Kvadratinis daugianaris

11 tema: daugianarių konstravimas

1. Kurį pavidalą rinktis?

Duota	Rašome
trys reikšmės	ax^2+bx+c
ekstremumas k, kai $x=h$	$a(x-h)^2+k$
$P(u)=P(v),\ u\neq v$	$h=\frac{u+v}{2}$
šaknys x_1, x_2	$a(x-x_1)(x-x_2)$
šaknų suma s, sandauga p	$a(x^2-sx+p)$
viena šaknis x_1 ($D=0$)	$a(x-x_1)^2$

Kiek nežinomųjų pavidale – tiek reikia sąlygų. Šaknys ar ekstremumas „suvalgo“ dvi sąlygas – lieka rasti a.

2. Pvz. 1: žinomas ekstremumas

Sąlyga: $P_{\min}=-3$, kai $x=2$; $P(0)=5$.

① **Pavidalas:** $P(x)=a(x-2)^2-3$ ($h=2, k=-3$)

② **Lygtis iš $P(0)=5$:** $a\cdot 4-3=5 \Rightarrow a=2$

③ **Atsakymas:**

$P(x)=2(x-2)^2-3=\boxed{2x^2-8x+5}$

④ **Patikra:** $a=2>0$ – tikrai minimumas ✓

$x_e=\frac{8}{4}=2$ ✓, $P(2)=-3$ ✓, $P(0)=5$ ✓

Daugianarių konstravimas

Uždavinys: rasti kvadratinį daugianarį $P(x)=ax^2+bx+c$, kai žinomos kai kurios jo savybės (reikšmės, šaknys, ekstremumas, simetrija ir kt.).

① pavidalas → ② sąlygos → lygtys → ③ išsprendžiame → ④ **patikra**

3. Pvz. 2: žinomos šaknys

Sąlyga: šaknys -1 ir 3; $P(1)=8$.

① **Pavidalas:** $P(x)=a(x+1)(x-3)$

② **Iš $P(1)=8$:** $a\cdot 2\cdot(-2)=8 \Rightarrow a=-2$

③ **Atsakymas:**

$P(x)=-2(x+1)(x-3)=\boxed{-2x^2+4x+6}$

④ **Patikra:** $P(-1)=0$ ✓, $P(3)=0$ ✓,

$P(1)=-2+4+6=8$ ✓

Atsargiai su ženklais: šaknis -1 → dauginamasis $(x+1)$.

4. Pvz. 3: lygios reikšmės (simetrija)

Sąlyga: $P(-1)=P(5)=7$; $P(0)=2$.

① **Simetrija:** $h=\frac{-1+5}{2}=2$,

todėl $P(x)=a(x-2)^2+k$

② **Lygtys:**

$$\begin{cases} P(5)=9a+k=7 \\ P(0)=4a+k=2 \end{cases} \Rightarrow \quad 5a=5,\ a=1,\ k=-2$$

③ **Atsakymas:** $P(x)=(x-2)^2-2=\boxed{x^2-4x+2}$

④ **Patikra:** $P(-1)=1+4+2=7$ ✓

$P(5)=25-20+2=7$ ✓, $P(0)=2$ ✓

5. Pvz. 4–7

Pvz. 4. Trys reikšmės: $P(0)=3, P(1)=2, P(-1)=8$.

① $P(x)=ax^2+bx+c,\ c=P(0)=3$

② $\begin{cases} a+b+3=2 \\ a-b+3=8 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=-3$

③ $\boxed{P(x)=2x^2-3x+3}$

④ $P(1)=2-3+3=2$ ✓, $P(-1)=2+3+3=8$ ✓

Pvz. 5. Viena šaknis: $D=0$, šaknis 3, $P(0)=-18$.

① $P(x)=a(x-3)^2$

② $P(0)=9a=-18 \Rightarrow a=-2$

③ $P(x)=-2(x-3)^2=\boxed{-2x^2+12x-18}$

④ $D=144-4\cdot(-2)\cdot(-18)=0$ ✓, $P(3)=0$ ✓

Pvz. 6. Suma ir sandauga: suma 5, sandauga 6, $P(0)=12$.

① $P(x)=a(x^2-5x+6)$ (atvirkštinė Vijeto)

② $P(0)=6a=12 \Rightarrow a=2$

③ $\boxed{P(x)=2x^2-10x+12}$

④ $D=4>0$ ✓; šaknys $2, 3$: $2+3=5, 2\cdot 3=6$ ✓

Pvz. 7. Kai daugianario nėra: $P_{\min}=3$ ir $P(1)=0$.

Minimumas 3 reiškia, kad $P(x)\geq 3$ su **visais** x, todėl $P(1)=0$ **neįmanoma**.

✗ Tokio daugianario **nėra** – sąlygos prieštarauja viena kitai.

Todėl patikra būtina!