Kvadratinis daugianaris

6 tema: kvadratinio daugianario šaknys

1. Kai $b = 0$: $ax^2 + c = 0$

Išreiškiame x^2:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 = -\frac{c}{a}}$$

$2x^2 - 18 = 0$	$x^2 = 9$	$x = \pm 3$ **(dvi šaknys)**
$-2x^2 = 0$	$x^2 = 0$	$x = 0$ **(viena šaknis)**
$x^2 + 4 = 0$	$x^2 = -4$	**šaknų nėra**, nes $x^2 \geq 0$

Iš $x^2 = 9$ – **dvi** šaknys: 3 ir -3.

2. Kai $c = 0$, $b \neq 0$: $ax^2 + bx = 0$

Iškeliame bendrąjį daugiklį x:

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

Sandauga lygi 0, kai **bent vienas** daugiklis lygus 0:

$$x = 0 \quad \text{arba} \quad ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Pvz. $3x^2 - 12x = 0$

$$3x(x - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ arba } x = 4}$$

Patikra: $3 \cdot 0 - 0 = 0$, $3 \cdot 16 - 48 = 0$ ✓

× Negalima dalyti iš x: $3x^2 = 12x \Rightarrow 3x = 12$ – taip **prarandame** šaknį $x = 0$.

Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ šaknys

r – **šaknis**, jei $P(r) = 0$. Šaknis randame spręsdami lygtį $P(x) = 0$.

$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ – **daugianario šaknys**: $P(x_1) = P(x_2) = 0$

3. Pilnoji lygtis (visi $a, b, c \neq 0$)

$P(x) = 3x^2 + 5x - 2$, sprendžiame $P(x) = 0$:

①	$3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{12} = 0$	pilnasis kvadratas
②	$3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{12}$	laisvąjį narį į dešinę
③	$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$	dalijame iš $a = 3$
④	$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{7}{6}$	$\frac{49}{36} > 0$
⑤	$x = -\frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}$	

$P(x)$ šaknys: $\boxed{x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2}$

①: $3\left(x^2 + \frac{5}{3}x\right) - 2 = 3\left(\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right) - 2$

Patikra: $P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2 = 0$, $P(-2) = 12 - 10 - 2 = 0$

Tie patys žingsniai ①–⑤ su raidėmis – 4 šakoje.

4. Šaknų formulės išvedimas

$P(x) = 0$, t. y. $ax^2 + bx + c = 0$:

①	$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = 0$	4 tema
②	$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a}$	į dešinę
③	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$	dalijame iš a
④	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$	kai $D \geq 0$
⑤	$x = \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$	$D = b^2 - 4ac$

④ kaip $x^2 = t$ (1 šakoje): reikia $D \geq 0$.

5. To paties $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$ šaknys pagal formulę

① koeficientai: $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$

② $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$

③ $D = 49 > 0$ – dvi šaknys, $\sqrt{D} = 7$

④ $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 7}{6}$

⑤ $P(x)$ šaknys: $x_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{-12}{6} = -2$ ✓

Kiek šaknų? Tai lemia $\sqrt{D}$ formulėje $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$:

$D > 0$: $\sqrt{D} > 0$ – **dvi** šaknys (su „+“ ir su „−“)

$D = 0$: $\sqrt{D} = 0$ – **viena** šaknis $x = -\frac{b}{2a}$

$D < 0$: $\sqrt{D} \notin \mathbb{R}$ – realiųjų šaknų **nėra**

Pvz., $4x^2 + 4x + 1$: $D = 0$, $x = -\frac{1}{2}$; $x^2 + x + 1$: $D = -3$, šaknų nėra.