Kvadratinis daugianaris

1 tema: kvadratinis daugianaris – 30 užduočių

Visur $P(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$. $P(\square)$ – daugianario reikšmė, kai vietoj *kiekvieno* x įrašome tai, kas skliaustuose.

1. Atpažink Kurie reiškiniai yra kvadratiniai daugianariai? Pagrįskite.

a) $3x^2 - x + 1$ **c)** $x(x-4)$ **e)** $-\frac{x^2}{2}$ **g)** $\frac{1}{x^2} + 3$

b) $5 - 2x$ **d)** $(x+1)^2 - x^2$ **f)** $x^3 - x^2 + 1$ **h)** $\sqrt{2}\,x^2 - \pi x$

2. Lentelė Užpildykite lentelę.

Daugianaris	a	b	c
$4x^2 - 7x + 2$			
$5 - x^2$			
$3x - x^2$			
$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} - 1$			
	-2	0	7
	$\frac{1}{3}$	-1	0

3. Geometrija Stačiakampio kraštinių ilgiai $x+2$ ir $2x-1$ ($x > \frac{1}{2}$). Jo plotą pažymėkime $S(x)$.

a) Užrašykite $S(x)$ standartiniu pavidalu ir nurodykite a, b, c.

b) Apskaičiuokite $S(3)$ ir patikrinkite, sudauginę kraštinių ilgius.

4. Standartinis pavidalas Užrašykite standartiniu pavidalu ir nurodykite koeficientus. Ar visi gauti reiškiniai yra kvadratiniai daugianariai?

a) $(2x-1)(x+3)$ **b)** $(x-2)^2 - 3x(x-1)$ **c)** $(x+1)(x-1) - (x-1)^2$

5. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite kiekvieną atsakymą.

a) Reiškinys $x^2 + bx + c$ yra kvadratinis daugianaris su bet kuriais b ir c.

b) Daugianario $5 - 3x^2$ vyriausiasis koeficientas lygus 5.

c) Daugianario $(x-3)^2$ laisvasis narys lygus -9.

d) Bet kurio kvadratinio daugianario $P(0) = c$.

6. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis reiškinys yra kvadratinis daugianaris?

a) $(m-2)x^2 + mx + 1$ **b)** $(m^2-9)x^2 + (m+3)x - 1$ **c)** $(m^2+1)x^2 - 2x + m$

7. Reikšmės Duota $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$. Apskaičiuokite $P(0)$, $P(-1)$, $P(2)$ ir $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

8. Rask klaidą Duota $P(x) = x^2 - 4x + 1$. Mokinys skaičiuoja:

$$P(-3) = -3^2 - 4 \cdot (-3) + 1 = -9 + 12 + 1 = 4.$$

Kur klaida? Apskaičiuokite teisingai.

9. Reiškinys skliaustuose Duota $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Raskite ir suprastinkite:

a) $P(a)$ **b)** $P(a-1)$ **c)** $P(2x)$ **d)** $P(-x)$

10. Palygink Duota $P(x) = x^2 - x$. Raskite $P(a+1)$ ir $P(a)+1$. Ar šie reiškiniai lygūs? Su kuriomis a reikšmėmis jų reikšmės sutampa?

11. Rask koeficientą Duota $P(x) = x^2 + bx + 4$ ir $P(2) = 0$. Raskite b.

12. Rask koeficientą Duota $P(x) = ax^2 - 3x + 1$ ir $P(-1) = 6$. Raskite a ir užrašykite daugianarį.

13. Sugretink Duota $P(x) = x^2 - 5x + 6$. Kiekvienam užrašui kairėje parinkite reikšmę dešinėje.

A) $P(0)$	1) 0
B) $P(1)$	2) 2
C) $P(-1)$	3) 6
D) $P(3)$	4) 12

14. Du nežinomieji Duota $P(x) = x^2 + bx + c$, $P(0) = -2$, $P(1) = 3$. Raskite b ir c.

15. Trys reikšmės Raskite $P(x) = ax^2 + bx + c$, jei $P(0) = 1$, $P(1) = 0$ ir $P(-1) = 6$.

16. Lygčių sistema Raskite $P(x) = ax^2 + bx + c$, jei $P(1) = 2$, $P(2) = 7$ ir $P(3) = 16$. Atsakymą patikrinkite.

17. Ar egzistuoja? Ar yra *kvadratinis* daugianaris, kurio $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ ir $P(-1) = -1$? Pagrįskite.

18. Gudriai Apie $P(x) = ax^2 + bx + c$ žinoma: $P(1) = 5$, $P(-1) = 1$. Nežinodami a, b, c atskirai, raskite b ir sumą $a + c$.

19. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus kvadratinius daugianarius, kurių $P(0) = -3$ ir $P(1) = 0$. Kiek tokių daugianarių yra?

20. Iššūkis Duota $P(x) = (k+1)x^2 - 2kx + k - 3$.

a) Nurodykite koeficientus a, b, c. Su kuriomis k reikšmėmis $P(x)$ yra kvadratinis daugianaris?

b) Įrodykite, kad $P(1)$ nepriklauso nuo k. Ar gali būti $P(1) = 0$?

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Skirtumas Raskite kvadratinį daugianarį $P(x)$, jei su visais x teisinga lygybė $P(x+1) - P(x) = 2x + 3$ ir $P(0) = 1$.

22. Lygios reikšmės Duota $P(x) = x^2 + bx + c$, $P(1) = P(3)$ ir $P(0) = 5$. Raskite $P(2)$.

23. Lyginis daugianaris Duota $P(x) = ax^2 + bx + c$ ir $P(-x) = P(x)$ su visais x.

a) Įrodykite, kad $b = 0$.

b) Raskite tokį $P(x)$, jei dar $P(1) = 3$ ir $P(2) = 9$.

24. Tapatybė Raskite visus kvadratinius daugianarius, kuriems su visais x teisinga lygybė $P(2x) = 4P(x)$.

25. Neatskliausk! Duota $P(x) = (x-3)(2x+5) - (x+1)^2$. Neatskliausdami raskite

a) koeficientų sumą $a + b + c$;

b) reiškinio $a - b + c$ reikšmę.

Tada atskliauskite ir patikrinkite.

26. Sveikieji skaičiai Žinoma, kad $P(0)$, $P(1)$ ir $P(2)$ – sveikieji skaičiai.

a) Ar būtinai a, b, c – sveikieji? Pateikite pavyzdį arba įrodykite.

b) Įrodykite, kad skaičiai c, $a+b$ ir $2a$ – sveikieji.

27. Ar egzistuoja? Ar yra kvadratinis daugianaris, kurio $P(1)=1$, $P(2)=4$, $P(3)=9$ ir $P(4)=17$?

28. Parametras Duota $P(x)=(m-1)x^2+(m+1)x+m$. Su kuriomis m reikšmėmis $P(x)$ yra kvadratinis daugianaris ir $P(1)=P(-1)$?

29. Daugianaris daugianaryje Duota $P(x)=x^2-2x$.

a) Apskaičiuokite $P(P(1))$ ir $P(P(P(1)))$.

b) Ar $P(P(x))$ yra kvadratinis daugianaris? Pagrįskite.

30. Iššūkis Raskite visus kvadratinius daugianarius, kuriems su visais x teisinga lygybė $P(x+1)=P(-x)$. Kuris iš jų tenkina sąlygas $P(0)=2$ ir $P(2)=6$?

Atsakymai

1. a), c), e), h).

2. $(a;\ b;\ c)$: $(4;\ -7;\ 2)$, $(-1;\ 0;\ 5)$, $(-1;\ 3;\ 0)$, $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ -1\right)$; $-2x^2+7$; $\frac{1}{3}x^2-x$.

3. a) $S(x)=2x^2+3x-2$; $a=2$, $b=3$, $c=-2$. b) $S(3)=25$.

4. a) $2x^2+5x-3$. b) $-2x^2-x+4$. c) $2x-2$ – ne kvadratinis.

5. a) T. b) K. c) K. d) T.

6. a) $m\neq 2$. b) $m\neq\pm 3$. c) Su visais m.

7. $-5;\ 0;\ -3;\ -6$.

8. $(-3)^2=9$, ne -9; $P(-3)=22$.

9. a) a^2+2a-3. b) a^2-4. c) $4x^2+4x-3$. d) x^2-2x-3.

10. a^2+a ir a^2-a+1; nelygūs; sutampa, kai $a=\frac{1}{2}$.

11. $b=-4$.

12. $a=2$; $2x^2-3x+1$.

13. A–3, B–2, C–4, D–1.

14. $b=4$, $c=-2$.

15. $2x^2-3x+1$.

16. $2x^2-x+1$.

17. Ne.

18. $b=2$, $a+c=3$.

19. Pvz., x^2+2x-3; be galo daug: $ax^2+(3-a)x-3$.

20. a) $a=k+1$, $b=-2k$, $c=k-3$; $k\neq -1$. b) $P(1)=-2$; ne.

21. $P(x)=x^2+2x+1$.

22. $P(2)=1$.

23. b) $P(x)=2x^2+1$.

24. $P(x)=ax^2$, $a\neq 0$.

25. a) -18. b) -12.

26. a) Ne, pvz., $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$.

27. Ne.

28. $m=-1$.

29. a) 3; 3. b) Ne.

30. $P(x)=ax^2-ax+c$; $2x^2-2x+2$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Užrašykite $P(x) = ax^2 + bx + c$ ir atskliauskite $P(x+1) - P(x)$. Kada du daugianariai lygūs su *visais* x?

22. Užrašykite lygybę $P(1) = P(3)$ per b ir c – kai kas susiprastins.

23. a) Apskaičiuokite $P(-x) - P(x)$. b) Kadangi $b = 0$, lieka du nežinomieji.

24. Užrašykite $P(2x)$ ir $4P(x)$ ir palyginkite koeficientus prie x^2, prie x ir laisvuosius narius.

25. Kam lygi suma $a + b + c$, jei $P(x) = ax^2 + bx + c$? Įrašykite tinkamą x. O $a - b + c$?

26. a) Ieškokite tarp daugianarių su trupmeniniais koeficientais, pvz., tokio, kad $P(0) = P(1) = 0$. b) Išreikškite c, $a + b$ ir $2a$ per $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$.

27. Trys reikšmės visiškai nustato a, b, c. Raskite juos ir patikrinkite ketvirtąją reikšmę.

28. Apskaičiuokite $P(1)$ ir $P(-1)$. Nepamirškite sąlygos, kad daugianaris turi būti kvadratinis.

29. a) Skaičiuokite „iš vidaus į išorę“. b) Koks bus didžiausias x laipsnis, kai $x^2 - 2x$ pakelsite kvadratu?

30. Atskliauskite $P(x+1)$ ir $P(-x)$ ir sulyginkite koeficientus.

Sprendimai (21–30)

21. Tarkime, $P(x) = ax^2 + bx + c$. Tada

$$P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c,$$

$$P(x+1) - P(x) = 2ax + (a+b).$$

Turi būti $2ax + (a+b) = 2x + 3$ su visais x, todėl koeficientai lygūs: $2a = 2$ ir $a + b = 3$, t. y. $a = 1$, $b = 2$. Be to, $c = P(0) = 1$. **Atsakymas:** $P(x) = x^2 + 2x + 1$.
Patikra: $(x+1)^2 + 2(x+1) + 1 - (x^2 + 2x + 1) = 2x + 3$ ✓

22. $P(1) = 1 + b + c$, $P(3) = 9 + 3b + c$. Iš $P(1) = P(3)$: $1 + b + c = 9 + 3b + c$, t. y. $-2b = 8$, $b = -4$. $c = P(0) = 5$. Taigi $P(x) = x^2 - 4x + 5$ ir $P(2) = 4 - 8 + 5 = 1$.

23. a) $P(-x) = ax^2 - bx + c$, todėl $P(-x) - P(x) = -2bx$. Šis skirtumas lygus 0 su visais x, taigi ir su $x = 1$: $-2b = 0$, $b = 0$.
b) $P(x) = ax^2 + c$: $P(1) = a + c = 3$, $P(2) = 4a + c = 9$. Atėmę: $3a = 6$, $a = 2$, $c = 1$. **Atsakymas:** $P(x) = 2x^2 + 1$.

24. $P(2x) = a(2x)^2 + b \cdot 2x + c = 4ax^2 + 2bx + c$, $4P(x) = 4ax^2 + 4bx + 4c$. Lygybė su visais x reiškia lygius koeficientus: $2b = 4b$ ir $c = 4c$, todėl $b = 0$, $c = 0$. **Atsakymas:** $P(x) = ax^2$, $a \neq 0$. Patikra: $a(2x)^2 = 4ax^2$ ✓

25. a) $P(1) = a + b + c$, todėl koeficientų suma $= P(1) = (1-3)(2+5) - (1+1)^2 = -14 - 4 = -18$.
b) $P(-1) = a - b + c = (-1-3)(-2+5) - 0^2 = -12$.
Patikra: $P(x) = 2x^2 - x - 15 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 - 3x - 16$; $1 - 3 - 16 = -18$, $1 + 3 - 16 = -12$ ✓

26. a) Ne. Pavyzdžiui, $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$: $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(2) = 2 - 1 = 1$ – sveikieji, bet $a = \frac{1}{2}$.
b) $c = P(0)$ – sveikasis. $a + b = P(1) - c$ – dviejų sveikųjų skirtumas. Iš $P(2) = 4a + 2b + c$: $2a = P(2) - c - 2(a+b) = P(2) - 2P(1) + P(0)$ – sveikasis.

27. Gauname: $a + b + c = 1$, $4a + 2b + c = 4$, $9a + 3b + c = 9$. Atėmę gretimas lygtis: $3a + b = 3$, $5a + b = 5$, todėl $2a = 2$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Vienintelis daugianaris su tokiomis trimis reikšmėmis – $P(x) = x^2$, bet jo $P(4) = 16 \neq 17$. **Atsakymas:** tokio daugianario nėra.

28. Daugianaris kvadratinis, kai $m - 1 \neq 0$, t. y. $m \neq 1$. $P(1) = (m-1) + (m+1) + m = 3m$, $P(-1) = (m-1) - (m+1) + m = m - 2$. Iš $3m = m - 2$: $m = -1$ (tinka, nes $m \neq 1$). Patikra: $P(x) = -2x^2 - 1$, $P(1) = P(-1) = -3$ ✓

29. a) $P(1) = 1 - 2 = -1$, $P(-1) = 1 + 2 = 3$, $P(3) = 9 - 6 = 3$. Taigi $P(P(1)) = P(-1) = 3$, $P(P(P(1))) = P(3) = 3$.
b) $P(P(x)) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)$, o $(x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ – yra narys x^4. Todėl $P(P(x))$ – ketvirtojo laipsnio daugianaris, **ne** kvadratinis.

30. $P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)$, $P(-x) = ax^2 - bx + c$. Sulyginame koeficientus. Prie x: $2a + b = -b$, t. y. $b = -a$; laisvieji nariai: $a + b + c = c$, t. y. $a + b = 0$ – ta pati sąlyga. Tinka visi daugianariai $P(x) = ax^2 - ax + c$, $a \neq 0$.
Iš $P(0) = c = 2$ ir $P(2) = 4a - 2a + 2 = 6$: $a = 2$. **Atsakymas:** $P(x) = 2x^2 - 2x + 2$.
Patikra: $P(x+1) = 2x^2 + 2x + 2 = P(-x)$ ✓