Kvadratinis daugianaris

9 tema: kvadratinio daugianario skaidymas dauginamaisiais

1. Skaidymo formulė

Jei x_1, x_2 – daugianario ax^2+bx+c šaknys, tai

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

Įrodymas (Vijeto: $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$, $\frac{c}{a}=x_1x_2$):

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}\right) && \text{①}\\ &= a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right) && \text{②}\\ &= a\left(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right) && \text{③}\\ &= a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right) && \text{④}\\ &= a(x-x_1)(x-x_2) && \text{⑤}\end{aligned}$$

① iškeliame a ② Vijeto ③ atskliaudžiame ④ grupuojame ⑤ iškeliame $(x-x_1)$

$D=0$	$a(x-x_1)^2$ $(4x^2-12x+9=(2x-3)^2)$
$D<0$	**neskaidomas** (x^2+x+1)

2. I būdas: per diskriminantą

$6x^2+11x+4$

① $D=11^2-4\cdot6\cdot4=121-96=25$

② $x_{1,2}=\frac{-11\pm5}{12}$: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{4}{3}$

③ $6x^2+11x+4=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$

④ Atsikratome trupmenų: $6=2\cdot3$ „įnešame“ į skliaustus

$$2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\cdot3\left(x+\tfrac{4}{3}\right)=\boxed{(2x+1)(3x+4)}$$

Patikra: $(2x+1)(3x+4)=6x^2+11x+4$ ✓

Tinka **visada**, kai $D\geq0$. Nepamirškite a: $2x^2-7x+3\neq(x-3)(x-\frac{1}{2})$.

Skaidymas dauginamaisiais

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

3. II būdas: vidurinio nario skaidymas

$6x^2+11x+4$

$$\begin{aligned} 6x^2+\mathbf{11}x+4 &= 6x^2+\mathbf{3}x+\mathbf{8}x+4 && \text{①}\\ &= \underbrace{3x(2x+1)}_{6x^2+3x}+\underbrace{4(2x+1)}_{8x+4} && \text{②}\\ &= \boxed{(3x+4)(2x+1)} && \text{③}\end{aligned}$$

① išskaidome vidurinį narį, ② grupuojame po du, ③ iškeliame bendrą skliaustą.

Abiejose grupėse turi atsirasti **tas pats skliaustas** $(2x+1)$.

Bet kodėl $3x+8x$**, o ne** $5x+6x$**?**
→ algoritmas 4 šakoje.

4. Kaip skaidyti vidurinį narį?

① Sudauginame kraštinius koeficientus: $a\cdot c=6\cdot4=\mathbf{24}$.

② Ieškome dviejų skaičių m ir n:

$$\boxed{m\cdot n=a\cdot c=24,\qquad m+n=b=11}$$

$m\cdot n$	$1\cdot24$	$2\cdot12$	$\mathbf{3\cdot8}$	$4\cdot6$
$m+n$	25	14	**11** ✓	10

③ Išskaidome $11x=3x+8x$ ④ grupuojame po du.

Kodėl taip yra: sandaugos $(3x+4)(2x+1)$ vidurinis narys $=3x\cdot1+4\cdot2x$, o $3\cdot8=(3\cdot2)\cdot(4\cdot1)=6\cdot4=a\cdot c$.

Ženklai: $ac<0$ – m, n priešingų ženklų; $ac>0$ – abu to paties ženklo kaip b.

5. Dar vienas pavyzdys abiem būdais: $2x^2-7x+3$

I būdas: $D=49-24=25$, $x_{1,2}=\frac{7\pm5}{4}$: 3 ir $\frac{1}{2}$

$$2(x-3)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)=(x-3)(2x-1)$$

II būdas: $ac=6$, $m+n=-7$: $m=-1$, $n=-6$

$$2x^2-x-6x+3=x(2x-1)-3(2x-1)=(x-3)(2x-1)$$

II būdas greitas, kai šaknys „gražios“; I būdas tinka visada. Kai $D<0$, daugianaris neskaidomas.