Kvadratinis daugianaris

2 tema: pilnojo kvadrato išskyrimas – 30 užduočių

Priminimas: $x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$. Pilnojo kvadrato pavidalas: $a(x-h)^2 + k$.

1. Atpažink Kurie reiškiniai užrašyti pavidalu $a(x-h)^2 + k$? Šiems reiškiniams nurodykite a, h, k.

a) $(x-3)^2 + 5$ **c)** $(x-2)(x+2)$ **e)** $x^2 + 5$ **g)** $(x-1)^2 + (x+1)^2$

b) $2(x+1)^2 - 7$ **d)** $-(x+4)^2$ **f)** $3 - (x-1)^2$ **h)** $\frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$

2. Geometrija Kvadrato kraštinė x, šalia jo – stačiakampis, kurio kraštinės x ir 10.

a) Kaip šį stačiakampį perpjauti ir pridėti prie kvadrato, kad susidarytų „beveik kvadratas“?

b) Kokio ploto kvadratėlio trūksta iki didelio kvadrato? Užrašykite $x^2 + 10x$ pilnojo kvadrato pavidalu.

3. Užpildyk Įrašykite trūkstamus skaičius.

a) $x^2 + 8x = (x + \square)^2 - \square$ **c)** $x^2 + x = (x + \square)^2 - \square$

b) $x^2 - 12x = (x - \square)^2 - \square$ **d)** $x^2 - \frac{2}{3}x = (x - \square)^2 - \square$

4. Papildyk iki kvadrato Kokį skaičių reikia pridėti, kad gautume dvinario kvadratą? Užrašykite tą kvadratą.

a) $x^2 + 6x + \square$ **b)** $x^2 - 14x + \square$ **c)** $x^2 + 5x + \square$ **d)** $x^2 - x + \square$

5. Išskirk ($a = 1$) Užrašykite pavidalu $(x-h)^2 + k$.

a) $x^2 - 6x + 11$ **b)** $x^2 + 4x - 1$ **c)** $x^2 + 3x + 1$ **d)** $x^2 - 5x + 6$

6. Rask klaidą Mokinys rašo: $x^2 - 8x + 3 = (x-4)^2 + 16 + 3 = (x-4)^2 + 19$. Kur klaida? Užrašykite teisingai ir patikrinkite atskliausdami.

7. Rask klaidą ($a \neq 1$) Mokinys rašo: $2x^2 + 12x + 5 = 2(x^2 + 6x) + 5 = 2(x+3)^2 - 9 + 5 = 2(x+3)^2 - 4$. Raskite klaidą ir pataisykite.

8. Išskirk ($a \neq 1$) Užrašykite pavidalu $a(x-h)^2 + k$.

a) $3x^2 - 12x + 7$ **b)** $-x^2 + 6x - 2$ **c)** $2x^2 + 2x + 1$ **d)** $-2x^2 - 8x$

9. Atvirkščiai Atskliauskite ir užrašykite standartiniu pavidalu $ax^2 + bx + c$.

a) $2(x-3)^2 + 1$ **b)** $-(x+1)^2 + 4$ **c)** $\frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$

10. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Su bet kuriuo b galioja $x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$.

b) Reiškinys $x^2 - 10x + 25$ yra dvinario kvadratas.

c) $(x-3)^2 - 9 = x^2 - 6x$.

d) $2x^2 + 4x = 2(x+1)^2$.

11. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite jo pilnojo kvadrato pavidalą dešinėje.

A) $x^2 - 4x + 7$	1) $(x+2)^2 + 3$
B) $x^2 + 4x + 7$	2) $(x-2)^2 + 3$
C) $x^2 - 4x + 1$	3) $-(x-2)^2 - 3$
D) $-x^2 + 4x - 7$	4) $(x-2)^2 - 3$

12. Parametras Su kuriomis p reikšmėmis reiškinys yra dvinario kvadratas?

a) $x^2 + px + 16$ **b)** $9x^2 - 12x + p$

13. Raidiniai koeficientai Išskirkite pilnąjį kvadratą.

a) $x^2 + 2kx + 3$ **b)** $x^2 - (m+1)x$

14. Neatskliausk! Duota $P(x) = (x-3)^2 - 4$. Neatskliausdami apskaičiuokite $P(3)$, $P(5)$, $P(1)$ ir $P(3+t)$.

15. Rask koeficientus Raskite b ir c, jei:

a) $x^2 + bx + c = (x-5)^2 + 2$ **b)** $2x^2 + bx + c = 2(x+1)^2 - 3$

16. Su 1 tema Raskite $P(x) = x^2 + bx + c$, jei $P(0) = 3$ ir $P(1) = 0$. Užrašykite jį standartiniu ir pilnojo kvadrato pavidalais.

17. Rask nežinomuosius Su kuriais h ir c teisinga lygybė $(x+h)^2 - 7 = x^2 + 10x + c$?

18. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus kvadratinius daugianarius, kurių pilnojo kvadrato pavidale $h = 3$ ir $k = -2$. Užrašykite juos standartiniu pavidalu.

19. Gudriai Pažymėję $t = x^2$, išskirkite pilnąjį kvadratą: $x^4 + 4x^2 + 7$.

20. Iššūkis Įrodykite, kad su $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Formulę patikrinkite daugianariu $2x^2 - 8x + 3$: išskirkite pilnąjį kvadratą tiesiogiai ir pagal formulę.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Vienatinumas Įrodykite: jei $(x-h)^2 + k = (x-p)^2 + q$ su visais x, tai $h = p$ ir $k = q$.

22. Rask a, h, k Apie daugianarį $P(x) = a(x-h)^2 + k$ žinoma: $P(1) = P(5) = 7$ ir $P(3) = -1$. Raskite a, h, k.

23. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis reiškinys $x^2 + (m+2)x + m + 5$ yra dvinario kvadratas? Užrašykite tuos kvadratus.

24. Be trupmenų Užrašykite pavidalu $(px+q)^2 + r$, o po to – pavidalu $a(x-h)^2 + k$:

a) $4x^2 + 12x + 5$ **b)** $9x^2 - 6x - 2$

25. Raidinis a Išskirkite pilnąjį kvadratą: $ax^2 + 2x + 1$, $a \neq 0$.

26. Sveikieji skaičiai Įrodykite, kad jokiam natūraliajam n skaičius $n^2 + n + 1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

27. Mintinai Apskaičiuokite be skaičiuotuvo ir nedaugindami stulpeliu:

a) $103^2 - 6 \cdot 103 + 9$ **b)** $57^2 + 6 \cdot 57 + 9 - 3600$

28. Dvi galimybės Daugianarį $x^2 + bx + c$ užrašius pilnojo kvadrato pavidalu $(x - h)^2 + k$, gauta $h = k$; be to, $c = 6$. Raskite visas galimas b reikšmes.

29. Gudriai Įrodykite, kad $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$ yra kvadratinio trinario kvadratas (t. y. lygus $(x^2 + px + q)^2$).

30. Iššūkis Įrodykite tapatybę, kurioje nėra trupmenų: $4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)$. Pritaikykite ją daugianariui $3x^2 + 5x - 2$.

Atsakymai

1. Taip $(a;\ h;\ k)$: a) $(1;\ 3;\ 5)$, b) $(2;\ -1;\ -7)$, d) $(-1;\ -4;\ 0)$, e) $(1;\ 0;\ 5)$, f) $(-1;\ 1;\ 3)$, h) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 0\right)$. Ne: c), g).

2. b) 25; $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$.

3. a) 4; 16. b) 6; 36. c) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. d) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$.

4. a) 9; $(x+3)^2$. b) 49; $(x-7)^2$. c) $\frac{25}{4}$; $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$. d) $\frac{1}{4}$; $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

5. a) $(x-3)^2+2$. b) $(x+2)^2-5$. c) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$. d) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

6. $(x-4)^2-13$.

7. $2(x+3)^2-13$.

8. a) $3(x-2)^2-5$. b) $-(x-3)^2+7$. c) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$. d) $-2(x+2)^2+8$.

9. a) $2x^2-12x+19$. b) $-x^2-2x+3$. c) $\frac{1}{2}x^2-4x+6$.

10. a) T. b) T. c) T. d) K.

11. A–2, B–1, C–4, D–3.

12. a) $p = \pm 8$. b) $p = 4$.

13. a) $(x+k)^2+3-k^2$. b) $\left(x-\frac{m+1}{2}\right)^2-\frac{(m+1)^2}{4}$.

14. $-4;\ 0;\ 0;\ t^2-4$.

15. a) $b=-10$, $c=27$. b) $b=4$, $c=-1$.

16. $x^2-4x+3=(x-2)^2-1$.

17. $h=5$, $c=18$.

18. Pvz., $x^2-6x+7,\ 2x^2-12x+16$.

19. $(x^2+2)^2+3$.

20. $2x^2-8x+3=2(x-2)^2-5$.

21. Įrodymas – žr. sprendimus.

22. $a=2$, $h=3$, $k=-1$.

23. $m=4$: $(x+3)^2$; $m=-4$: $(x-1)^2$.

24. a) $(2x+3)^2-4=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-4$. b) $(3x-1)^2-3=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-3$.

25. $a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2+1-\frac{1}{a}$.

26. Įrodymas – žr. sprendimus.

27. a) 10 000. b) 0.

28. $b=-4$ arba $b=6$.

29. $(x^2+3x+1)^2$.

30. $12(3x^2+5x-2)=(6x+5)^2-49$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Atskliauskite abi puses ir palyginkite koeficientus prie x bei laisvuosius narius.

22. Iš lygybės $P(1) = P(5)$ gausite $(1-h)^2 = (5-h)^2$. Kada dviejų skaičių kvadratai lygūs?

23. Trinaris $x^2 + Bx + C$ yra dvinario kvadratas, kai $C = \left(\frac{B}{2}\right)^2$.

24. $4x^2 = (2x)^2$, todėl ieškokite kvadrato $(2x+q)^2$. Tada $2x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

25. Iškelkite a: $a\left(x^2 + \frac{2}{a}x\right) + 1$. Kam lygi pusė koeficiento prie x?

26. Palyginkite $n^2 + n + 1$ su n^2 ir su $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

27. Atpažinkite $(x-3)^2$ ir $(x+3)^2$, kai $x = 103$ ir $x = 57$.

28. Atskliaudę $(x-h)^2 + k$ gausite $c = h^2 + k$. Įrašykite $k = h$, o gautą lygtį spręskite išskirdami pilnąjį kvadratą.

29. Atskirai sudauginkite $x(x+3)$ ir $(x+1)(x+2)$, tada pažymėkite $t = x^2 + 3x$.

30. Atskliauskite dešinę pusę. Pritaikydami imkite $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$.

Sprendimai (21–30)

21. Kairė pusė: $x^2 - 2hx + h^2 + k$, dešinė: $x^2 - 2px + p^2 + q$. Jos lygios su visais x, todėl atitinkami koeficientai lygūs. Prie x: $-2h = -2p$, t. y. $h = p$; laisvieji nariai: $h^2 + k = p^2 + q$, o kadangi $h = p$, tai $k = q$. **Išvada:** pilnojo kvadrato pavidalas užrašomas vieninteliu būdu.

22. $P(1) = a(1-h)^2 + k$, $P(5) = a(5-h)^2 + k$. Iš $P(1) = P(5)$ ir $a \neq 0$: $(1-h)^2 = (5-h)^2$. Skaičiai, kurių kvadratai lygūs, yra lygūs arba priešingi:

- $1 - h = 5 - h$ – neįmanoma ($1 \neq 5$);
- $1 - h = -(5-h) = h - 5$, todėl $2h = 6$, $h = 3$.

$P(3) = a \cdot 0 + k = -1$, todėl $k = -1$. $P(1) = a \cdot 4 - 1 = 7$, todėl $a = 2$. **Atsakymas:** $P(x) = 2(x-3)^2 - 1$. Patikra: $P(5) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ ✓

23. Kadangi $x^2 + Bx + C = \left(x + \frac{B}{2}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4}$, trinaris yra dvinario kvadratas tada ir tik tada, kai $C = \frac{B^2}{4}$. Čia $B = m + 2$, $C = m + 5$:

$$\frac{(m+2)^2}{4} = m + 5 \;\Rightarrow\; m^2 + 4m + 4 = 4m + 20 \;\Rightarrow\; m^2 = 16 \;\Rightarrow\; m = 4 \text{ arba } m = -4.$$

$m = 4$: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$; $\quad m = -4$: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

24. a) $4x^2 + 12x = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3$, o $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$. Todėl $4x^2 + 12x + 5 = (2x+3)^2 - 4$. Kadangi $2x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$, tai $(2x+3)^2 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$, todėl reiškinys lygus $4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4$.
b) $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$, todėl $9x^2 - 6x - 2 = (3x-1)^2 - 3 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 3$.

25. $ax^2 + 2x + 1 = a\left(x^2 + \frac{2}{a}x\right) + 1$. Skaičiaus $\frac{2}{a}$ pusė lygi $\frac{1}{a}$, todėl $x^2 + \frac{2}{a}x = \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2}$. Tada

$$ax^2 + 2x + 1 = a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 - a \cdot \frac{1}{a^2} + 1 = a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 1 - \frac{1}{a}.$$

Patikra su $a = 1$: $(x+1)^2 + 0 = x^2 + 2x + 1$ ✓

26. Kadangi n – natūralusis skaičius, $n > 0$, todėl $n^2 < n^2 + n + 1$ ir $n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (nes $n < 2n$). Taigi $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$. Tarp gretimų natūraliųjų skaičių n ir $n+1$ kito natūraliojo skaičiaus nėra, todėl tarp jų kvadratų nėra jokio kito natūraliojo skaičiaus kvadrato. Vadinasi, $n^2 + n + 1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

27. a) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$; kai $x = 103$: $(103-3)^2 = 100^2 = 10\,000$.
b) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$; kai $x = 57$: $60^2 - 3600 = 3600 - 3600 = 0$.

28. $(x-h)^2 + k = x^2 - 2hx + h^2 + k$, todėl $b = -2h$, $c = h^2 + k$. Kai $k = h$ ir $c = 6$: $h^2 + h = 6$. Išskiriame pilnąjį kvadratą:

$$\left(h + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 6 \;\Rightarrow\; \left(h + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \;\Rightarrow\; h + \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2},$$

taigi $h = 2$ arba $h = -3$, o kadangi $b = -2h$, tai $b = -4$ arba $b = 6$.
Patikra: $(x-2)^2 + 2 = x^2 - 4x + 6$ ✓, $(x+3)^2 - 3 = x^2 + 6x + 6$ ✓

29. $x(x+3) = x^2 + 3x$, $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$. Pažymėję $t = x^2 + 3x$:

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = (x^2 + 3x + 1)^2.$$

Patikra su $x = 1$: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$, $1 + 3 + 1 = 5$ ✓

30. Dešinė pusė: $(2ax+b)^2 - b^2 + 4ac = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 4a(ax^2 + bx + c)$ ✓
Kai $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$: $b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49$, todėl

$$12(3x^2 + 5x - 2) = (6x+5)^2 - 49.$$

Patikra: $(6x+5)^2 - 49 = 36x^2 + 60x - 24 = 12(3x^2 + 5x - 2)$ ✓