Kvadratinis daugianaris

3 tema: mažiausia ir didžiausia reikšmė (ekstremumas) – 30 užduočių

Daugianaris $P(x) = a(x-h)^2 + k$. Kai $a > 0$: $(x-h)^2 \geq 0 \Rightarrow a(x-h)^2 \geq 0 \Rightarrow P(x) \geq k$, $x_{\min} = h$, $P_{\min} = k$. Kai $a < 0$: $a(x-h)^2 \leq 0 \Rightarrow P(x) \leq k$, $x_{\max} = h$, $P_{\max} = k$. Reikia pagrįsti du dalykus: nelygybę su *visais* x ir tai, kad reikšmė pasiekiama: $P(h) = k$. Ekstremumo taškas – tai x reikšmė (ką įrašome), ekstremumas – P reikšmė (ką gauname).

1. Atpažink Nurodykite ekstremumo rūšį ir užrašykite $x_{\min}$, $P_{\min}$ arba $x_{\max}$, $P_{\max}$.

a) $2(x-1)^2 + 5$ **c)** $4x^2 - 7$ **e)** $(x+5)^2$

b) $-(x+3)^2 - 4$ **d)** $6 - \frac{1}{2}(x-2)^2$ **f)** $-3(x-4)^2$

2. Išskirk ($a = 1$) Išskirkite pilnąjį kvadratą ir raskite $x_{\min}$ bei $P_{\min}$.

a) $x^2 - 6x + 11$ **b)** $x^2 + 4x - 1$ **c)** $x^2 + 3x + 1$ **d)** $x^2 - 5x + 6$

3. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite jo ekstremumo tašką ir ekstremumą dešinėje (pirmiausia išskirkite pilnąjį kvadratą).

A) $x^2 - 4x + 7$ 1) $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = 3$

B) $-x^2 + 4x - 7$ 2) $x_{\max} = -2$, $P_{\max} = 11$

C) $x^2 + 4x + 7$ 3) $x_{\max} = 2$, $P_{\max} = -3$

D) $-x^2 - 4x + 7$ 4) $x_{\min} = -2$, $P_{\min} = 3$

4. Rask klaidą Mokinys rašo: $x^2 - 8x + 3 = (x-4)^2 + 16 + 3 = (x-4)^2 + 19$, todėl $x_{\min} = -4$ ir $P_{\min} = 19$. Raskite dvi klaidas ir parašykite teisingą atsakymą.

5. Rask klaidą ($a < 0$) Mokinys rašo: $-2x^2+8x-3 = -2(x^2-4x)-3 = -2\big((x-2)^2-4\big)-3 = -2(x-2)^2-4-3 = -2(x-2)^2 - 7$, todėl $x_{\min} = 2$ ir $P_{\min} = -7$. Raskite visas klaidas ir jas ištaisykite.

6. Išskirk ($a \neq 1$) Raskite ekstremumo tašką ir ekstremumą (nurodykite, ar tai minimumas, ar maksimumas).

a) $3x^2 - 12x + 7$ **b)** $-x^2 + 6x - 2$ **c)** $2x^2 + 2x + 1$ **d)** $-2x^2 - 8x$

7. Lentelė Duota $P(x) = (x-3)^2 + 2$. Užpildykite lentelę.

x	-1	1	2	3	4	5	7
$P(x)$	□	□	□	□	□	□	□

Kuri lentelės reikšmė mažiausia? Ar galima teigti, kad ji mažiausia su *visais* x? Pagrįskite nelygybių grandine.

8. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Daugianaris $x^2 + 6$ turi $x_{\min} = 6$.

b) Didžiausia reiškinio $-(x-5)^2$ reikšmė lygi 0.

c) Jei $P(3) = 2$, tai $P_{\min} = 2$.

d) Daugianaris $3 - 2(x+1)^2$ turi $x_{\max} = -1$ ir $P_{\max} = 3$.

e) Daugianaris $2(x-3)^2 + 1$ turi ir minimumą, ir maksimumą.

f) Jei $P_{\min} = 0$, tai su visais x galioja $P(x) > 0$.

9. Atvirkščiai Žinomi a, ekstremumo taškas ir ekstremumas. Užrašykite daugianarį pilnojo kvadrato pavidalu $a(x-h)^2+k$ ir standartiniu pavidalu ax^2+bx+c.

a) $a=3,\ x_{\min}=2,\ P_{\min}=-1$

b) $a=-2,\ x_{\max}=-1,\ P_{\max}=4$

c) $a=\frac{1}{2},\ x_{\min}=4,\ P_{\min}=-2$

10. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus daugianarius, kurių $x_{\max}=-3$ ir $P_{\max}=4$, ir užrašykite juos standartiniu pavidalu. Ar kuris nors iš jų gali turėti $a=1$? Kodėl?

11. Su 1 tema Daugianario $P(x)=x^2+bx+c$ reikšmės $P(0)=5$ ir $P(2)=1$. Raskite b ir c, o tada $x_{\min}$ ir $P_{\min}$.

12. Iš reikšmių Daugianario $P(x)=ax^2+bx+c$ reikšmės: $P(0)=1,\ P(1)=4,\ P(-1)=-4$. Raskite a, b, c ir ekstremumą.

13. Neatskliausk! Duota $P(x)=3(x-2)^2+1$. Neatskliausdami raskite:

a) $x_{\min}$ ir $P_{\min}$;

b) $P(5)$ ir $P(-1)$;

c) ar yra toks x, su kuriuo $P(x)=0$? Pagrįskite.

14. Ar egzistuoja? Ar yra toks x, su kuriuo:

a) $x^2-6x+10=0$;

b) $-x^2+2x-3=0$;

c) $x^2+4x+4=0$;

d) $2x^2-4x+5<3$?

Atsakymą pagrįskite išskirdami pilnąjį kvadratą.

15. Tekstinis Sandaugą užrašykite kaip vieno nežinomojo reiškinį, raskite jos ekstremumą ir pačius skaičius:

a) dviejų skaičių suma lygi 12; kokia didžiausia gali būti jų sandauga?

b) dviejų skaičių skirtumas lygus 6; kokia mažiausia gali būti jų sandauga?

16. Tekstinis Ūkininkas turi 40 m tvoros ir ja aptveria stačiakampį sklypą prie sienos (ketvirtosios kraštinės tverti nereikia). Kokie turi būti sklypo matmenys, kad plotas būtų didžiausias? Koks tas plotas?

17. Rask koeficientus Raskite nežinomus koeficientus:

a) x^2+bx+c turi $x_{\min}=-2$ ir $P_{\min}=-5$;

b) $-x^2+bx+c$ turi $x_{\max}=3$ ir $P_{\max}=7$;

c) x^2-6x+c turi $P_{\min}=4$.

18. Raidiniai koeficientai Raskite ekstremumo tašką ir ekstremumą, išreikštus raidėmis k ir m.

a) $x^2+2kx+3$ **b)** $x^2-(m+1)x$

19. Gudriai Pažymėję $t=x^2$ arba išskirdami pilnąjį kvadratą su x^2, raskite mažiausią reiškinio x^4-8x^2+20 reikšmę ir visus x, su kuriais ji pasiekiama.

20. Sandauga Atskliauskite ir raskite ekstremumo tašką bei ekstremumą:

a) $(x-2)(x+6)$;

b) $(x+1)(3-x)$.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Postūmis Duota $P(x) = x^2 - 6x + 4$. Raskite šių daugianarių ekstremumo tašką ir ekstremumą:

a) $P(x+2)$ **b)** $P(2x)$ **c)** $P(x) + P(x+2)$

22. Dvi galimybės Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ mažiausia reikšmė lygi 1, o $P(1) = 5$ ir $P(2) = 2$. Raskite visus tokius daugianarius.

23. Parametras Daugianario $P(x) = x^2 - 2mx + 3m$ mažiausia reikšmė priklauso nuo m. Su kuriuo m ši mažiausia reikšmė didžiausia ir kam ji lygi?

24. Tekstinis Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 10. Kraštinėse AB, BC, CD, DA pažymėti tokie taškai K, L, M, N, kad $AK = BL = CM = DN = x$. Keturkampis $KLMN$ yra kvadratas. Su kuriuo x jo plotas mažiausias ir kam jis lygus? Įrodykite, kad mažesnio ploto nebūna.

25. Be trupmenų Raskite ekstremumo tašką ir ekstremumą, pirmiausia išskyrę dvinario kvadratą $(px+q)^2$:

a) $4x^2 + 12x + 5$ **b)** $9x^2 - 6x - 2$ **c)** $-4x^2 + 4x$

26. Raidinis a Daugianaris $P(x) = ax^2 + 2x + 1$, $a \neq 0$.

a) Išskirkite pilnąjį kvadratą ir nurodykite, kada daugianaris turi minimumą, o kada – maksimumą.

b) Su kuriuo a ekstremumas lygus 0?

c) Su kuriuo a ekstremumo taškas lygus -2? Ar tai minimumas, ar maksimumas?

27. Parametras Duoti daugianariai $P(x) = x^2 - 2px + 5$ ir $Q(x) = x^2 + 4x + p + 3$.

a) Raskite jų minimumo taškus. Su kuriuo p jie sutampa?

b) Su kuriais p jų mažiausios reikšmės $P_{\min}$ ir $Q_{\min}$ lygios?

28. Iššūkis Reiškinys $S(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2$, kur a ir b – duoti skaičiai.

a) Raskite $x_{\min}$ ir $S_{\min}$, kai $a = 1$, $b = 7$.

b) Raskite $x_{\min}$ ir $S_{\min}$ bendruoju atveju (atsakymą išreikškite parametrais a ir b).

29. Tekstinis Teatro bilietas kainuoja 10 €, parduodama 200 bilietų. Kiekvieną kartą pabranginus bilietą 1 €, parduodama 10 bilietų mažiau. Kokia turi būti bilieto kaina, kad pajamos būtų didžiausios? Kokios tada bus pajamos?

30. Ar egzistuoja? Duoti daugianariai $P(x) = x^2 - 4x + 9$ ir $Q(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a) Raskite $P_{\min}$ ir $Q_{\max}$.

b) Ar suma $P(x) + Q(x)$ turi ekstremumą? Kodėl?

c) Raskite skirtumo $P(x) - Q(x)$ mažiausią reikšmę ir įrodykite, kad $P(x) > Q(x)$ su visais x.

Atsakymai

1. a) $x_{\min} = 1$, $P_{\min} = 5$. b) $x_{\max} = -3$, $P_{\max} = -4$. c) $x_{\min} = 0$, $P_{\min} = -7$. d) $x_{\max} = 2$, $P_{\max} = 6$. e) $x_{\min} = -5$, $P_{\min} = 0$. f) $x_{\max} = 4$, $P_{\max} = 0$.

2. a) $(x-3)^2+2$: $x_{\min} = 3$, $P_{\min} = 2$. b) $(x+2)^2-5$: -2; -5. c) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$: $-\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{4}$. d) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$: $\frac{5}{2}$; $-\frac{1}{4}$.

3. A–1, B–3, C–4, D–2.

4. $(x-4)^2 - 13$ (reikia atimti 16); $x_{\min} = 4$ (ne -4), $P_{\min} = -13$.

5. $-2(x-2)^2+5$; $a < 0$, todėl yra maksimumas: $x_{\max} = 2$, $P_{\max} = 5$.

6. a) $3(x-2)^2-5$: min., 2; -5. b) $-(x-3)^2+7$: maks., 3; 7. c) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$: min., $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. d) $-2(x+2)^2+8$: maks., -2; 8.

7. 18; 6; 3; 2; 3; 6; 18. Mažiausia 2 (kai $x = 3$). Taip: $P(x) \geq 2$ su visais x, $P(3) = 2$.

8. a) K. b) T. c) K. d) T. e) K. f) K.

9. a) $3(x-2)^2 - 1 = 3x^2 - 12x + 11$. b) $-2(x+1)^2 + 4 = -2x^2 - 4x + 2$. c) $\frac{1}{2}(x-4)^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$.

10. Pvz. $-(x+3)^2 + 4 = -x^2 - 6x - 5$ ir $-2(x+3)^2 + 4 = -2x^2 - 12x - 14$. Ne: maksimumas galimas tik tada, kai $a < 0$.

11. $b = -4$, $c = 5$; $P(x) = (x-2)^2 + 1$: $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = 1$.

12. $a = -1$, $b = 4$, $c = 1$; $P(x) = -(x-2)^2 + 5$: $x_{\max} = 2$, $P_{\max} = 5$.

13. a) $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = 1$. b) $P(5) = 28$, $P(-1) = 28$. c) Ne, nes $P(x) \geq 1$.

14. a) Ne. b) Ne. c) Taip, $x = -2$. d) Ne.

15. a) 36 (skaičiai 6 ir 6). b) -9 (skaičiai -3 ir 3).

16. Sienai statmenos kraštinės po 10 m, lygiagreti sienai – 20 m; plotas 200 m^2.

17. a) $b = 4$, $c = -1$. b) $b = 6$, $c = -2$. c) $c = 13$.

18. a) $x_{\min} = -k$, $P_{\min} = 3 - k^2$. b) $x_{\min} = \frac{m+1}{2}$, $P_{\min} = -\frac{(m+1)^2}{4}$.

19. $P_{\min} = 4$, kai $x = 2$ arba $x = -2$.

20. a) $x_{\min} = -2$, $P_{\min} = -16$. b) $-(x-1)^2 + 4$: $x_{\max} = 1$, $P_{\max} = 4$.

21. a) $x_{\min} = 1$, $P_{\min} = -5$. b) $x_{\min} = \frac{3}{2}$, $P_{\min} = -5$. c) $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = -8$.

22. $x^2 - 6x + 10$ ir $9x^2 - 30x + 26$.

23. $m = \frac{3}{2}$; mažiausia reikšmė tada lygi $\frac{9}{4}$.

24. $x = 5$, plotas 50.

25. a) $x_{\min} = -\frac{3}{2}$, $P_{\min} = -4$. b) $x_{\min} = \frac{1}{3}$, $P_{\min} = -3$. c) $x_{\max} = \frac{1}{2}$, $P_{\max} = 1$.

26. a) $a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2 + 1 - \frac{1}{a}$; $a > 0$ – minimumas, $a < 0$ – maksimumas, taškas $-\frac{1}{a}$, ekstremumas $1 - \frac{1}{a}$. b) $a = 1$. c) $a = \frac{1}{2}$, minimumas.

27. a) $x_{\min}(P) = p$, $x_{\min}(Q) = -2$; sutampa, kai $p = -2$. b) $p = 2$ arba $p = -3$.

28. a) $x_{\min} = 4$, $S_{\min} = 18$. b) $x_{\min} = \frac{a+b}{2}$, $S_{\min} = \frac{(a-b)^2}{2}$.

29. Kaina 15 €, pajamos 2250 €.

30. a) $P_{\min} = 5$, $Q_{\max} = 4$. b) Ne (suma lygi $-2x + 12$, ji neturi nei didžiausios, nei mažiausios reikšmės). c) $\frac{3}{2}$; $P(x) > Q(x)$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Pirma išskirkite pilnąjį kvadratą pačiame $P(x)$, o tada vietoj x įrašykite $x+2$, $2x$. c) dalyje atskliauskite ir sudėkite.

22. Mažiausia reikšmė 1 reiškia, kad pilnojo kvadrato pavidale $a(x-h)^2+k$ skaičius $k=1$. Įrašykite $x=1$ ir $x=2$ ir palyginkite gautas lygybes.

23. Išskirkite pilnąjį kvadratą x atžvilgiu ir mažiausią reikšmę užrašykite kaip m reiškinį. Tai vėl kvadratinis daugianaris, tik jo kintamasis – m.

24. Pritaikykite Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui KBL ($BK = 10 - x$) ir raskite KL^2.

25. Pirma užrašykite $4x^2 + 12x = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3$ ir t. t. Tada $2x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

26. Iškelkite a prieš skliaustus: $a\left(x^2 + \frac{2}{a}x\right) + 1$. Kam lygi pusė koeficiento prie x?

27. Išskirkite pilnąjį kvadratą abiejuose daugianariuose ($P = (x-p)^2 + \ldots$). b) dalyje gautą lygtį su p spręskite vėl išskirdami pilnąjį kvadratą.

28. Atskliauskite ir sudėkite: gausite $2x^2 - \ldots$. Iškelkite 2 ir išskirkite pilnąjį kvadratą; su a ir b elkitės kaip su skaičiais.

29. Jei kaina $10 + x$ eurų, tai bus parduota $200 - 10x$ bilietų. Pajamos = kaina · bilietų skaičius.

30. $P - Q = 2x^2 - 6x + 6$. Palyginkite $P_{\min}$ ir $Q_{\max}$ – ar jie sutampa su rastu skirtumu?

Sprendimai (21–30)

21. Pirma išskiriame pilnąjį kvadratą: $P(x) = x^2 - 6x + 4 = (x-3)^2 - 5$.
a) Vietoj x įrašome $x+2$: $P(x+2) = \big((x+2)-3\big)^2 - 5 = (x-1)^2 - 5$. Kadangi $(x-1)^2 \geq 0$, $P(x+2) \geq -5$, o $P(1+2) = -5$. Taigi $x_{\min} = 1$, $P_{\min} = -5$.
b) $P(2x) = (2x-3)^2 - 5$ ir $2x - 3 = 2\big(x - \frac{3}{2}\big)$, todėl $P(2x) = 4\big(x - \frac{3}{2}\big)^2 - 5 \geq -5$. Lygybė, kai $x = \frac{3}{2}$. Taigi $x_{\min} = \frac{3}{2}$, $P_{\min} = -5$.
c) $P(x) + P(x+2) = (x-3)^2 - 5 + (x-1)^2 - 5 = 2x^2 - 8x + 10 - 10 = 2x^2 - 8x = 2(x-2)^2 - 8 \geq -8$. Lygybė, kai $x = 2$. Taigi $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = -8$.
Patikra: $P(2) + P(4) = (4 - 12 + 4) + (16 - 24 + 4) = -4 - 4 = -8$ ✓

22. Kadangi daugianaris turi mažiausią reikšmę, tai $a > 0$ (kai $a < 0$, mažiausios reikšmės nėra). Pilnojo kvadrato pavidalu $P(x) = a(x-h)^2 + 1$, nes $P_{\min} = k = 1$. Žinome $P(1) = 5$ ir $P(2) = 2$:

$$a(1-h)^2 = 4, \qquad a(2-h)^2 = 1.$$

Pirmą lygybę užrašome kaip $a(1-h)^2 = 4 \cdot a(2-h)^2$, todėl, padaliję iš $a \neq 0$, gauname $(1-h)^2 = 4(2-h)^2 = \big(2(2-h)\big)^2$. Skaičių kvadratai lygūs, kai skaičiai lygūs arba priešingi:

- $1 - h = 2(2-h)$: $1 - h = 4 - 2h$, $h = 3$. Tada $a(2-3)^2 = 1$, $a = 1$.
- $1 - h = -2(2-h)$: $1 - h = -4 + 2h$, $3h = 5$, $h = \frac{5}{3}$. Tada $a\big(\frac{1}{3}\big)^2 = 1$, $a = 9$.

Abiem atvejais $a > 0$, todėl tinka abu. **Atsakymas:** $P(x) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$ arba $P(x) = 9\big(x - \frac{5}{3}\big)^2 + 1 = 9x^2 - 30x + 26$.
Patikra: $x^2 - 6x + 10$: $P(1) = 5$, $P(2) = 2$ ✓; $9x^2 - 30x + 26$: $P(1) = 5$, $P(2) = 36 - 60 + 26 = 2$ ✓

23. Išskiriame pilnąjį kvadratą x atžvilgiu: $P(x) = x^2 - 2mx + 3m = (x-m)^2 - m^2 + 3m$. Kadangi $(x-m)^2 \geq 0$, $P(x) \geq 3m - m^2$, o $P(m) = 3m - m^2$. Taigi $P_{\min} = 3m - m^2$ (tai m reiškinys). Dabar išskiriame pilnąjį kvadratą m atžvilgiu:

$$3m - m^2 = -\big(m^2 - 3m\big) = -\Big(m - \frac{3}{2}\Big)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

Kadangi $a = -1 < 0$, yra maksimumas: $m_{\max} = \frac{3}{2}$, didžiausia reikšmė $\frac{9}{4}$.
Atsakymas: $m = \frac{3}{2}$, tada mažiausia reikšmė lygi $\frac{9}{4}$. Patikra: $x^2 - 3x + \frac{9}{2} = \big(x - \frac{3}{2}\big)^2 + \frac{9}{4}$ ✓

24. Pagal Pitagoro teoremą $KL^2 = BK^2 + BL^2 = (10-x)^2 + x^2$, o $KLMN$ yra kvadratas, todėl plotas

$$S = x^2 + (10-x)^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x^2 - 10x) + 100 = 2(x-5)^2 - 50 + 100 = 2(x-5)^2 + 50.$$

Kadangi $(x-5)^2 \geq 0$, tai $S \geq 50$, o kai $x = 5$, gauname $S = 50$. **Atsakymas:** $x = 5$, plotas 50; mažesnio ploto nebūna, nes $S \geq 50$. Patikra: $x = 5$: $25 + 25 = 50$ ✓

25. a) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$, todėl $4x^2 + 12x + 5 = (2x+3)^2 - 4$. Kadangi $(2x+3)^2 \geq 0$, $P(x) \geq -4$. Lygybė, kai $2x + 3 = 0$, t. y. $x = -\frac{3}{2}$. $x_{\min} = -\frac{3}{2}$, $P_{\min} = -4$.
b) $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$, todėl $9x^2 - 6x - 2 = (3x-1)^2 - 3 \geq -3$. Lygybė, kai $3x - 1 = 0$, t. y. $x = \frac{1}{3}$. $x_{\min} = \frac{1}{3}$, $P_{\min} = -3$.
c) $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$, todėl $-4x^2 + 4x = -(2x-1)^2 + 1$. Kadangi $(2x-1)^2 \geq 0$, tai $-(2x-1)^2 \leq 0$ ir $P(x) \leq 1$. Lygybė, kai $x = \frac{1}{2}$. $x_{\max} = \frac{1}{2}$, $P_{\max} = 1$.
Patikra: c) $-4 \cdot \frac{1}{4} + 2 = 1$ ✓

26. a) $ax^2 + 2x + 1 = a\big(x^2 + \frac{2}{a}x\big) + 1$. Pusė koeficiento $\frac{2}{a}$ lygi $\frac{1}{a}$, todėl $x^2 + \frac{2}{a}x = \big(x + \frac{1}{a}\big)^2 - \frac{1}{a^2}$ ir

$$P(x) = a\Big(x + \frac{1}{a}\Big)^2 - \frac{1}{a} + 1.$$

Kai $a > 0$: $P(x) \geq 1 - \frac{1}{a}$, minimumas, $x_{\min} = -\frac{1}{a}$, $P_{\min} = 1 - \frac{1}{a}$. Kai $a < 0$: $P(x) \leq 1 - \frac{1}{a}$, maksimumas, $x_{\max} = -\frac{1}{a}$, $P_{\max} = 1 - \frac{1}{a}$.

b) $1-\frac{1}{a}=0$, todėl $\frac{1}{a}=1$, $a=1$.
c) $-\frac{1}{a}=-2$, todėl $\frac{1}{a}=2$, $a=\frac{1}{2}>0$, todėl minimumas ($P_{\min}=1-2=-1$).
Patikra: $a=1$: $(x+1)^2+0$ ✓; $a=\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}x^2+2x+1=\frac{1}{2}(x+2)^2-1$ ✓

27. a) $P(x)=x^2-2px+5=(x-p)^2+5-p^2$, todėl $x_{\min}=p$, $P_{\min}=5-p^2$. $Q(x)=x^2+4x+p+3=(x+2)^2-4+p+3=(x+2)^2+p-1$, todėl $x_{\min}=-2$, $Q_{\min}=p-1$. Taškai sutampa, kai $p=-2$.
b) $5-p^2=p-1$, t. y. $p^2+p=6$. Išskiriame pilnąjį kvadratą:

$$\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=6 \;\Rightarrow\; \left(p+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \;\Rightarrow\; p+\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2},$$

taigi $p=2$ arba $p=-3$.
Patikra: $p=2$: $P_{\min}=5-4=1$, $Q_{\min}=2-1=1$ ✓; $p=-3$: $P_{\min}=5-9=-4$, $Q_{\min}=-3-1=-4$ ✓

28. a) $S(x)=(x-1)^2+(x-7)^2=2x^2-16x+50=2(x^2-8x)+50=2(x-4)^2-32+50=2(x-4)^2+18$. Kadangi $(x-4)^2\ge 0$, tai $S\ge 18$; lygybė, kai $x=4$. $x_{\min}=4$, $S_{\min}=18$.
b) $S(x)=2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2=2\Big(x^2-(a+b)x\Big)+a^2+b^2=2\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2-\frac{(a+b)^2}{2}+a^2+b^2$. Kadangi $a^2+b^2-\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{2}=\frac{(a-b)^2}{2}$:

$$S(x)=2\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2+\frac{(a-b)^2}{2}\ge\frac{(a-b)^2}{2}.$$

$x_{\min}=\frac{a+b}{2}$, $S_{\min}=\frac{(a-b)^2}{2}$. Patikra: $a=1$, $b=7$: $x_{\min}=4$, $S_{\min}=\frac{36}{2}=18$ ✓

29. Jei kaina $10+x$ eurų, tai bus parduota $200-10x$ bilietų. Pajamos

$$\begin{aligned}S&=(10+x)(200-10x)=-10x^2+100x+2000=-10(x^2-10x)+2000\\&=-10(x-5)^2+250+2000=-10(x-5)^2+2250.\end{aligned}$$

Kadangi $(x-5)^2\ge 0$, tai $-10(x-5)^2\le 0$ ir $S\le 2250$; lygybė, kai $x=5$ ($a=-10<0$, maksimumas).
Atsakymas: kaina $10+5=15$ €, pajamos 2250 €. Patikra: $15\cdot 150=2250$ ✓

30. a) $P(x)=(x-2)^2+5$, todėl $P_{\min}=5$. $Q(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$, todėl $Q_{\max}=4$.
b) $P(x)+Q(x)=-2x+12$ – tai nebe kvadratinis daugianaris. Jo reikšmės gali būti kiek norima didelės ir kiek norima mažos (pvz., kai $x=-1000$ ir $x=1000$), todėl jis neturi nei didžiausios, nei mažiausios reikšmės.
c) $P(x)-Q(x)=2x^2-6x+6=2(x^2-3x)+6=2\big(x-\frac{3}{2}\big)^2-\frac{9}{2}+6=2\big(x-\frac{3}{2}\big)^2+\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2}>0$. Todėl $P(x)>Q(x)$ su visais x; skirtumo minimumas $\frac{3}{2}$, kai $x=\frac{3}{2}$. Be to, $P_{\min}=5>4=Q_{\max}$ – kiekviena P reikšmė ne mažesnė už 5, o kiekviena Q reikšmė ne didesnė už 4.
Patikra: $x=\frac{3}{2}$: $P=\frac{9}{4}-6+9=\frac{21}{4}$, $Q=-\frac{9}{4}+3+3=\frac{15}{4}$, skirtumas $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ ✓