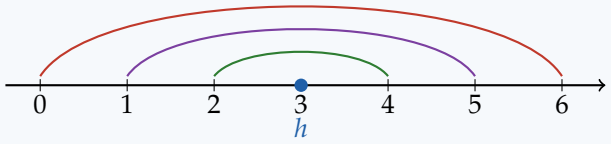
Kvadratinis daugianaris

5 tema: simetriškos reikšmės

1. Ką reiškia „simetriškos reikšmės“?

$P(x) = 2(x-3)^2 + 1$, ekstremumo taškas $h = 3$.



x:	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$:	19	9	3	1	3	9	19

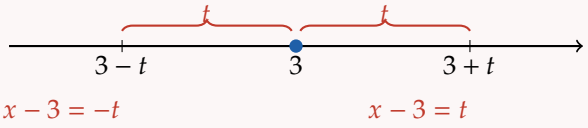
$P(2) = P(4) = 3$, $P(1) = P(5) = 9$, $P(0) = P(6) = 19$.

Skaičiai 2 ir 4 **vienodai nutolę** nuo $h = 3$ (po 1) – jie **simetriški** h **atžvilgiu**. Jų reikšmės **lygios**.

Kai du skaičiai vienodai nutolę nuo ekstremumo taško į abi puses, jų daugianario reikšmės **lygios**.

2. Kodėl $P(3+t) = P(3-t)$?

Vaizdas: daugianaris „mato“ tik skliaustą $x-3$ – **atstumą nuo 3 su ženklu**.



$x - 3 = -t$ $\qquad$ $x - 3 = t$

Skliaustas lygus t arba $-t$, o $(-t)^2 = t^2$ – kvadratas ženklą „pamiršta“.

Algebra:

$$P(3+t) = 2(3+t-3)^2 + 1 = 2t^2 + 1$$
$$P(3-t) = 2(3-t-3)^2 + 1 = 2(-t)^2 + 1 = 2t^2 + 1$$

Todėl $\boxed{P(3+t) = P(3-t)}$ su **kiekvienu** t.

Simetrija ekstremumo taško h atžvilgiu

$$P(h+t) = P(h-t) \qquad P(u) = P(v),\ u \neq v \ \Rightarrow\ h = \frac{u+v}{2}$$

3. Bendrai: $P(h+t) = P(h-t)$

Tegul $P(x) = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$ (h – ekstremumo taškas).

$$P(h+t) = a(h+t-h)^2 + k = at^2 + k$$
$$P(h-t) = a(h-t-h)^2 + k = a(-t)^2 + k = at^2 + k$$

$\boxed{P(h+t) = P(h-t) \text{ su kiekvienu } t}$

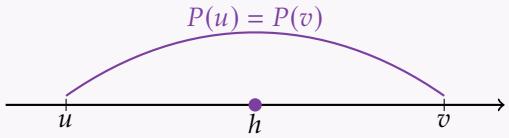
Kaip rasti simetrišką skaičių? Skaičiui u simetriškas h atžvilgiu skaičius yra

$$v = 2h - u \qquad (h \text{ – per vidurį tarp } u \text{ ir } v)$$

Pvz., $h = 3$, $u = 1$: $v = 6 - 1 = 5$, todėl $P(1) = P(5)$.

Lygybė teisinga ir tada, kai $a < 0$ (maksimumas), ir tada, kai $t < 0$.

4. Jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $h = \frac{u+v}{2}$



per vidurį

Įrodymas. $P(u) = P(v)$ reiškia

$$a(u-h)^2 + k = a(v-h)^2 + k \qquad -k,\ :a\ (a \neq 0)$$
$$(u-h)^2 = (v-h)^2 \qquad \text{lygūs kvadratai}$$

Skaičiai lygūs arba priešingi:

① $u - h = v - h \ \Rightarrow\ u = v$: ✗ atmetame ($u \neq v$);

② $u - h = -(v-h) \Rightarrow 2h = u + v \Rightarrow \boxed{h = \frac{u+v}{2}}$.

5. Taikymas

Ekstremumo taškas iš dviejų lygių reikšmių:

$P(1) = P(7) \ \Rightarrow h = \frac{1+7}{2} = 4$

$P(-4) = P(2) \Rightarrow h = \frac{-4+2}{2} = -1$

$P(0) = P(-6) \Rightarrow h = \frac{0+(-6)}{2} = -3$

Kodėl būtina $u \neq v$? $P(3) = P(3)$ teisinga visada, todėl apie h nieko nesako.

Ryšys su 4 tema: $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$P(0) = c, \qquad P\left(-\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{a^2} - b \cdot \frac{b}{a} + c = c.$$

Taigi $P(0) = P\left(-\frac{b}{a}\right)$, todėl (kai $b \neq 0$)

$$h = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a} \quad \checkmark$$

Ta pati formulė kaip $x_e = -\frac{b}{2a}$ – gauta **neišskiriant** pilnojo kvadrato.