Kvadratinis daugianaris

8 tema: atvirkštinė Vijeto teorema

1. Atvirkštinė Vijeto teorema

Skaičiai u ir v yra daugianario $\boxed{x^2-(u+v)x+uv}$ šaknys.

Kodėl? Atskliaudę gauname būtent šį daugianarį:

$$(x-u)(x-v)=x^2-(u+v)x+uv$$

Sandauga lygi 0, kai $x=u$ arba $x=v$.

Pavyzdys: skaičiai 3 ir 4

$$3+4=7,\quad 3\cdot 4=12 \longrightarrow x^2-7x+12$$

Patikra: $9-21+12=0$, $16-28+12=0$ ✓

2. Sudarome daugianarį iš šaknų

Šaknys $u, v \Rightarrow \boxed{x^2-(u+v)x+uv}$

Visi daugianariai su šiomis šaknimis: $a(x-u)(x-v)$.

šaknys	suma; sandauga	daugianaris
2 ir 5	7; 10	$x^2-7x+10$
-3 ir 4	1; -12	x^2-x-12
2 ir $\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$; 1	$2x^2-5x+2$ $(\cdot 2)$

Su papildoma sąlyga: šaknys -2 ir 5, $P(0)=20$:

$P(x)=a(x+2)(x-5)$,

$P(0)=-10a=20 \Rightarrow a=-2$,

$\boxed{P(x)=-2x^2+6x+20}$

Vien šaknų neužtenka: a randame iš papildomos sąlygos.

Šaknys ⇄ daugianaris

u, v – šaknys $\iff x^2-(u+v)x+uv=(x-u)(x-v)$

3. Sistema „suma ir sandauga“

$$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases}$$

Pagal atvirkštinę Vijeto teoremą x ir y – lygties

$$t^2-7t+10=0$$

sprendiniai (suma → koeficientas prie t su minusu, sandauga → laisvasis narys).

$D=49-40=9$, $t=\frac{7\pm 3}{2}$: $t_1=2$, $t_2=5$.

Sistemos sprendiniai: $\boxed{(2;5)}$ ir $\boxed{(5;2)}$

Patikra: $2+5=7$, $2\cdot 5=10$ ✓

4. Tokių skaičių gali ir nebūti

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=5 \end{cases} \Rightarrow t^2-2t+5=0$$

$D=4-20=-16<0 \Rightarrow$ realiųjų sprendinių **nėra**, todėl ir **sistema sprendinių neturi**: nėra dviejų realiųjų skaičių, kurių suma 2, o sandauga 5.

Kitaip: $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=4-20<0$ – neįmanoma.

$D>0$	dvi poros $(t_1;t_2)$ ir $(t_2;t_1)$
$D=0$	viena pora $x=y$ $(x+y=6, xy=9$: $(3;3))$
$D<0$	sprendinių **nėra**

5. Taikymas

Sistema su neigiamais skaičiais:

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-8 \end{cases} \Rightarrow t^2+2t-8=0$$

$D=36$, $t_1=2$, $t_2=-4 \Rightarrow (2;-4)$ ir $(-4;2)$.

Dėmesio: iš $x+y=-2$ gauname $+2t$ (priešingas ženklas).

Šaknys, kai $u+v=6$ ir $u^2+v^2=20$:

$(u+v)^2=u^2+v^2+2uv$: $36=20+2uv \Rightarrow uv=8$.

Daugianaris: $\boxed{x^2-6x+8}$, šaknys 2 ir 4.

Patikra: $2+4=6$, $4+16=20$ ✓