Kvadratinis daugianaris

3 tema: mažiausia ir didžiausia reikšmė (ekstremumas)

1. Mažiausia reikšmė: $P(x) = 3(x-5)^2 - 1$

Įrodome, kad $P(x) \geq -1$ su visais x:

$$\begin{aligned} (x-5)^2 &\geq 0 && \text{kvadratas neneigiamas} \\ 3(x-5)^2 &\geq 0 && \cdot 3 \text{ (teigiamas) – ženklas nesikeičia} \\ 3(x-5)^2 - 1 &\geq -1 && \text{atimame 1 iš abiejų pusių} \\ P(x) &\geq -1 \end{aligned}$$

Reikšmė -1 **tikrai įgyjama:** kai $x-5=0$, t. y. $x=5$, $P(5) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1$.

$\boxed{x_{\min} = 5}$ – **minimumo taškas** (ką įrašome)

$\boxed{P_{\min} = -1}$ – **minimumas** (ką gauname)

2. Didžiausia reikšmė: $P(x) = -2(x+4)^2 + 7$

Įrodome, kad $P(x) \leq 7$ su visais x:

$$\begin{aligned} (x+4)^2 &\geq 0 && \text{kvadratas neneigiamas} \\ -2(x+4)^2 &\leq 0 && \cdot(-2) \text{ – } \textbf{ženklas keičiasi!} \\ -2(x+4)^2 + 7 &\leq 7 && \text{pridedame 7} \\ P(x) &\leq 7 \end{aligned}$$

Reikšmė 7 tikrai įgyjama: kai $x+4=0$, t. y. $x=-4$, $P(-4) = -2 \cdot 0^2 + 7 = 7$.

$\boxed{x_{\max} = -4}$ – **maksimumo taškas**

$\boxed{P_{\max} = 7}$ – **maksimumas**

Dėmesio: $(x+4)^2 = (x-(-4))^2$, todėl taškas -4, ne 4.

Ekstremumas

$P(x) = a(x-h)^2 + k$

3. Apibendriname: sąvokos

ekstremumo taškas (ką įrašome – x)	**ekstremumas** (ką gauname – P)
minimumo taškas $x_{\min}$	minimumas $P_{\min}$
maksimumo taškas $x_{\max}$	maksimumas $P_{\max}$

Minimumas ir maksimumas vadinami **ekstremumais**, o jų taškai – **ekstremumo taškais**.

Reikia įrodyti, kad:

① nelygybė teisinga su *visais* x ($P(x) \geq -1$);

② reikšmė pasiekiama ($P(5) = -1$).

Vien $P(5) = -1$ nieko neįrodo – reikia ir ①!

4. Skaitome iš pavidalo

Pirmiausia užrašome $a(x-h)^2 + k$ ir žiūrime į a **ženklą**.

daugianaris	a	atsakymas
$2(x-1)^2 + 5$	$2 > 0$	$x_{\min} = 1$, $P_{\min} = 5$
$-(x+3)^2 - 4$	$-1 < 0$	$x_{\max} = -3$, $P_{\max} = -4$
$4x^2 - 7$ $(h=0)$	$4 > 0$	$x_{\min} = 0$, $P_{\min} = -7$
$6 - \frac{1}{2}(x-2)^2$	$-\frac{1}{2} < 0$	$x_{\max} = 2$, $P_{\max} = 6$

Kai $a > 0$, didžiausios reikšmės **nėra**;
kai $a < 0$, mažiausios reikšmės **nėra**.

5. Bendras atvejis: $P(x) = a(x-h)^2 + k$

$a > 0$ (yra minimumas)

$$\begin{aligned} (x-h)^2 &\geq 0 \\ a(x-h)^2 &\geq 0 && a > 0 \text{ – ženklas nesikeičia} \\ a(x-h)^2 + k &\geq k \\ P(x) &\geq k \end{aligned}$$

Lygybė gaunama, kai $x = h$: $P(h) = k$.

$\boxed{x_{\min} = h, \qquad P_{\min} = k}$

$a < 0$ (yra maksimumas)

$$\begin{aligned} (x-h)^2 &\geq 0 \\ a(x-h)^2 &\leq 0 && a < 0 \text{ – ženklas keičiasi} \\ a(x-h)^2 + k &\leq k \\ P(x) &\leq k \end{aligned}$$

Lygybė gaunama, kai $x = h$: $P(h) = k$.

$\boxed{x_{\max} = h, \qquad P_{\max} = k}$

Ekstremumo taškas $= h$ (kai skliaustas lygus 0), ekstremumas $= k$, rūšį lemia a **ženklas**.