Kvadratinis daugianaris

4 tema: diskriminantas ir ekstremumo formulės

1. Iš kur h ir k? (2 ir 3 temos)

Išskiriame pilnąjį kvadratą (2 tema):

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Lyginame su pavidalu $a(x-h)^2+k$ (3 tema):

$$a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2+\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$\boxed{h=-\frac{b}{2a}} \qquad \boxed{k=-\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

Kodėl **minusas** prie h? $x+\frac{b}{2a}=x-\left(-\frac{b}{2a}\right)$, kaip $(x+4)^2=(x-(-4))^2$ 3 temoje.

2. Diskriminantas D

Skaitiklyje vis kartojasi reiškinys b^2-4ac, todėl jis turi vardą:

$$\boxed{D=b^2-4ac}$$ – **diskriminantas**

(lot. *discriminare* – „atskirti“: jo ženklas atskiria atvejus.)

Pavyzdžiai (D gali būti bet kokio ženklo):

x^2-5x+6: $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1>0$

$2x^2-4x+2$: $D=(-4)^2-4\cdot2\cdot2=0$

$-x^2+2x-5$: $D=2^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=-16<0$

Koeficientus įrašome **su ženklais** ir skliaustuose: čia $a=-1$, ne 1; $(-5)^2=25$, ne -25.

Ekstremumo formulės

$$x_\text{e}=-\frac{b}{2a}, \qquad P_\text{e}=-\frac{D}{4a}, \qquad D=b^2-4ac$$

3. Formulės

Pilnojo kvadrato pavidalas su diskriminantu:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

Todėl (3 tema: ekstremumo taškas h, ekstremumas k):

$$\boxed{x_\text{e}=h=-\frac{b}{2a}} \qquad \boxed{P_\text{e}=k=-\frac{D}{4a}}$$

$a>0$ (minimumas)	$a<0$ (maksimumas)
$x_\text{min}=-\frac{b}{2a}$, $P_\text{min}=-\frac{D}{4a}$	$x_\text{max}=-\frac{b}{2a}$, $P_\text{max}=-\frac{D}{4a}$

Kitas būdas rasti P_e: įrašyti x_e į daugianarį, $P_\text{e}=P(x_\text{e})$.

4. Pavyzdžiai

$P(x)=2x^2-8x+3$ $\quad(a=2,\ b=-8,\ c=3)$

$x_\text{e}=-\frac{-8}{2\cdot2}=2$, $\quad D=(-8)^2-4\cdot2\cdot3=40$,

$P_\text{e}=-\frac{40}{4\cdot2}=-5$. Patikra: $P(2)=8-16+3=-5$ ✓

$a=2>0 \Rightarrow \boxed{x_\text{min}=2,\ P_\text{min}=-5}$

$Q(x)=-x^2+2x-5$ $\quad(a=-1,\ b=2,\ c=-5)$

$x_\text{e}=-\frac{2}{2\cdot(-1)}=1$, $\quad D=2^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=-16$,

$Q_\text{e}=-\frac{-16}{4\cdot(-1)}=-4$. $\quad$ Patikra: $Q(1)=-4$ ✓

$a=-1<0 \Rightarrow \boxed{x_\text{max}=1,\ Q_\text{max}=-4}$

$-\frac{b}{2a}$: kai $b=-8$, tai $-b=8$.

5. Ką rodo a ir D ženklai? ($P_\text{e}=-\frac{D}{4a}$)

	$D<0$	$D=0$	$D>0$
$a>0$ (minimumas)	$P_\text{min}>0$	$P_\text{min}=0$	$P_\text{min}<0$
$a<0$ (maksimumas)	$P_\text{max}<0$	$P_\text{max}=0$	$P_\text{max}>0$

Pavyzdžiai:

x^2-5x+6: $\quad a>0, D=1>0 \Rightarrow P_\text{min}=-\frac{1}{4}$

$2x^2-4x+2$: $\quad D=0 \Rightarrow P_\text{min}=0$

$-x^2+2x-5$: $\quad a<0, D<0 \Rightarrow P_\text{max}=-4$

$P_\text{e}=0$ tada ir tik tada, kai $D=0$ $\quad$ (tuomet $P(x)=a(x-x_\text{e})^2$, pvz., $2x^2-4x+2=2(x-1)^2$).