį ir S_e.

b) Neskaičiuodami nustatykite, su kuriuo x plotas toks pat kaip su $x = 3$ ir kaip su $x = 2{,}5$.

c) Įrodykite, kad $S(5+t) = 25 - t^2$. Kodėl iš to išplaukia, kad 25 – didžiausias plotas?

30. Iššūkis Kvadratinio daugianario P ekstremumo taškas yra h, o s – bet kuris skaičius. Pažymėkime $Q(x) = P(x+s)$.

a) Remdamiesi simetrija įrodykite, kad daugianario Q ekstremumo taškas yra $h - s$.

b) Patikrinkite su $P(x) = 2x^2 - 8x + 3$ ir $s = -5$: atskliauskite $Q(x) = P(x-5)$, raskite $-\frac{b}{2a}$ ir palyginkite.

Atsakymai

1. Taip: a), b), d), f), g). Ne: c), e), h).

2. a) 8. b) 3. c) 11. d) -5. e) 2. f) -2.

3. 12; 7; 4; 3; 4; 7; 12. Lygios: $P(-1) = P(5)$, $P(0) = P(4)$, $P(1) = P(3)$; $h = 2$.

4. $P(6) = P(2) = 7$, $P(9) = P(-1) = 70$, $P(4+t) = 3t^2 - 5$.

5. a) T. b) T. c) K. d) T. e) K.

6. Reikia sudėti: $h = \frac{3+11}{2} = 7$. Patikra: $P(3) = P(11) = -28$.

7. a) 5. b) 1. c) -5. d) $\frac{3}{2}$.

8. A–4, B–1, C–2, D–3.

9. $P(7) = -4$, $P(6) = -9$, $P(9) = 12$.

10. a) po 3 s (15 m). b) po 2 s; 20 m. c) po 4 s. d) po 3,5 s; 8,75 m.

11. a) $h = 3$. b) 1; 7; 2,5. c) $P(5) = P(1) = -3$. d) minimumas, $P_e = -11$.

12. $b = -8$, $c = 5$.

13. a) $m = -5$. b) $m = 17$.

14. a) Ne. b) Ne ($h = 5$). c) Taip.

15. Pvz. $x^2 - 12x + 5$ ir $2x^2 - 24x + 5$.

16. a) 0. b) 0. c) 28.

17. a) $(x-5)^2 - 12$. b) minimumas, $h = 5$, $P_e = -12$. c) $P(11)$; abi lygios 24.

18. Poros: $(0;10)$, $(1;9)$, $(3;7)$. Be poros lieka 5, nes tai pats h.

19. a) 3. b) 0 ir 6, $h = 3$. c) -31.

20. Įrodymas – žr. sprendimus.

21. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $b = -6$.

22. $a = -2$, $h = 3$, $k = 7$; $P(x) = -2(x-3)^2 + 7$.

23. $a = 2$, $b = -12$, $c = 8$; minimumas, $P_e = -10$.

24. $m = 2$ arba $m = -1$.

25. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $P(4) = P(0) = 5$.

26. Įrodymas – žr. sprendimus.

27. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $P(2{,}5) < P(4{,}1) < P(5{,}5) < P(0)$.

28. $b = -8a$, $h = 4$.

29. a) $S = -x^2 + 10x$; maksimumas, $h = 5$, $S_e = 25$. b) $x = 7$ ir $x = 7{,}5$. c) Įrodymas – žr. sprendimus.

30. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $Q(x) = 2x^2 - 28x + 93$, $h_Q = 7 = h - s$ ($h = 2$).

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. a) Panaudokite $h = \frac{u+v}{2}$ ir $h = -\frac{b}{2a}$. b) Čia $a = 2$, $u = -1$, $v = 4$.

22. Iš $P(-1) = P(7)$ raskite h. Iš $P(2)$ ir $P(-1)$ gausite dvi lygtis su a ir k.

23. Iš $P(0) = P(6)$ raskite h, tada koeficientą b išreikškite koeficientu a ($h = -\frac{b}{2a}$). Laisvasis narys $c = P(0)$.

24. Galimi du atvejai: argumentai sutampa arba skiriasi. Kai skiriasi, $h = \frac{u+v}{2}$.

25. Pasinaudokite 21 a) uždavinio rezultatu $u + v = -\frac{b}{a}$ ir apskaičiuokite $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

26. Jei $P(u) = P(v) = P(w)$, tai $h = \frac{u+v}{2}$ ir $h = \frac{u+w}{2}$.

27. a) Palyginkite $(u-h)^2$ ir $(v-h)^2$, tada padauginkite iš $a > 0$. b) Raskite h ir atstumus iki jo.

28. Atskliauskite $P(8-x)$ ir palyginkite koeficientus prie x. Ekstremumo taškas – $h = \frac{x+(8-x)}{2}$.

29. b) Simetrija: kurį skaičių pridėję prie 3 gausite 10? c) Atskliauskite $(5+t)(5-t)$.

30. a) $Q(h-s+t) = P(h+t)$. b) $Q(x) = 2(x-5)^2 - 8(x-5) + 3$.

Sprendimai (21–30)

21. a) Kadangi $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, pagal 5 temos taisyklę $h = \frac{u+v}{2}$. Kita vertus, $h = -\frac{b}{2a}$ (4 tema). Todėl

$$\frac{u+v}{2} = -\frac{b}{2a} \;\Rightarrow\; u+v = -\frac{b}{a}.$$

b) Čia $a = 2$, $u = -1$, $v = 4$: $u + v = 3 = -\frac{b}{2}$, todėl $b = -6$.
Atsakymas: $b = -6$. Patikra: $P(-1) = 2 + 6 + 1 = 9$, $P(4) = 32 - 24 + 1 = 9$ ✓

22. Iš $P(-1) = P(7)$: $h = \frac{-1+7}{2} = 3$, todėl $P(x) = a(x-3)^2 + k$.

- $P(2) = a(2-3)^2 + k = a + k = 5$;
- $P(-1) = a(-1-3)^2 + k = 16a + k = -25$.

Iš antrosios lygybės atėmę pirmąją, gauname $15a = -30$, todėl $a = -2$, o $k = 5 - a = 7$.
Atsakymas: $P(x) = -2(x-3)^2 + 7$. Patikra: $P(7) = -2 \cdot 16 + 7 = -25$ ✓

23. Iš $P(0) = P(6)$: $h = 3$. Kadangi $h = -\frac{b}{2a} = 3$, tai $b = -6a$. Be to, $c = P(0) = 8$. Tada $P(1) = a + b + c = a - 6a + 8 = -5a + 8 = -2$, todėl $a = 2$ ir $b = -12$. Kadangi $a = 2 > 0$, ekstremumas – minimumas, o $P_\text{e} = P(3) = 18 - 36 + 8 = -10$.
Atsakymas: $P(x) = 2x^2 - 12x + 8$, minimumas, $P_\text{e} = -10$. Patikra: $P(6) = 72 - 72 + 8 = 8$ ✓, $-\frac{D}{4a} = -\frac{144-64}{8} = -10$ ✓

24. Galimi du atvejai.

- Argumentai sutampa: $m - 1 = 3m + 1$, todėl $m = -1$. Tada abu argumentai lygūs -2, o lygybė $P(-2) = P(-2)$ savaime teisinga.
- Argumentai skiriasi. Tada $h = \frac{(m-1)+(3m+1)}{2} = 2m$. Čia $h = -\frac{-8}{2} = 4$, todėl $2m = 4$, $m = 2$.

Patikra, kai $m = 2$: $P(1) = 1 - 8 + 3 = -4$, $P(7) = 49 - 56 + 3 = -4$ ✓
Atsakymas: $m = 2$ (arba trivialus $m = -1$).

25. a) Pagal 21 a) uždavinį, jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $u + v = -\frac{b}{a}$. Todėl

$$P(u+v) = P\left(-\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{a^2} - b \cdot \frac{b}{a} + c = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a} + c = c = P(0).$$

b) $P(1) = 3 - 12 + 5 = -4$, $P(3) = 27 - 36 + 5 = -4$ – lygios. Čia $u + v = 4$: $P(4) = 48 - 48 + 5 = 5 = P(0)$ ✓

26. Tarkime, kad $P(u) = P(v) = P(w)$, o skaičiai u, v, w skirtingi. Iš $P(u) = P(v)$, $u \neq v$: $h = \frac{u+v}{2}$. Iš $P(u) = P(w)$, $u \neq w$: $h = \frac{u+w}{2}$. Todėl $\frac{u+v}{2} = \frac{u+w}{2}$, t. y. $v = w$ – prieštara, nes $v \neq w$. **Išvada:** tokių trijų skirtingų skaičių nėra. Kitaip tariant, kiekvienas skaičius u turi tik vieną „porą“ $2h - u$.

27. a) Užrašome $P(x) = a(x-h)^2 + k$. Atstumai iki h neneigiami, o iš dviejų neneigiamų skaičių mažesniojo kvadratas irgi mažesnis: $|u-h| < |v-h| \;\Rightarrow\; (u-h)^2 < (v-h)^2$. Dauginame iš $a > 0$ ir pridedame k: $a(u-h)^2 + k < a(v-h)^2 + k$, t. y. $P(u) < P(v)$.
b) $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$, $h = 3$. Atstumai iki h: 2,5: 0,5; 4,1: 1,1; 5,5: 2,5; 0: 3. Kuo skaičius arčiau h, tuo reikšmė mažesnė, todėl $P(2{,}5) < P(4{,}1) < P(5{,}5) < P(0)$. Patikra: 2,25; 3,21; 8,25; 11 ✓

28. Atskliaudžiame: $P(8-x) = a(8-x)^2 + b(8-x) + c = ax^2 - 16ax + 64a + 8b - bx + c$. Lyginame su $P(x) = ax^2 + bx + c$. Koeficientai prie x: $-16a - b = b$, todėl $b = -8a$. (Laisvieji nariai: $64a + 8b + c = c$, o $64a + 8(-8a) = 0$ ✓.) Ekstremumo taškas: $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8a}{2a} = 4$. Ryšys su simetrija: skaičiuose x ir $8 - x$ daugianario reikšmės lygios, o šių skaičių vidurkis $\frac{x+(8-x)}{2} = 4$ ir yra h.
Atsakymas: $b = -8a$, $h = 4$.

29. a) $S = x(10-x) = -x^2 + 10x$: $a = -1 < 0$ – maksimumas; $h = -\frac{10}{-2} = 5$; $S_\text{e} = S(5) = 25$ (patikra: $D = 100$, $-\frac{D}{4a} = 25$ ✓).

b) Simetrišką skaičių randame iš formulės $v = 2h - u = 10 - u$: kai $u = 3,\ v = 7$; kai $u = 2{,}5,\ v = 7{,}5$. Patikra: $S(3) = 21 = S(7)$ ✓.
c) $S(5 + t) = (5 + t)(10 - 5 - t) = (5 + t)(5 - t) = 25 - t^2$. Kadangi $t^2 \geq 0$, reiškinys $25 - t^2$ niekada nebūna didesnis už 25, o kai $t = 0$, jis lygus 25. Todėl 25 yra didžiausias plotas (kai $x = 5$, sklypas – kvadratas 5×5).

30. a) Kadangi h yra ekstremumo taškas, $P(h+t) = P(h-t)$. Todėl $Q(h-s+t) = P(h-s+t+s) = P(h+t)$ ir $Q(h - s - t) = P(h - s - t + s) = P(h - t)$. Šios reikšmės lygios, t. y. $Q(h - s + t) = Q(h - s - t)$ su kiekvienu t. Taigi Q reikšmės simetriškos taško $h - s$ atžvilgiu, todėl daugianario Q ekstremumo taškas yra $h - s$.
b) Čia $h = -\frac{-8}{4} = 2$ ir $s = -5$, todėl turi būti $h_Q = 2 - (-5) = 7$. Patikriname tiesiogiai:

$$Q(x) = 2(x - 5)^2 - 8(x - 5) + 3 = 2x^2 - 20x + 50 - 8x + 40 + 3 = 2x^2 - 28x + 93,$$

$-\frac{b}{2a} = \frac{28}{4} = 7$ ✓