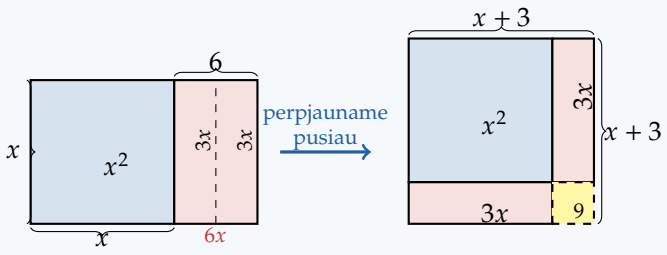
Kvadratinis daugianaris

2 tema: pilnojo kvadrato išskyrimas

1. Ką reiškia $x^2 + 6x$? (geometrija)



Juostą $6x$ perpjauname į dvi juostas $3x$ ir pridedame prie dviejų kraštinių. Iki kvadrato $(x+3)^2$ trūksta kampo $3 \cdot 3 = 9$:

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$$

Patikra: $(x+3)^2 - 9 = x^2 + 6x + 9 - 9 = x^2 + 6x$ ✓

2. Formulė ($a = 1$)

Su bet kuriuo b: juostą dalijame pusiau, trūksta kampo $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

$$\boxed{x^2 + bx = \left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2}\right)^2}$$

Kodėl teisinga (atskliaudžiame dešinę pusę):

$$\left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \tfrac{b^2}{4} - \tfrac{b^2}{4} = x^2 + bx \checkmark$$

Taisyklė: ① imame **pusę koeficiento prie** x (su ženklu); ② rašome $(x + \text{pusė})^2$; ③ **atimame pusės kvadratą**.

Atskliaudus $(x + \frac{b}{2})^2$ atsiranda $+\frac{b^2}{4}$, todėl jį atimame.

Pilnojo kvadrato išskyrimas

$$ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k$$

3. Pavyzdžiai ($a = 1$)

Neigiamas b: -8 pusė yra -4

$$x^2 - 8x = (x-4)^2 - (-4)^2 = (x-4)^2 - 16$$

Nelyginis b: 3 pusė yra $\frac{3}{2}$

$$x^2 + 3x = \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}$$

Trupmeninis b: $\frac{3}{5}$ pusė yra $\frac{3}{10}$

$$x^2 + \tfrac{3}{5}x = \left(x + \tfrac{3}{10}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{10}\right)^2 = \left(x + \tfrac{3}{10}\right)^2 - \tfrac{9}{100}$$

Pusės kvadratas teigiamas: $(-4)^2 = 16$, todėl rašome -16.

4. Kai $a \neq 1$

Planas: ① iškeliame a ② išskiriame kvadratą ③ atskliaudžiame.

Be laisvojo nario:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 20x &= 2(x^2 + 10x) && ① \\ &= 2\big((x+5)^2 - 25\big) && ② \\ &= 2(x+5)^2 - 50 && ③ \end{aligned}$$

Su laisvuoju nariu (c paliekame nuošalyje):

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 1 &= 3(x^2 - 4x) + 1 && ① \\ &= 3\big((x-2)^2 - 4\big) + 1 && ② \\ &= 3(x-2)^2 - 12 + 1 && ③ \\ &= 3(x-2)^2 - 11 \end{aligned}$$

Dauginame ir $-\left(\frac{b}{2}\right)^2$: $3 \cdot (-4) = -12$, ne -4!

5. Bendras išvedimas (tie patys žingsniai su raidėmis), $a \neq 0$

a) $ax^2 + bx$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) && ① \\ &= a\left(\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2}\right) && ② \ \tfrac{b}{a} \text{ pusė yra } \tfrac{b}{2a} \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} && ③ \ a \cdot \tfrac{b^2}{4a^2} = \tfrac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

b) $ax^2 + bx + c$ (pridedame c prie a) rezultato)

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c \\ &= \boxed{a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2 - 4ac}{4a}} \end{aligned}$$

Pavidalas $a(x-h)^2 + k$, kur

$$h = -\frac{b}{2a}, \qquad k = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Patikra 4 šakos pavyzdžiu $3x^2 - 12x + 1$: $h = -\frac{-12}{6} = 2$, $k = 1 - \frac{144}{12} = -11 \Rightarrow 3(x-2)^2 - 11$ ✓