# Kvadratinis daugianaris

7 tema: Vijeto teorema (šaknų suma ir sandauga)

## 1. Ką rodo pavyzdžiai

| daugianaris | šaknys | suma | sandauga |
|---|---|---|---|
| $x^2 - 5x + 6$ | $2;\ 3$ | $5 = -(-5)$ | $6 = 6$ |
| $2x^2 - 10x + 12$ | $2;\ 3$ | $5 = \frac{10}{2}$ | $6 = \frac{12}{2}$ |
| $x^2 + 5x + 6$ | $-2;\ -3$ | $-5$ | $6$ |

Kai $a = 1$: suma $= -b$, sandauga $= c$.

Kai $a \neq 1$: suma $= -\dfrac{b}{a}$, sandauga $= \dfrac{c}{a}$.

Spėjimas: šaknų suma ir sandauga priklauso tik nuo koeficientų – šaknų skaičiuoti nereikia!

## 2. Teorema ir įrodymas

Jei $P(x) = ax^2 + bx + c$ ir $D \geq 0$, tai jo šaknims $x_1$, $x_2$:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

**Įrodymas** (6 tema: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$):

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

sandaugoje: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

Kai $D = 0$: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (dviguboji šaknis).

## Vijeto teorema

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad (D \geq 0)$$

## 3. Taikymas: šaknų neskaičiuojant

$P(x) = 2x^2 - 7x + 3$: $D = 49 - 24 = 25 \geq 0$ ✓

$$x_1 + x_2 = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}, \qquad x_1 x_2 = \frac{3}{2}$$

**Kita šaknis**, kai viena žinoma ($x_1 = 3$, nes $P(3) = 0$):

$$x_2 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} \qquad \text{arba} \qquad x_2 = \frac{3}{2} : 3 = \frac{1}{2}$$

Patikra: $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 3 = 0$ ✓

**Šaknų ženklai** (dvi skirtingos šaknys):

| | | |
|---|---|---|
| $x_1 x_2 < 0$: | priešingų ženklų | $2x^2 + x - 3$ |
| $x_1 x_2 > 0$, $x_1 + x_2 > 0$: | abi teigiamos | $x^2 - 5x + 6$ |
| $x_1 x_2 > 0$, $x_1 + x_2 < 0$: | abi neigiamos | $x^2 + 5x + 6$ |

## 4. Simetriniai reiškiniai

Reiškiniai, kurie **nesikeičia** sukeitus $x_1$ ir $x_2$, išreiškiami per $x_1 + x_2$ ir $x_1 x_2$, o juos randame pagal Vijeto teoremą:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \qquad (x_1 x_2 \neq 0)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

Kodėl: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$ – atimame $2x_1 x_2$.

**Pvz.** $2x^2 - 7x + 3$: $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{3}{2}$:

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{37}{4}, \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7/2}{3/2} = \frac{7}{3}$$

Patikra su 3 ir $\frac{1}{2}$: $9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$, $\frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ ✓

## 5. Dažnos klaidos ir ryšiai

**Pirma patikrinkite $D \geq 0$!**

$x^2 + 2x + 5$: $D = 4 - 20 = -16 < 0$ – realiųjų šaknų **nėra**, todėl išvada „suma $-2$, sandauga $5$“ – ✗ klaidinga.

**Ženklai:** suma $= -\dfrac{b}{a}$, sandauga $= \dfrac{c}{a}$ (be minuso).

**Ryšys su 3–5 temomis:**

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = x_e$$

Ekstremumo taškas – **per vidurį tarp šaknų** (5 tema: $P(x_1) = P(x_2) = 0$).

Pvz. $x^2 - 5x + 6$: šaknys 2 ir 3, $x_e = \frac{5}{2}$.