Kvadratinis daugianaris

4 tema: diskriminantas ir ekstremumo formulės – 30 užduočių

Priminimas: kai $P(x) = ax^2 + bx + c$ ir $a \neq 0$, tai $D = b^2 - 4ac$ (diskriminantas),

$$x_e = -\frac{b}{2a}, \qquad P_e = -\frac{D}{4a}, \qquad P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

$a > 0$: minimumas ($x_{min} = x_e$, $P_{min} = P_e$); $a < 0$: maksimumas ($x_{max} = x_e$, $P_{max} = P_e$). Ekstremumą galima rasti ir kitaip: $P_e = P(x_e)$.

1. Atpažink Nurodykite a, b, c ir apskaičiuokite diskriminantą D.

a) $x^2 - 7x + 10$ **c)** $3x^2 - 5$ **e)** $3 + x - 2x^2$

b) $-x^2 + 4x - 4$ **d)** $2x^2 + x + 1$ **f)** $(x - 3)(x + 1)$

2. Lentelė Užpildykite lentelę: raskite D, x_e, P_e ir ekstremumo rūšį (minimumas ar maksimumas).

a	b	c	D	x_e	P_e	rūšis
1	−4	3				
−1	6	−5				
2	4	5				
−3	0	12				

3. Apskaičiuok Raskite D, ekstremumo rūšį, ekstremumo tašką ir ekstremumą.

a) $x^2 + 6x + 5$ **c)** $-x^2 + 2x + 3$ **e)** $2x^2 + 3x$

b) $2x^2 - 12x + 10$ **d)** $-3x^2 + 6x - 3$ **f)** $x^2 + x + 1$

4. Rask klaidą Mokinys nagrinėja daugianarį $P(x) = -2x^2 + 8x - 3$:
„$D = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 40$; $x_e = \frac{b}{2a} = \frac{8}{-4} = -2$; $P_e = -\frac{40}{4 \cdot (-2)} = 5$; $a < 0$, todėl maksimumas.“
Raskite ir ištaisykite klaidą, o atsakymą patikrinkite apskaičiuodami $P(x_e)$.

5. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite (visuose teiginiuose $a \neq 0$).

a) Jei $b = 0$, tai $x_e = 0$.

b) Jei $a < 0$ ir $D > 0$, tai ekstremumas teigiamas.

c) Jei $D = 0$, tai ekstremumas lygus nuliui.

d) Jei $a > 0$ ir $D < 0$, tai minimumas neigiamas.

e) Jei daugianaris turi neigiamą minimumą, tai $D > 0$.

6. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite jo ekstremumo tašką ir ekstremumą $(x_e; P_e)$ dešinėje.

A) $x^2 - 4x + 7$ 1) $(2; 3)$

B) $x^2 + 4x + 7$ 2) $(-2; 3)$

C) $-x^2 + 4x - 7$ 3) $(2; -3)$

D) $-x^2 - 4x - 7$ 4) $(-2; -3)$

7. Pagal ženklus Apskaičiuokite D ir, *neskaičiuodami ekstremumo*, nustatykite ekstremumo rūšį ir ženklą (teigiamas, neigiamas ar lygus nuliui).

a) $2x^2 - x + 3$ **c)** $-3x^2 + x - 2$ **e)** $4x^2 - 4x + 1$

b) $-x^2 + 5x - 1$ **d)** $x^2 + x - 1$

8. Dviem būdais Ekstremumą raskite dviem būdais: pagal formulę $P_e = -\frac{D}{4a}$ ir įrašę x_e į daugianarį. Ar rezultatai sutampa?

a) $2x^2 - 12x + 7$ **b)** $3x^2 + 6x + 4$

9. Koeficientai iš reikšmių Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = 2$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 6$.

a) Raskite a, b, c ir D.

b) Raskite x_e ir P_e, nurodykite ekstremumo rūšį.

10. Tekstinis Sodininkas turi 40 m tvoros ir ja aptveria stačiakampį sklypą. Viena sklypo kraštinė lygi x m, kita – $(20 - x)$ m. Užrašykite sklypo plotą $S(x)$ standartiniu pavidalu, raskite a, b, c, D, o tada x_e ir didžiausią galimą plotą.

11. Parametras Raskite k, su kuriuo:

a) daugianario $x^2 + kx + 5$ ekstremumo taškas lygus 3;

b) daugianario $kx^2 - 8x + 1$ ekstremumo taškas lygus 2;

c) daugianario $2x^2 - 12x + k$ minimumas lygus -4.

12. Ekstremumas lygus nuliui Raskite k, su kuriuo ekstremumas lygus nuliui:

a) $x^2 + 6x + k$ **b)** $-2x^2 + 8x + k$ **c)** $kx^2 + 4x + 1$, $k \neq 0$

13. Du pavidalai Užrašykite pilnojo kvadrato pavidalu $a(x-h)^2+k$ ir palyginkite h, k su x_e, P_e, apskaičiuotais pagal formules.

a) $3x^2 - 12x + 14$ **b)** $-2x^2 + 4x + 1$

14. Atvirkščiai Daugianariai užrašyti pilnojo kvadrato pavidalu. Neatskliausdami nurodykite x_e, P_e ir ekstremumo rūšį; tada atskliauskite, raskite a, b, c, D ir patikrinkite formules.

a) $2(x + 3)^2 - 5$ **b)** $-(x - 4)^2 + 1$

15. Ar egzistuoja? Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris, tenkinantis šias sąlygas? Jei taip – pateikite pavyzdį, jei ne – paaiškinkite remdamiesi formule $P_e = -\frac{D}{4a}$.

a) $a > 0$, $D > 0$, $P_{min} > 0$;

b) $a < 0$, $D < 0$, $P_{max} > 0$;

c) $a > 0$, $D = 0$, $x_{min} = 2$;

d) $a < 0$, $D > 0$, $P_{max} > 0$;

e) $b = 0$, $a < 0$, $D < 0$, $P_{max} = -3$.

16. Sudaryk Sudarykite kvadratinį daugianarį, kurio $a = 2$, $x_{min} = 1$ ir $P_{min} = -8$. Patikrinkite apskaičiuodami $P(1)$.

17. Kas pasikeičia? Duotas daugianaris $P(x) = x^2 - 8x + 3$. Raskite jo D, x_e, P_e. Tada tuos pačius dydžius raskite daugianariams

a) $Q(x) = P(x) + 10$;

b) $R(x) = -P(x)$.

Ką pastebite?

18. Pirma suprastink Pirmiausia atskliauskite ir suprastinkite, o tada raskite D, x_e, P_e ir ekstremumo rūšį.

a) $(x-1)(x-5)+3$

b) $2(x-1)^2-(x-3)(x+1)$

19. Tekstinis Dviejų skaičių suma lygi 12. Pažymėję vieną iš jų x, užrašykite jų kvadratų sumą standartiniu pavidalu. Kokia mažiausia gali būti ši suma ir su kuriuo x ji gaunama?

20. Rask koeficientus Daugianario $P(x)=ax^2+bx+c$ reikšmės $P(0)=1$ ir $P(1)=-2$, o ekstremumo taškas $x_e=2$. Raskite a, b, c, D ir P_e.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Iššūkis Įrodykite, kad $P_e = c + \dfrac{b\,x_e}{2}$. Pritaikykite daugianariui $3x^2-12x+7$ ir patikrinkite pagal formulę $P_e=-\frac{D}{4a}$.

22. Parametras Duotas daugianaris $P(x)=x^2-2mx+m+6$.

a) Raskite visas m reikšmes, su kuriomis $P_{\min}=4$.

b) Su kuria m reikšme daugianario P minimumas didžiausias? Kam jis tada lygus?

23. Įrodymas Įrodykite: kvadratinis daugianaris ax^2+bx+c lygus $a(x-h)^2$ su kuriuo nors h (t. y. yra „pilnasis kvadratas“) tada ir tik tada, kai $D=0$. Su kuriomis p reikšmėmis tokį pavidalą turi daugianaris $4x^2+px+9$?

24. Įrodymas ir pavyzdys Duotas daugianaris $P(x)=ax^2+bx+c$.

a) Įrodykite: jei $ac<0$, tai $D>0$, o ekstremumo ženklas priešingas a ženklui.

b) Ar teisingas atvirkštinis teiginys: jei $D>0$, tai $ac<0$? Pagrįskite pavyzdžiu.

25. Dvi galimybės Raskite visus kvadratinius daugianarius ax^2+bx+c, kurių $x_e=-1$, $D=16$ ir $c=-3$. Kuris iš jų turi minimumą, kuris – maksimumą?

26. Tekstinis Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybę $2x+3y=12$. Raskite didžiausią galimą sandaugą xy ir tuos x, y, su kuriais ji gaunama. Ar sandauga gali būti lygi 7?

27. Keitinys Raskite mažiausią reiškinio reikšmę ir visus x, su kuriais ji gaunama. Pasikartojančią dalį pažymėkite t ir pirmiausia išsiaiškinkite, kokias reikšmes gali įgyti t.

a) $(x^2-2x+3)(x^2-2x+5)$

b) $(x^2-4x+1)(x^2-4x+5)$

28. Spąstai Raskite mažiausią reikšmę ir visus x, su kuriais ji gaunama. Pažymėkite $t=x^2$ ir nepamirškite, kad $t\geq 0$.

a) x^4-6x^2+10 **b)** x^4+4x^2+7

29. Iššūkis Duoti daugianariai $P(x)=ax^2+bx+c$ ir $Q(x)=P(x+s)$ (s – bet kuris skaičius). Įrodykite, kad $D_Q=D_P$ ir $x_e(Q)=x_e(P)-s$. Patikrinkite, kai $P(x)=2x^2-8x+3$ ir $s=1$.

30. Iššūkis Skaičiai p ir q tenkina lygybę $p+q=8$. Daugianario x^2+px+q minimumą pažymėkime m. Išreikškite m per p ir raskite didžiausią galimą m reikšmę bei atitinkamus p ir q.

Atsakymai

1. a) $D = 9$ ($a = 1$, $b = -7$, $c = 10$). b) $D = 0$ (-1; 4; -4). c) $D = 60$ (3; 0; -5). d) $D = -7$ (2; 1; 1). e) $D = 25$ (-2; 1; 3). f) $x^2 - 2x - 3$: $D = 16$.

2. (D; x_e; P_e; rūšis): (4; 2; -1; min); (16; 3; 4; max); (-24; -1; 3; min); (144; 0; 12; max).

3. a) 16; min: -3; -4. b) 64; min: 3; -8. c) 16; max: 1; 4. d) 0; max: 1; 0. e) 9; min: $-\frac{3}{4}$; $-\frac{9}{8}$. f) -3; min: $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$.

4. Klaida: mokinys pamiršo minusą formulėje $x_\text{e} = -\frac{b}{2a}$. $x_\text{e} = -\frac{8}{-4} = 2$; $D = 40$ ir $P_\text{e} = 5$ teisingi, maksimumas. $P(2) = -8 + 16 - 3 = 5$.

5. a) T. b) T. c) T. d) K (minimumas teigiamas). e) T.

6. A–1, B–2, C–3, D–4.

7. a) $D = -23$: min, teigiamas. b) $D = 21$: max, teigiamas. c) $D = -23$: max, neigiamas. d) $D = 5$: min, neigiamas. e) $D = 0$: min, lygus 0.

8. a) $x_\text{e} = 3$, $D = 88$, $P_\text{e} = -11$, $P(3) = -11$. b) $x_\text{e} = -1$, $D = -12$, $P_\text{e} = 1$, $P(-1) = 1$. Sutampa.

9. a) $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$, $D = 1$. b) $x_\text{e} = \frac{3}{2}$, $P_\text{e} = -\frac{1}{4}$, minimumas.

10. $S = -x^2 + 20x$; $a = -1$, $b = 20$, $c = 0$, $D = 400$; $x_\text{e} = 10$; didžiausias plotas 100 m^2 (kvadratas 10×10).

11. a) $k = -6$. b) $k = 2$. c) $k = 14$.

12. a) $k = 9$. b) $k = -8$. c) $k = 4$.

13. a) $3(x-2)^2 + 2$; $h = 2 = x_\text{e}$, $k = 2 = P_\text{e}$ ($D = -24$). b) $-2(x-1)^2 + 3$; $h = 1 = x_\text{e}$, $k = 3 = P_\text{e}$ ($D = 24$).

14. a) $x_\text{e} = -3$, $P_\text{e} = -5$, min; $2x^2 + 12x + 13$, $D = 40$. b) $x_\text{e} = 4$, $P_\text{e} = 1$, max; $-x^2 + 8x - 15$, $D = 4$.

15. a) Ne. b) Ne. c) Taip, pvz. $x^2 - 4x + 4$. d) Taip, pvz. $-x^2 + 1$. e) Taip, pvz. $-x^2 - 3$.

16. $2x^2 - 4x - 6$; $P(1) = -8$.

17. P: $D = 52$, $x_\text{e} = 4$, $P_\text{e} = -13$. a) $D = 12$, $x_\text{e} = 4$, $P_\text{e} = -3$. b) $D = 52$, $x_\text{e} = 4$, $P_\text{e} = 13$ (maksimumas).

18. a) $x^2 - 6x + 8$: $D = 4$, $x_\text{min} = 3$, $P_\text{min} = -1$. b) $x^2 - 2x + 5$: $D = -16$, $x_\text{min} = 1$, $P_\text{min} = 4$.

19. $x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 144$; mažiausia suma 72, kai $x = 6$.

20. $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$, $D = 12$, $P_\text{e} = -3$.

21. Įrodymas – žr. sprendimus. $P_\text{e} = -5$.

22. a) $m = 2$ arba $m = -1$. b) $m = \frac{1}{2}$; minimumas $\frac{25}{4}$.

23. Įrodymas – žr. sprendimus. $p = 12$ arba $p = -12$.

24. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) Ne, pvz. $x^2 - 5x + 6$ ($D = 1 > 0$, bet $ac = 6 > 0$).

25. $x^2 + 2x - 3$ (minimumas) ir $-4x^2 - 8x - 3$ (maksimumas).

26. Didžiausia sandauga 6, kai $x = 3$, $y = 2$. Sandauga negali būti lygi 7.

27. a) Mažiausia reikšmė 8, kai $x = 1$. b) Mažiausia reikšmė -4, kai $x = 1$ arba $x = 3$.

28. a) Mažiausia reikšmė 1, kai $x = \sqrt{3}$ arba $x = -\sqrt{3}$. b) Mažiausia reikšmė 7, kai $x = 0$.

29. Įrodymas – žr. sprendimus.

30. $m = 8 - p - \frac{p^2}{4}$; didžiausia $m = 9$, kai $p = -2$, $q = 10$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Užrašykite bx_{e} naudodami $x_{\mathrm{e}} = -\frac{b}{2a}$ ir palyginkite $c + \frac{bx_{\mathrm{e}}}{2}$ su $-\frac{D}{4a}$.

22. $P_{\min} = -\frac{D}{4}$; išreikškite jį per m. Gausite kintamojo m kvadratinį reiškinį: a) prilyginkite jį 4 ir išskirkite pilnąjį kvadratą; b) ieškokite jo ekstremumo.

23. Pilnojo kvadrato pavidale $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$ kada antrasis dėmuo lygus nuliui? Atvirkščiai: jei $ax^2+bx+c = a(x-h)^2$, palyginkite koeficientus ir apskaičiuokite D.

24. Kai $ac < 0$, koks yra $-4ac$ ženklas? Ką tada galima pasakyti apie $D = b^2 - 4ac$? Atvirkštiniam teiginiui paneigti ieškokite pavyzdžio, kai $D > 0$ ir $ac > 0$.

25. Iš $x_{\mathrm{e}} = -1$ išreikškite b per a. Tada sąlyga $D = 16$ virsta lygtimi su vienu nežinomuoju a; ją spręskite išskirdami pilnąjį kvadratą.

26. Išreikškite y per x ir užrašykite xy kaip kintamojo x kvadratinį daugianarį.

27. Pažymėkite $t = x^2 - 2x$ (b dalyje $t = x^2 - 4x$). Išskirkite pilnąjį kvadratą ir raskite mažiausią t reikšmę. Tada reiškinys – kintamojo t kvadratinis daugianaris: ar jo t_{e} yra tarp galimų t reikšmių?

28. Kintamasis $t = x^2$ negali būti neigiamas. Raskite t_{e} ir patikrinkite, ar jis leistinas.

29. Atskliauskite $P(x + s)$ ir sutvarkykite pagal x laipsnius – gausite naujus a, b, c.

30. $m = q - \frac{p^2}{4}$. Iš $p + q = 8$ išreikškite q ir gautą reiškinį nagrinėkite kaip kintamojo p kvadratinį daugianarį.

Sprendimai (21–30)

21. $x_\text{e} = -\frac{b}{2a}$, todėl $bx_\text{e} = -\frac{b^2}{2a}$ ir $\frac{bx_\text{e}}{2} = -\frac{b^2}{4a}$. Tada

$$c + \frac{b\,x_\text{e}}{2} = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a} = P_\text{e}.$$

Pritaikymas: $a = 3$, $b = -12$, $c = 7$. $x_\text{e} = -\frac{-12}{6} = 2$, $P_\text{e} = 7 + \frac{-12\cdot 2}{2} = 7 - 12 = -5$. Patikra: $D = 144 - 84 = 60$, $-\frac{60}{12} = -5$ ✓

22. Čia $a = 1$, $b = -2m$, $c = m + 6$.
$D = (-2m)^2 - 4(m + 6) = 4m^2 - 4m - 24$, todėl $P_\text{min} = -\frac{D}{4} = -m^2 + m + 6$.
a) Prilyginame 4: $-m^2 + m + 6 = 4$, t. y. $m^2 - m - 2 = 0$. Išskiriame pilnąjį kvadratą: $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$, $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $m - \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$, todėl $m = 2$ arba $m = -1$.
Patikra: $m = 2$: $x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ ✓; $m = -1$: $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$ ✓
b) $P_\text{min} = -m^2 + m + 6$ yra kintamojo m kvadratinis daugianaris, kurio $a = -1 < 0$, todėl jis turi didžiausią reikšmę. $m_\text{e} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2}$, o didžiausia reikšmė lygi $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$ (arba $-\frac{D'}{4a}$, $D' = 1 + 24 = 25$, $\frac{25}{4}$ ✓).
Atsakymas: a) $m = 2$ arba $m = -1$; b) $m = \frac{1}{2}$, minimumas $\frac{25}{4}$.

23. Pilnojo kvadrato pavidalas: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$.
Jei $D = 0$**:** antrasis dėmuo lygus 0, todėl $ax^2 + bx + c = a\left(x - h\right)^2$ su $h = -\frac{b}{2a}$.
Atvirkščiai: tarkime, kad $ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 = ax^2 - 2ahx + ah^2$ su visais x. Atitinkami koeficientai lygūs: $b = -2ah$, $c = ah^2$. Tada $D = b^2 - 4ac = 4a^2h^2 - 4a \cdot ah^2 = 0$.
Taigi $D = 0$ tada ir tik tada, kai daugianaris užrašomas pavidalu $a(x - h)^2$.
$4x^2 + px + 9$: $D = p^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = p^2 - 144$. Reikia, kad $p^2 = 144$, todėl $p = 12$ arba $p = -12$.
Patikra: $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ ✓; $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ ✓

24. a) Jei $ac < 0$, tai $-4ac > 0$, o $b^2 \geq 0$, todėl $D = b^2 + (-4ac) > 0$. Ekstremumas $P_\text{e} = -\frac{D}{4a}$: skaitiklyje $-D < 0$ (nes $D > 0$). Kai $a > 0$, vardiklis teigiamas, todėl $P_\text{e} < 0$; kai $a < 0$, vardiklis neigiamas, todėl $P_\text{e} > 0$. Abiem atvejais ekstremumo ženklas priešingas a ženklui.
b) Ne. Pavyzdys: $x^2 - 5x + 6$ ($a = 1$, $b = -5$, $c = 6$): $D = 25 - 24 = 1 > 0$, bet $ac = 6 > 0$.

25. Iš $x_\text{e} = -\frac{b}{2a}$ gauname $b = -2ax_\text{e} = 2a$ (nes $x_\text{e} = -1$). Tada

$$D = b^2 - 4ac = (2a)^2 - 4a \cdot (-3) = 4a^2 + 12a.$$

$D = 16$: $4a^2 + 12a = 16$, t. y. $a^2 + 3a - 4 = 0$. Išskiriame pilnąjį kvadratą: $\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = 0$, $\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $a + \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2}$, todėl $a = 1$ arba $a = -4$ (abu $\neq 0$).
$a = 1$: $b = 2$, daugianaris $x^2 + 2x - 3$. Patikra: $D = 4 + 12 = 16$ ✓, $x_\text{e} = -\frac{2}{2} = -1$ ✓. $a > 0$ – minimumas.
$a = -4$: $b = -8$, daugianaris $-4x^2 - 8x - 3$. Patikra: $D = 64 - 48 = 16$ ✓, $x_\text{e} = -\frac{-8}{-8} = -1$ ✓. $a < 0$ – maksimumas.
Atsakymas: $x^2 + 2x - 3$ (minimumas) ir $-4x^2 - 8x - 3$ (maksimumas).

26. Iš $2x + 3y = 12$ gauname $y = \frac{12 - 2x}{3}$, todėl $xy = \frac{12x - 2x^2}{3} = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$. Čia $a = -\frac{2}{3}$, $b = 4$, $c = 0$, $a < 0$ – yra maksimumas. $D = 16 - 0 = 16$. $x_\text{e} = -\frac{4}{2\cdot(-\frac{2}{3})} = -\frac{4}{-\frac{4}{3}} = 3$, $P_\text{e} = -\frac{16}{4\cdot(-\frac{2}{3})} = -\frac{16}{-\frac{8}{3}} = 6$. Tada $y = \frac{12 - 6}{3} = 2$.
Patikra: $3 \cdot 2 = 6$, $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ ✓
Kadangi $xy \leq 6$ su visais x, sandauga negali būti lygi 7.
Atsakymas: didžiausia sandauga 6 (kai $x = 3$, $y = 2$); lygi 7 ji būti negali.

27. a) $t = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$, o $t = -1$ tik tada, kai $x = 1$. Reiškinys: $(t + 3)(t + 5) = t^2 + 8t + 15$, $a = 1$, $b = 8$, $c = 15$, $D = 64 - 60 = 4$, $t_\text{e} = -4$, $P_\text{e} = -1$. Bet $t_\text{e} = -4 < -1$ – tokio t būti negali, todėl -1 nepasiekiama. Kadangi $t^2 + 8t + 15 = (t + 4)^2 - 1$ ir $t \geq -1$, tai $t + 4 \geq 3$, $(t + 4)^2 \geq 9$, todėl reiškinys ≥ 8, o lygybė gaunama, kai $t = -1$, t. y. $x = 1$. Patikra: $(1 - 2 + 3)(1 - 2 + 5) = 2 \cdot 4 = 8$ ✓

b) $t = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 \geq -4$. Reiškinys: $(t+1)(t+5) = t^2 + 6t + 5$, $D = 36 - 20 = 16$, $t_\text{e} = -3 \geq -4$ – leistinas, $P_\text{e} = -4$ (min, nes $a = 1 > 0$). Kada $t = -3$? $(x-2)^2 - 4 = -3$, $(x-2)^2 = 1$, $x - 2 = \pm 1$, $x = 1$ arba $x = 3$. Patikra: $x = 1$: $(1-4+1)(1-4+5) = -2 \cdot 2 = -4$ ✓; $x = 3$: $(9-12+1)(9-12+5) = -2 \cdot 2 = -4$ ✓

Atsakymas: a) 8, kai $x = 1$; b) -4, kai $x = 1$ arba $x = 3$.

28. Pažymėję $t = x^2$ gauname $t^2 - 6t + 10$ ir $t^2 + 4t + 7$, bet $t \geq 0$.

a) $t^2 - 6t + 10$: $x_\text{e} = 3 \geq 0$, leistinas; $D = 36 - 40 = -4$, $P_\text{min} = 1$. $t = 3$ reiškia $x^2 = 3$, $x = \pm\sqrt{3}$. Patikra: $(\sqrt{3})^4 - 6 \cdot 3 + 10 = 9 - 18 + 10 = 1$ ✓

b) $t^2 + 4t + 7$: $x_\text{e} = -2 < 0$ – neleistinas (negali būti $x^2 = -2$), todėl $P_\text{min} = 3$ *nepasiekiamas*. Tiesiogiai: $x^4 \geq 0$ ir $4x^2 \geq 0$, todėl $x^4 + 4x^2 + 7 \geq 7$, o lygybė gaunama tik tada, kai $x = 0$.

Atsakymas: a) mažiausia reikšmė 1, kai $x = \pm\sqrt{3}$; b) mažiausia reikšmė 7, kai $x = 0$.

29. $Q(x) = a(x+s)^2 + b(x+s) + c = ax^2 + (2as + b)x + (as^2 + bs + c)$. Taigi $a_Q = a$, $b_Q = 2as + b$, $c_Q = as^2 + bs + c$. Tada

$$D_Q = (2as + b)^2 - 4a(as^2 + bs + c) = 4a^2s^2 + 4abs + b^2 - 4a^2s^2 - 4abs - 4ac = b^2 - 4ac = D_P.$$

$x_\text{e}(Q) = -\frac{2as+b}{2a} = -s - \frac{b}{2a}$. Čia $\frac{-b}{2a} = x_\text{e}(P)$, tad $x_\text{e}(Q) = x_\text{e}(P) - s$. ✓

Pavyzdys: $P = 2x^2 - 8x + 3$: $D = 64 - 24 = 40$, $x_\text{e} = 2$, $P_\text{e} = -5$. $Q(x) = 2(x+1)^2 - 8(x+1) + 3 = 2x^2 - 4x - 3$. $D_Q = 16 + 24 = 40$ ✓, $x_\text{e}(Q) = \frac{4}{4} = 1 = 2 - 1$ ✓, $P_\text{e}(Q) = -\frac{40}{8} = -5$ (ekstremumas nepasikeitė).

30. $m = q - \frac{p^2}{4}$ (nes $P_\text{min} = -\frac{D}{4}$, $D = p^2 - 4q$). Kadangi $q = 8 - p$:

$$m = 8 - p - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{4}p^2 - p + 8.$$

Tai kintamojo p kvadratinis daugianaris: $a = -\frac{1}{4} < 0$, $b = -1$, $c = 8$, todėl jis turi didžiausią reikšmę. $D = 1 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 8 = 1 + 8 = 9$. $p_\text{e} = -\frac{-1}{2 \cdot (-\frac{1}{4})} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$, $m_\text{e} = -\frac{9}{4 \cdot (-\frac{1}{4})} = 9$. Tada $q = 8 - (-2) = 10$. Patikra: $x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$, minimumas 9 ✓

Atsakymas: didžiausias $m = 9$, kai $p = -2$, $q = 10$.