Kvadratinis daugianaris

Lapas 3. Mažiausia ir didžiausia reikšmė

9 klasė

Lapas turi tris dalis. I dalyje išmoksime rasti mažiausią ir didžiausią daugianario reikšmę. II dalyje tai, ką išmokome, gaus vardus. III dalyje eisime atgal: iš žinomos mažiausios ar didžiausios reikšmės sudarysime patį daugianarį.

I dalis. Kaip rasti mažiausią ir didžiausią reikšmę

Visa ši dalis remiasi vienu faktu.

Įrankis 1 (kvadratas neneigiamas)

Su kiekvienu realiuoju t teisinga $t^2 \geq 0$; be to, $t^2 = 0$ tik tada, kai $t = 0$.

Įrodymas. Jei $t > 0$, tai $t^2 = t \cdot t$ – dviejų teigiamų skaičių sandauga, ji teigiama. Jei $t < 0$, tai $t \cdot t$ – dviejų neigiamų skaičių sandauga, ji irgi teigiama. Jei $t = 0$, tai $t^2 = 0$. ■

Toliau lipsime laiptais: kiekviename laiptelyje – tik vienas naujas dalykas. Sprendimą visada rašome *grandine*: nuo kvadrato iki viso daugianario. Pratimai sudaryti *grandinėmis*: kiekviename pakeistas tik vienas dalykas. Sekite, ką kiekvienas pakeitimas daro atsakymui – tai ir yra svarbiausia.

1 laiptelis: $x^2 + k$ ir $-x^2 + k$

Pavyzdys 1 (1 laiptelis)

Raskite mažiausią arba didžiausią daugianario reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama:

a) $P(x) = x^2 - 5$ b) $Q(x) = 7 - x^2$

Sprendimas.

a) $x^2 \geq 0$, $x^2 - 5 \geq -5$, todėl $P(x) \geq -5$. Lygybė, kai $x = 0$. Mažiausia reikšmė -5, kai $x = 0$. Didžiausios nėra: kuo didesnis x, tuo didesnė reikšmė.

b) $x^2 \geq 0$, $-x^2 \leq 0$, $7 - x^2 \leq 7$, todėl $Q(x) \leq 7$. Lygybė, kai $x = 0$. Didžiausia reikšmė 7, kai $x = 0$. Mažiausios nėra.

Komentaras. b) dalyje dauginome iš -1 – iš *neigiamo* skaičiaus, todėl nelygybės ženklas apsivertė: $\geq$ virto $\leq$. Todėl gavome ne mažiausią, o didžiausią reikšmę.

Pratimai 1. Kiekviename pratime, palyginti su ankstesniu, pakeistas *vienas* dalykas. Raskite mažiausią arba didžiausią reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama, ir pasakykite: kas pasikeitė sąlygoje ir ką tai pakeitė atsakyme?

a) $P(x) = x^2$
b) $P(x) = x^2 + 3$
c) $P(x) = x^2 - 3$
d) $P(x) = -x^2$
e) $P(x) = -x^2 + 3$
f) $P(x) = 3 - x^2$

2 laiptelis: $(x-h)^2+k$ ir $-(x-h)^2+k$

Įrankis 1 tinka bet kuriam t – ir $t = x-4$, ir $t = 2x-3$. Lygybė bus tada, kai skliaustai lygūs nuliui.

Pavyzdys 2 (2 laiptelis)

Raskite mažiausią arba didžiausią daugianario reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama:

a) $P(x) = (x-4)^2+1$ b) $Q(x) = -(x+2)^2+3$ c) $R(x) = (2x-3)^2-1$

Sprendimas.

a) $(x-4)^2 \geq 0$, $(x-4)^2+1 \geq 1$, todėl $P(x) \geq 1$. Lygybė, kai $x-4=0$, t. y. $x=4$. Mažiausia 1, kai $x=4$.
b) $(x+2)^2 \geq 0$, $-(x+2)^2 \leq 0$, $-(x+2)^2+3 \leq 3$, todėl $Q(x) \leq 3$. Lygybė, kai $x=-2$. Didžiausia 3, kai $x=-2$.
c) $(2x-3)^2 \geq 0$, $(2x-3)^2-1 \geq -1$, todėl $R(x) \geq -1$. Lygybė, kai $2x-3=0$, t. y. $x=\frac{3}{2}$. Mažiausia -1, kai $x=\frac{3}{2}$.

Komentaras. Dažna klaida a) dalyje – atsakyti „kai $x=-4$“, nes „skliaustuose yra -4“. Tinkamas x randamas iš lygties „skliaustai lygūs nuliui“: $x-4=0$, $x=4$. Pasitikrinkite: $P(4)=0+1=1$.

Pratimai 2. Kiekviename pratime, palyginti su ankstesniu, pakeistas *vienas* dalykas. Raskite mažiausią arba didžiausią reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama, ir pasakykite: kas pasikeitė sąlygoje ir ką tai pakeitė atsakyme?

a) $P(x) = (x-2)^2$
b) $P(x) = (x+2)^2$
c) $P(x) = (x+2)^2-5$
d) $P(x) = -(x+2)^2-5$
e) $P(x) = -(2x+4)^2-5$
f) $P(x) = -(2x+3)^2-5$
g) $P(x) = -(3-x)^2-5$

3 laiptelis: $a(x-h)^2+k$

Grandinėje atsiranda vienas naujas žingsnis – daugyba iš a. Jei $a>0$, ženklas lieka; jei $a<0$ – apsiverčia.

Pavyzdys 3 (3 laiptelis)

Raskite mažiausią arba didžiausią daugianario reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama:

a) $P(x) = 3(x-2)^2+4$
b) $Q(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2+2$
c) $R(x) = 5-2(x-3)^2$
d) $S(x) = 2(3-x)^2+1$

Sprendimas.

a) $(x-2)^2 \geq 0$, $3(x-2)^2 \geq 0$, $3(x-2)^2+4 \geq 4$, todėl $P(x) \geq 4$. Lygybė, kai $x=2$. Mažiausia 4, kai $x=2$.
b) $(x-6)^2 \geq 0$, $-\frac{1}{2}(x-6)^2 \leq 0$, $-\frac{1}{2}(x-6)^2+2 \leq 2$, todėl $Q(x) \leq 2$. Lygybė, kai $x=6$. Didžiausia 2, kai $x=6$.
c) $(x-3)^2 \geq 0$, $-2(x-3)^2 \leq 0$, $5-2(x-3)^2 \leq 5$, todėl $R(x) \leq 5$. Lygybė, kai $x=3$. Didžiausia 5, kai $x=3$.
d) $(3-x)^2 \geq 0$, $2(3-x)^2 \geq 0$, $2(3-x)^2+1 \geq 1$, todėl $S(x) \geq 1$. Lygybė, kai $3-x=0$, t. y. $x=3$. Mažiausia 1, kai $x=3$.

Komentaras. Pastebėkite: pavidale $a(x-h)^2+k$ ieškomas x visada lygus h, o reikšmė – k; a ženklas pasako, ar tai mažiausia, ar didžiausia reikšmė. Bet atsakymą vis tiek pagrįskite grandine.

Pratimai 3. Kiekviename pratime, palyginti su ankstesniu, pakeistas *vienas* dalykas. Raskite mažiausią arba didžiausią reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama, ir pasakykite: kas pasikeitė sąlygoje ir ką tai pakeitė atsakyme?

a) $P(x) = (x-1)^2 + 4$
b) $P(x) = 3(x-1)^2 + 4$
c) $P(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 4$
d) $P(x) = -3(x-1)^2 + 4$
e) $P(x) = 4 - 3(x-1)^2$
f) $P(x) = 4 - 3(1-x)^2$
g) $P(x) = 3x^2 + 4$
h) $P(x) = m(x-1)^2 + 4,\ m \neq 0$

Pratimai 4. Ar daugianaris užrašytas pilnojo kvadrato pavidalu $a(x-h)^2 + k$ (galbūt kiek kitaip)? Jei taip, nurodykite a, h, k. Jei ne, pertvarkykite.

a) $3(x-2)^2 + 4$
b) $5 - 2(x-3)^2$
c) $2(3-x)^2 + 1$
d) $-(x+1)^2$
e) $(2x-3)^2 - 1$
f) $(x-2)^2 + (x-3)^2$
g) $(x-2)(x-3)$
h) $(x-2)^2 \cdot 3 + 4$

4 laiptelis: standartinis pavidalas

Kai daugianaris užrašytas standartiniu pavidalu, pirmiausia išskiriame pilnąjį kvadratą (2 lapas), o toliau – ta pati grandinė.

Pavyzdys 4 (standartinis pavidalas)

Raskite mažiausią arba didžiausią daugianario reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama:

a) $P(x) = x^2 - 6x + 11$ b) $Q(x) = -2x^2 + 12x - 5$ c) $R(x) = 3x^2 - 2x$

Sprendimas.

a) $P(x) = (x-3)^2 + 2$. $(x-3)^2 \geq 0$, $(x-3)^2 + 2 \geq 2$; lygybė, kai $x = 3$. Mažiausia 2, kai $x = 3$.
b) $Q(x) = -2(x^2 - 6x) - 5 = -2\big((x-3)^2 - 9\big) - 5 = -2(x-3)^2 + 13$. $(x-3)^2 \geq 0$, $-2(x-3)^2 \leq 0$, $-2(x-3)^2 + 13 \leq 13$; lygybė, kai $x = 3$. Didžiausia 13, kai $x = 3$.
c) $R(x) = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) = 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$, $3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$, $3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$; lygybė, kai $x = \frac{1}{3}$. Mažiausia $-\frac{1}{3}$, kai $x = \frac{1}{3}$.

Komentaras. Pasitikrinkite įrašydami rastą x į *standartinį* pavidalą: pavyzdžiui, $Q(3) = -18+36-5 = 13$. Sutampa.

Pratimai 5. Kiekviename pratime, palyginti su ankstesniu, pakeistas *vienas* dalykas. Raskite mažiausią arba didžiausią reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama, ir pasakykite: kas pasikeitė sąlygoje ir ką tai pakeitė atsakyme?

a) $P(x) = x^2 - 6x$
b) $P(x) = x^2 - 6x + 11$
c) $P(x) = x^2 + 6x + 11$
d) $P(x) = 2x^2 + 12x + 22$
e) $P(x) = -2x^2 - 12x - 22$
f) $P(x) = -2x^2 - 12x$
g) $P(x) = x^2 - 5x + 11$

Pratimai 6. Pirmiausia užrašykite daugianarį standartiniu pavidalu (1 lapas), tada raskite mažiausią arba didžiausią reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama.

a) $P(x) = (x-1)(x-5)$
b) $P(x) = (x+2)(4-x)$
c) $P(x) = x(x+6)+10$
d) $P(x) = (2x-1)^2 - (x+1)^2$
e) $Q(x) = P(x+1)$, kai $P(x) = x^2 - 4x$
f) $Q(x) = P(x) + P(-x)$, kai $P(x) = x^2 - 4x + 1$

5 laiptelis: kokias reikšmes daugianaris įgyja?

Žinodami mažiausią reikšmę, iš karto žinome, kokių reikšmių daugianaris *neįgyja*: mažesnių už ją. O ieškant visų x, su kuriais daugianaris lygus duotam skaičiui, pilnojo kvadrato pavidalas duoda nepilną kvadratinę lygtį.

Pavyzdys 5 (ar įgyja reikšmę?)

$P(x) = x^2 - 6x + 11$.

a) Ar yra toks x, kad $P(x) = 1$?
b) Raskite visus x, su kuriais $P(x) = 6$.

Sprendimas.

a) $P(x) = (x-3)^2 + 2$; $(x-3)^2 \geq 0$, $(x-3)^2 + 2 \geq 2 > 1$. Tokio x nėra.
b) $(x-3)^2 + 2 = 6$, $(x-3)^2 = 4$, $x - 3 = 2$ arba $x - 3 = -2$. Taigi $x = 5$ arba $x = 1$. Patikra: $P(5) = 25 - 30 + 11 = 6$, $P(1) = 1 - 6 + 11 = 6$.

Komentaras. Lygtis $(x-3)^2 = 4$ turi *du* sprendinius – nepamirškite neigiamo.

Pratimai 7. $P(x) = 2(x+1)^2 - 8$. Raskite visus x, su kuriais:

a) $P(x) = -8$
b) $P(x) = 0$
c) $P(x) = 10$
d) $P(x) = -10$
e) $P(x) = -6$
f) $P(x) = -7$

Pratimai 8. Ar daugianaris įgyja nurodytą reikšmę? Jei taip, raskite visus tokius x.

a) $x^2 + 2x + 5$, reikšmė 3
b) $x^2 + 2x + 5$, reikšmė 4
c) $-x^2 + 6x - 4$, reikšmė 6
d) $-x^2 + 6x - 4$, reikšmė 1
e) $3x^2 - 12x + 20$, reikšmė 8
f) $x^2 - x + 1$, reikšmė 0

I dalies uždaviniai

1. Įrodykite, kad $x^2 + 6x + 10 > 0$ su visais x.

2. Su kuriomis m reikšmėmis daugianaris $P(x) = (m-3)x^2 + 2x + 1$ turi didžiausią reikšmę? Mažiausią?

3. Dviejų skaičių suma lygi 10. Kokia didžiausia gali būti jų sandauga?

4. Prie namo sienos reikia aptverti stačiakampį sklypą; pusės prie sienos aptverti nereikia. Turima 40 m tvoros. Kokį didžiausią plotą galima aptverti? Kokie tada sklypo matmenys?

5. Raskite mažiausią reiškinio reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama:

a) $(x-1)^2+(x-5)^2$ b) $(x-p)^2+(x-q)^2$ (p, q – bet kurie skaičiai)

6. $P(x)=x^2-4x+1$. Raskite mažiausią daugianario reikšmę ir su kuriuo x ji įgyjama. Palyginkite su $P(x)$.

a) $P(x+3)$ b) $P(2x)$ c) $P(x)+5$ d) $3P(x)$

7. Raskite mažiausią reiškinio $x^2+y^2-4x+6y$ reikšmę. Su kuriais x ir y ji įgyjama?

8. Įrodykite, kad $x^2+xy+y^2\geq 0$ su visais realiaisiais x ir y. Kada galioja lygybė?

9. Su kuria a reikšme daugianario $P(x)=x^2-2ax+3a$ mažiausia reikšmė yra didžiausia? Kam ji tada lygi?

10. Raskite mažiausią reiškinio x^4-2x^2+3 reikšmę ir visus x, su kuriais ji įgyjama.

11. Įrodykite, kad su visais realiaisiais x ir y teisinga nelygybė $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$. Kada galioja lygybė?

II dalis. Sąvokos: minimumas ir maksimumas

I dalyje kiekvieną kartą radome du skaičius: pačią mažiausią (didžiausią) reikšmę ir x, su kuriuo ji įgyjama. Pavyzdžiui, $P(x)=3(x-2)^2+4$ mažiausia reikšmė 4, kai $x=2$; $Q(x)=-\frac{1}{2}(x-6)^2+2$ didžiausia reikšmė 2, kai $x=6$. Laikas šiems skaičiams duoti vardus.

Apibrėžimas (minimumas ir maksimumas). Mažiausia daugianario reikšmė vadinama **minimumu** ir žymima $P_{\min}$, o x, su kuriuo ji įgyjama, – **minimumo tašku** $x_{\min}$. Didžiausia reikšmė vadinama **maksimumu** ($P_{\max}$), o x, su kuriuo ji įgyjama, – **maksimumo tašku** ($x_{\max}$). Minimumas ir maksimumas vadinami **ekstremumais**, o jų taškai – **ekstremumo taškais**.

Mūsų pavyzdžiuose: $P(x)=3(x-2)^2+4$: $x_{\min}=2$, $P_{\min}=4$. $Q(x)=-\frac{1}{2}(x-6)^2+2$: $x_{\max}=6$, $Q_{\max}=2$.

Pastaba. Ekstremumo taškas – tai x (ką *įrašome*), o ekstremumas – daugianario reikšmė (ką *gauname*). Ir dar: kad 4 yra minimumas, grandine parodėme *du* dalykus – kad $P(x)\geq 4$ su visais x ir kad reikšmė 4 tikrai įgyjama ($P(2)=4$). Vien $P(2)=4$ nieko neįrodo.

Pratimai 9. Nustatykite ekstremumo rūšį ir užrašykite atsakymą žymenimis.

a) $P(x)=(x-4)^2+2$
b) $P(x)=-3(x+2)^2+1$
c) $P(x)=5x^2-6$
d) $P(x)=4-3(x-1)^2$
e) $P(x)=x^2-2x+5$
f) $P(x)=-x^2-6x$

Pratimai 10. Užrašykite, ką žinome, žymenimis $x_{\min}$, $P_{\min}$ arba $x_{\max}$, $P_{\max}$. Jei duomenų nepakanka, paaiškinkite kodėl.

a) Mažiausia daugianario P reikšmė lygi 5 ir įgyjama, kai $x=-2$.
b) Didžiausia daugianario P reikšmė lygi -1 ir įgyjama, kai $x=4$.
c) $P(x)\geq P(7)$ su visais x, o $P(7)=0$.
d) $P(x)\leq P(0)$ su visais x, o $P(0)=3$.
e) $P(x)\geq -3$ su visais x, o $P(1)=-3$.
f) $P(x)\geq -3$ su visais x, o $P(1)=-2$.
g) $P(x)\leq 4$ su visais x.

Pratimai 11. Ar teiginys teisingas? Neteisingą pataisykite.

a) Daugianario $P(x) = (x-4)^2 + 2$ minimumas lygus 4.
b) Jei $Q(x) = -3(x+2)^2 + 1$, tai $x_{\max} = -2$ ir $Q_{\max} = 1$.
c) Jei $P(3) = 2$, tai $P_{\min} = 2$.
d) Daugianario $P(x) = -(x-1)^2 + 5$ maksimumo taškas lygus 5.
e) Daugianaris $P(x) = 2(x+3)^2$ turi minimumą, bet neturi maksimumo.
f) Jei $P_{\min} = 0$, tai $P(x) > 0$ su visais x.

III dalis. Daugianario sudarymas

Dabar eikime atgal: žinome ekstremumą – raskime daugianarį.

Pratimai 12. Užrašykite du *skirtingus* kvadratinius daugianarius pavidalu $a(x-h)^2 + k$, kurių:

a) $x_{\min} = 2,\ P_{\min} = -1$
b) $x_{\max} = -3,\ P_{\max} = 4$
c) $x_{\min} = 0,\ P_{\min} = 0$
d) $x_{\max} = 1,\ P_{\max} = -1$

Taigi ekstremumas ir jo taškas daugianario dar *nenusako*: lieka laisvas koeficientas a (žinomas tik jo ženklas). Kad rastume a, reikia dar vienos sąlygos.

Pavyzdys 6 (sudarymas)

Raskite kvadratinį daugianarį, kurio $x_{\min} = 2,\ P_{\min} = -3$ ir $P(0) = 5$.

1-asis būdas (algebrinis: lygčių sistema). Ieškome $P(x) = ax^2 + bx + c$ – trys nežinomieji, reikia trijų lygčių. $P(0) = 5$ duoda $c = 5$ (1 lapas). Pilnojo kvadrato pavidale $h = -\frac{b}{2a}$ (2 lapas), taigi $-\frac{b}{2a} = 2$, t. y. $b = -4a$. $P(2) = -3$ duoda $4a + 2b + 5 = -3$. Įrašę $b = -4a$: $4a - 8a = -8$, $a = 2$, $b = -8$. Gauname $P(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

2-asis būdas (loginis: vienas nežinomasis). Kaip matėme I dalyje, pavidale $a(x-h)^2 + k$ ekstremumo taškas h, o ekstremumas k. Todėl ieškomasis daugianaris $P(x) = a(x-2)^2 - 3$, nežinomas tik a. Galima net be lygties: kai x pasikeičia nuo 2 iki 0, kvadratas $(x-2)^2$ padidėja nuo 0 iki 4, o reikšmė – nuo -3 iki 5, t. y. per 8. Vadinasi, $a \cdot 4 = 8$, $a = 2$, ir $P(x) = 2(x-2)^2 - 3 = 2x^2 - 8x + 5$.

Patikra ir analizė. Ar gautas daugianaris tenkina *visas* sąlygas? $P(0) = 5$ – taip. $(x-2)^2 \geq 0$, $2(x-2)^2 \geq 0$, $2(x-2)^2 - 3 \geq -3$, lygybė, kai $x = 2$: $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = -3$ – taip. Atsakymas: $P(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

Komentaras. Sudarę daugianarį, *visada* tikriname jį pagal pradinę sąlygą. Kitame pavyzdyje patikra parodys, kad tokio daugianario iš viso nėra.

Pavyzdys 7 (ar toks egzistuoja?)

Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris, kurio:
a) $x_{\max} = 1,\ P_{\max} = 4$ ir $P(3) = 6$?
b) $x_{\min} = 1,\ P_{\min} = 2$ ir $P(5) = 2$?

1-asis būdas (skaičiuojame ir tikriname).

a) $P(x) = a(x-1)^2 + 4$. Iš $P(3) = 6$: $4a + 4 = 6$, $a = \frac{1}{2}$. *Analizė:* kai $a > 0$, grandinėje ženklas neapsiverčia – gauname minimumą, o ne maksimumą. Sąlyga netenkinama: toks daugianaris neegzistuoja.

b) $P(x) = a(x-1)^2 + 2$. Iš $P(5) = 2$: $16a + 2 = 2$, $a = 0$. *Analizė:* kai $a = 0$, daugianaris ne kvadratinis. Neegzistuoja.

2-asis būdas (be skaičiavimų). a) $P(3) = 6$ didesnė už *didžiausią* reikšmę 4 – taip būti negali. b) Lygybė $a(x-1)^2 + 2 = 2$ galima tik kai $(x-1)^2 = 0$, t. y. tik su $x = 1$. O čia ji turėtų būti ir su $x = 5$.

Pratimai 13. Raskite kvadratinį daugianarį ir užrašykite jį pilnojo kvadrato ir standartiniu pavidalais. Patikrinkite, ar jis tenkina visas sąlygas. Jei toks neegzistuoja, paaiškinkite kodėl.

a) $x_{\min} = 1$, $P_{\min} = 2$, $P(0) = 5$
b) $x_{\min} = -2$, $P_{\min} = 0$, $P(0) = 2$
c) $x_{\max} = 3$, $P_{\max} = 4$, $P(1) = -4$
d) $x_{\max} = 0$, $P_{\max} = 5$, $P(2) = -3$
e) $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = -1$, $P(4) = -3$
f) $x_{\min} = -1$, $P_{\min} = 3$, $P(1) = 3$
g) $x_{\max} = \frac{1}{2}$, $P_{\max} = 1$, $P(0) = 0$
h) $x_{\min} = 3$, $P_{\min} = -2$, $P(5) = 6$

Kai duomenys kitokie

Ne visada žinomi ir ekstremumo taškas, ir ekstremumas. Abu būdai veikia ir čia: arba lygčių sistema koeficientams, arba pradedame nuo $a(x-h)^2 + k$ ir randame, ko trūksta.

Pavyzdys 8 (žinomas tik ekstremumas)

Raskite visus daugianarius $P(x) = x^2 + bx + c$, kurių $P_{\min} = -4$ ir $P(0) = 0$.

1-asis būdas (algebrinis). $P(0) = c = 0$, taigi $P(x) = x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$ ir $P_{\min} = -\frac{b^2}{4}$. Iš $-\frac{b^2}{4} = -4$: $b^2 = 16$, $b = 4$ arba $b = -4$.

2-asis būdas (iš pilnojo kvadrato pavidalo). Prie x^2 koeficientas 1, minimumas -4, todėl $P(x) = (x-h)^2 - 4$; nežinomas tik h. Iš $P(0) = 0$: $h^2 - 4 = 0$, $h = 2$ arba $h = -2$.

Patikra ir analizė. $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ ir $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$. Kadangi $(x \mp 2)^2 \geq 0$, tai $(x \mp 2)^2 - 4 \geq -4$, o lygybė įgyjama (kai $x = \pm 2$): abiejų minimumas -4. Abiejų $P(0) = 0$. Atsakymas: $P(x) = x^2 - 4x$ arba $P(x) = x^2 + 4x$.

Komentaras. Lygtis $h^2 = 4$ turi du sprendinius, todėl gavome du daugianarius. Kai prašoma rasti *visus*, nepraraskite nė vieno.

Pavyzdys 9 (koeficientas su raide)

Su kuria b reikšme daugianario $P(x) = x^2 + bx + 7$ minimumas lygus 3?

1-asis būdas (išskiriame kvadratą). $P(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 7 - \frac{b^2}{4}$, todėl $P_{\min} = 7 - \frac{b^2}{4} = 3$, $b^2 = 16$, $b = \pm 4$.

2-asis būdas (sulyginame koeficientus, 1 lapas). Minimumas 3, todėl $P(x) = (x-h)^2 + 3 = x^2 - 2hx + h^2 + 3$. Sulyginę su $x^2 + bx + 7$: $h^2 + 3 = 7$, $h = \pm 2$, $b = -2h = \mp 4$.

Patikra. $x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3 \geq 3$ ir $x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3 \geq 3$, lygybė įgyjama – abiejų minimumas 3. Atsakymas: $b = 4$ arba $b = -4$.

Pratimai 14. Raskite nurodytus daugianarius (arba koeficientus). Jei yra keli – raskite visus. Patikrinkite atsakymą.

a) $x_{\min} = 1,\ P(0) = 3,\ P(3) = 9$
b) $x_{\max} = 1,\ P(0) = 1,\ P(3) = -5$
c) $P(x) = 2x^2 + bx + c,\ x_{\min} = -1,\ P_{\min} = 3$
d) $P(x) = x^2 + bx + c,\ P_{\min} = 0,\ P(0) = 9$
e) $P(x) = x^2 - 6x + c,\ P_{\min} = -2$
f) $P(x) = x^2 + bx + 5,\ P_{\min} = 1$
g) $P(x) = ax^2 + 4x + 1,\ P_{\max} = 5$
h) $P(x) = ax^2 - 8x + c,\ x_{\min} = 2,\ P_{\min} = -3$

III dalies uždaviniai

12. Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės $P(0) = 2,\ P(1) = 0,\ P(-1) = 8$. Raskite $P(x)$ ir jo ekstremumą. Ar $P(x)$ gali būti lygus -1?

13. Daugianario $P(x) = x^2 + bx + c$ minimumo taškas $x_{\min} = 3$, o $P(1) = 0$. Raskite b, c ir $P_{\min}$.

14. Raskite visus daugianarius $P(x) = x^2 + bx + c$, kurių minimumas lygus 0, o $P(1) = 4$.

15. Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ maksimumo taškas $x_{\max} = 2$, maksimumas $P_{\max} = 5$, o $P(0) = -3$. Raskite $P(x)$ standartiniu pavidalu ir apskaičiuokite $P(1) - P(-1)$ dviem būdais.

Pasitikrinkite

Po šio lapo turėtumėte mokėti:

- ☐ rasti mažiausią ar didžiausią daugianario reikšmę ir x, su kuriuo ji įgyjama, pagrįsti grandine;
- ☐ nustatyti, ar daugianaris įgyja duotą reikšmę, ir rasti visus tokius x;
- ☐ vartoti sąvokas ir žymenis $x_{\min}$, $P_{\min}$, $x_{\max}$, $P_{\max}$, neskirti taško su reikšme;
- ☐ sudaryti daugianarį pagal ekstremumą ir kitas sąlygas, patikrinti, ar toks egzistuoja.

Pratimai 15. Pasitikrinkite be užrašų (apie 15 min.). Jei suklydote – grįžkite prie atitinkamos dalies.

a) Nustatykite ekstremumo rūšį, tašką ir ekstremumą: $P(x) = -3(x+2)^2 + 4$. Pagrįskite grandine.
b) Raskite daugianario $Q(x) = x^2 - 4x - 1$ ekstremumą.
c) $P(x) = 2(x-1)^2 + 3$. Raskite visus x, su kuriais $P(x) = 11$.
d) Raskite kvadratinį daugianarį R, jei $x_{\min} = 1$, $R_{\min} = -2$ ir $R(3) = 6$.
e) Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris S, kurio $x_{\max} = 0$, $S_{\max} = 2$ ir $S(1) = 3$?
f) Su kuria c reikšme daugianario $x^2 + 8x + c$ minimumas lygus 1?

Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

Įrankis 1 *(kvadratas neneigiamas)* $t^2 \geq 0$; $t^2 = 0$ tik kai $t = 0$

Pratimų atsakymai

Pratimai 1. a) mažiausia 0, kai $x = 0$; b) mažiausia 3, kai $x = 0$ (pasikeitė tik reikšmė); c) mažiausia -3, kai $x = 0$; d) didžiausia 0, kai $x = 0$ (minimumas virto maksimumu); e) didžiausia 3, kai $x = 0$; f) didžiausia 3, kai $x = 0$ (tik užrašo tvarka – niekas);

Pratimai 2. a) mažiausia 0, kai $x = 2$; b) mažiausia 0, kai $x = -2$ (pasikeitė tik x); c) mažiausia -5, kai $x = -2$ (pasikeitė tik reikšmė); d) didžiausia -5, kai $x = -2$ (minimumas virto maksimumu); e) didžiausia -5, kai $x = -2$ (niekas: $2x + 4 = 0$, kai $x = -2$); f) didžiausia -5, kai $x = -\frac{3}{2}$; g) didžiausia -5, kai $x = 3$;

Pratimai 3. a) mažiausia 4, kai $x = 1$; b) mažiausia 4, kai $x = 1$ (niekas!); c) mažiausia 4, kai $x = 1$ (vėl niekas); d) didžiausia 4, kai $x = 1$ (minimumas virto maksimumu); e) didžiausia 4, kai $x = 1$ (tik tvarka); f) didžiausia 4, kai $x = 1$ ($(1 - x)^2 = (x - 1)^2$); g) mažiausia 4, kai $x = 0$; h) jei $m > 0$ – mažiausia 4; jei $m < 0$ – didžiausia 4; abiem atvejais $x = 1$;

Pratimai 4. a) taip: $a = 3$, $h = 2$, $k = 4$; b) taip: $a = -2$, $h = 3$, $k = 5$; c) taip: $a = 2$, $h = 3$, $k = 1$; d) taip: $a = -1$, $h = -1$, $k = 0$; e) beveik: $4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 1$, $a = 4$, $h = \frac{3}{2}$, $k = -1$; f) ne: $2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$; g) ne: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$; h) taip: $a = 3$, $h = 2$, $k = 4$;

Pratimai 5. a) mažiausia -9, kai $x = 3$; b) mažiausia 2, kai $x = 3$ (pridėjus c – tik reikšmė); c) mažiausia 2, kai $x = -3$ (pakeitus b ženklą – tik x); d) mažiausia 4, kai $x = -3$ (viską padauginus iš 2 – reikšmė dvigubai); e) didžiausia -4, kai $x = -3$; f) didžiausia 18, kai $x = -3$; g) mažiausia $\frac{19}{4}$, kai $x = \frac{5}{2}$;

Pratimai 6. a) $x^2 - 6x + 5$; mažiausia -4, kai $x = 3$; b) $-x^2 + 2x + 8$; didžiausia 9, kai $x = 1$; c) $x^2 + 6x + 10$; mažiausia 1, kai $x = -3$; d) $3x^2 - 6x$; mažiausia -3, kai $x = 1$; e) $x^2 - 2x - 3$; mažiausia -4, kai $x = 1$; f) $2x^2 + 2$; mažiausia 2, kai $x = 0$;

Pratimai 7. a) $x = -1$; b) $x = 1$ arba $x = -3$; c) $x = 2$ arba $x = -4$; d) tokių x nėra; e) $x = 0$ arba $x = -2$; f) $x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$;

Pratimai 8. a) ne: $(x + 1)^2 + 4 \geq 4$; b) taip, $x = -1$; c) ne: $-(x - 3)^2 + 5 \leq 5$; d) taip, $x = 1$ arba $x = 5$; e) taip, $x = 2$; f) ne: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$;

Pratimai 9. a) $x_{\min} = 4$, $P_{\min} = 2$; b) $x_{\max} = -2$, $P_{\max} = 1$; c) $x_{\min} = 0$, $P_{\min} = -6$; d) $x_{\max} = 1$, $P_{\max} = 4$; e) $x_{\min} = 1$, $P_{\min} = 4$; f) $x_{\max} = -3$, $P_{\max} = 9$;

Pratimai 10. a) $x_{\min} = -2$, $P_{\min} = 5$; b) $x_{\max} = 4$, $P_{\max} = -1$; c) $x_{\min} = 7$, $P_{\min} = 0$; d) $x_{\max} = 0$, $P_{\max} = 3$; e) $x_{\min} = 1$, $P_{\min} = -3$; f) nepakanka: nežinome, ar -3 įgyjama; g) nepakanka: nežinome, ar 4 įgyjama;

Pratimai 11. a) neteisinga: $P_{\min} = 2$, o $x_{\min} = 4$; b) teisinga; c) neteisinga: reikia dar įrodyti, kad $P(x) \geq 2$ su visais x; d) neteisinga: $x_{\max} = 1$, o $P_{\max} = 5$; e) teisinga: $P_{\min} = 0$, kai $x = -3$; f) neteisinga: $P(x_{\min}) = 0$;

Pratimai 12. a) pvz. $(x - 2)^2 - 1$ ir $3(x - 2)^2 - 1$ (bet koks $a > 0$); b) pvz. $-(x + 3)^2 + 4$ ir $-5(x + 3)^2 + 4$ (bet koks $a < 0$); c) pvz. x^2 ir $7x^2$ (bet koks $a > 0$); d) pvz. $-(x - 1)^2 - 1$ ir $-\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 1$ (bet koks $a < 0$);

Pratimai 13. a) $3(x-1)^2+2=3x^2-6x+5$; b) $\frac{1}{2}(x+2)^2=\frac{1}{2}x^2+2x+2$;
c) $-2(x-3)^2+4=-2x^2+12x-14$; d) $-2x^2+5$; e) neegzistuoja: $-3<P_{\min}$ (gautume $a=-\frac{1}{2}<0$); f) neegzistuoja: gautume $a=0$; g) $-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1=-4x^2+4x$;
h) $2(x-3)^2-2=2x^2-12x+16$;

Pratimai 14. a) $2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$; b) $-2(x-1)^2+3=-2x^2+4x+1$;
c) $2(x+1)^2+3=2x^2+4x+5$; d) x^2-6x+9 arba x^2+6x+9; e) $c=7$; f) $b=4$ arba $b=-4$;
g) $a=-1$: $-x^2+4x+1$; h) $a=2$, $c=5$: $2x^2-8x+5$;

Pratimai 15. a) $x_{\max}=-2$, $P_{\max}=4$; b) $x_{\min}=2$, $Q_{\min}=-5$; c) $x=3$ arba $x=-1$;
d) $2(x-1)^2-2=2x^2-4x$; e) ne: $S(1)=3>S_{\max}$; f) $c=17$;

Uždavinių atsakymai

1. $x^2+6x+10=(x+3)^2+1\geq 1>0$.
2. Didžiausią – kai $m<3$; mažiausią – kai $m>3$; kai $m=3$, $P(x)=2x+1$ neturi nei vienos, nei kitos.
3. 25 (kai abu skaičiai lygūs 5).
4. 200 m^2; kraštinės 10 m (statmenos sienai) ir 20 m (lygiagreti sienai).
5. a) 8, kai $x=3$; b) $\frac{(p-q)^2}{2}$, kai $x=\frac{p+q}{2}$.
6. $P(x)=(x-2)^2-3$: mažiausia -3, kai $x=2$. a) -3, kai $x=-1$; b) -3, kai $x=1$; c) 2, kai $x=2$; d) -9, kai $x=2$.
7. -13, kai $x=2$, $y=-3$.
8. Lygybė – tik kai $x=y=0$.
9. $a=\frac{3}{2}$; tada mažiausia reikšmė $\frac{9}{4}$.
10. 2, kai $x=1$ arba $x=-1$.
11. Lygybė – tik kai $x=y=1$.
12. $P(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2$; $x_{\min}=1$, $P_{\min}=0$; -1 būti negali.
13. $b=-6$, $c=5$, $P_{\min}=-4$.
14. $P(x)=x^2+2x+1$ arba $P(x)=x^2-6x+9$.
15. $P(x)=-2x^2+8x-3$; $P(1)-P(-1)=16$.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. Išskirkite pilnąjį kvadratą ir rašykite grandinę.
2. Grandinėje kvadratą dauginsite iš koeficiento prie x^2. Neužmirškite atvejo, kai daugianaris ne kvadratinis.
3. Pažymėkite vieną skaičių x. Kam lygus kitas? Užrašykite sandaugą.
4. Pažymėkite x dviejų kraštinių, statmenų sienai, ilgį. Kokio ilgio trečioji kraštinė?
5. Atskliauskite ir išskirkite pilnąjį kvadratą. b) dalyje pažiūrėkite, kur atsidūrė a) atsakymas.
6. Pirma išskirkite pilnąjį kvadratą pačiame $P(x)$, o tada įrašykite: $P(x+3)=\big((x+3)-2\big)^2-3$.
7. Išskirkite pilnąjį kvadratą atskirai su x ir atskirai su y.
8. Laikykite y skaičiumi ir išskirkite pilnąjį kvadratą su x: koeficientas prie x yra y.
9. Raskite mažiausią reikšmę kaip a reiškinį. Tai vėl kvadratinis daugianaris – tik kintamasis a.

10. Pažymėkite $t = x^2$.

11. Padauginkite abi puses iš 2 ir pabandykite skirtumą užrašyti trijų kvadratų suma.

12. $P(0) = c$, o $P(\pm 1)$ duoda $a + b$ ir $a - b$ (1 lapas).

13. Pradėkite nuo $P(x) = (x - 3)^2 + k$.

14. $P(x) = (x - h)^2$. Kokią lygtį h atžvilgiu duoda $P(1) = 4$?

15. Antrasis būdas – 1 lapo įrankis: $P(1) - P(-1) = 2b$.

Sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

3 uždavinys.

Kaip galvoti. Jei vienas skaičius x, kitas $-10-x$. Sandauga tampa kvadratiniu daugianariu.

1-asis būdas (išskiriame kvadratą). $x(10-x) = -x^2+10x = -\big((x-5)^2-25\big) = -(x-5)^2+25$. $(x-5)^2 \ge 0$, $-(x-5)^2 \le 0$, $-(x-5)^2+25 \le 25$; lygybė, kai $x=5$.

2-asis būdas (nuo vidurio). Skaičius užrašykime kaip $5+t$ ir $5-t$ – jų suma tikrai 10. Sandauga $(5+t)(5-t) = 25-t^2$. $t^2 \ge 0$, $25-t^2 \le 25$; lygybė, kai $t=0$.

Atsakymas: 25 (abu skaičiai lygūs 5).

4 uždavinys.

Kaip galvoti. Tvora eina trimis kraštinėmis: dvi statmenos sienai (po x) ir viena lygiagreti $(40-2x)$.

1-asis būdas (išskiriame kvadratą).
$S(x) = x(40-2x) = -2x^2+40x = -2\big((x-10)^2-100\big) = -2(x-10)^2+200$. $(x-10)^2 \ge 0$, $-2(x-10)^2 \le 0$, $-2(x-10)^2+200 \le 200$; lygybė, kai $x=10$.

2-asis būdas (suvedame į ankstesnį uždavinį). $S = 2\cdot x(20-x)$. Skaičių x ir $20-x$ suma 20; kaip ankstesniame uždavinyje, $x = 10+t$, $20-x = 10-t$: $x(20-x) = 100-t^2 \le 100$. Taigi $S \le 200$; lygybė, kai $t=0$.

Patikra. Kai $x=10$: kraštinės 10, 10 ir 20, tvoros 40 m, plotas 200 m^2.

Komentaras. Atsakymas – ne kvadratas! Kai aptveriamos visos keturios kraštinės, geriausia kvadratas, o čia viena kraštinė „nemokama“.

5 uždavinys. a)

1-asis būdas (atskliaudžiame). $(x-1)^2+(x-5)^2 = 2x^2-12x+26 = 2(x-3)^2+8$. $(x-3)^2 \ge 0$, $2(x-3)^2 \ge 0$, $2(x-3)^2+8 \ge 8$; lygybė, kai $x=3$.

2-asis būdas (nuo vidurio). 3 – skaičių 1 ir 5 vidurys. Pažymėkime $x = 3+t$:
$(t+2)^2+(t-2)^2 = 2t^2+8$. $t^2 \ge 0$, $2t^2+8 \ge 8$; lygybė, kai $t=0$, t. y. $x=3$.

b) Nuo vidurio: $x = \frac{p+q}{2}+t$, $d = \frac{q-p}{2}$. Tada $x-p = t+d$, $x-q = t-d$, ir
$(t+d)^2+(t-d)^2 = 2t^2+2d^2 \ge 2d^2 = \frac{(p-q)^2}{2}$; lygybė, kai $t=0$, t. y. $x = \frac{p+q}{2}$.

Komentaras. Patikra: kai $p=1$, $q=5$, gauname 8 ir $x=3$ – sutampa su a). Pastebėkite: šis uždavinys, sandauga, kai suma 10, ir sklypas prie sienos – *trys skirtingi uždaviniai, vienas sprendimas*: „skaičiuojame nuo vidurio“.

6 uždavinys.

1-asis būdas (kiekvieną atskirai). Kiekvieną reiškinį atskliausti ir išskirti kvadratą; pvz. $P(x+3) = x^2+2x-2 = (x+1)^2-3$.

2-asis būdas (vieną kartą). $P(x) = (x-2)^2-3$, o įrašant tiesiog keičiame x: a) $P(x+3) = (x+1)^2-3$; $(x+1)^2 \ge 0$, $(x+1)^2-3 \ge -3$, lygybė, kai $x=-1$. b) $P(2x) = (2x-2)^2-3$; $(2x-2)^2 \ge 0$, $(2x-2)^2-3 \ge -3$, lygybė, kai $x=1$. c) $P(x)+5 = (x-2)^2+2$; $(x-2)^2 \ge 0$,

$(x-2)^2+2 \geq 2$, lygybė, kai $x=2$. d) $3P(x) = 3(x-2)^2-9$; $(x-2)^2 \geq 0$, $3(x-2)^2 \geq 0$, $3(x-2)^2-9 \geq -9$, lygybė, kai $x=2$.

Komentaras. Įrašę $x+3$ ar $2x$, mažiausios reikšmės nepakeitėme – pasikeitė tik x, su kuriuo ji įgyjama. Pridėję skaičių ar padauginę iš teigiamo – atvirkščiai: x liko, keitėsi reikšmė.

7 uždavinys.

Kaip galvoti. Nariai su x ir nariai su y atskiri, todėl kiekvienam kintamajam išskiriame kvadratą atskirai.

Sprendimas. $x^2-4x+y^2+6y = (x-2)^2-4+(y+3)^2-9 = (x-2)^2+(y+3)^2-13$. $(x-2)^2 \geq 0$, $(y+3)^2 \geq 0$, $(x-2)^2+(y+3)^2-13 \geq -13$. Lygybė, kai abu kvadratai lygūs nuliui: $x=2$, $y=-3$.

8 uždavinys.

Kaip galvoti. Kintamieji „susipynę“ – yra narys xy. Bet jei y laikysime skaičiumi, tai kvadratinis daugianaris su kintamuoju x, kurio koeficientas prie x lygus y.

Sprendimas. $x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}$. $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$, $\frac{3y^2}{4} \geq 0$, todėl suma ≥ 0. Lygybė, kai abu dėmenys lygūs nuliui: $y=0$ ir $x+\frac{y}{2}=0$, t. y. $x=y=0$.

9 uždavinys.

Kaip galvoti. Klausimas dviejų aukštų: kiekvienam a daugianaris turi savo mažiausią reikšmę, o ieškome, kuri iš jų didžiausia. Abiem aukštams tinka ta pati grandinė.

Sprendimas.

Teiginys 1. *Mažiausia $P(x)$ reikšmė lygi $-a^2+3a$.*

Įrodymas. $P(x) = (x-a)^2-a^2+3a$. $(x-a)^2 \geq 0$, todėl $P(x) \geq -a^2+3a$; lygybė, kai $x=a$. ■

Teiginys 2. *Didžiausia reiškinio $-a^2+3a$ reikšmė lygi $\frac{9}{4}$, kai $a=\frac{3}{2}$.*

Įrodymas. $-a^2+3a = -\left(\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right) = -\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$. $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$, $-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \leq 0$, $-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$; lygybė, kai $a=\frac{3}{2}$. ■

Išvada. Mažiausia reikšmė didžiausia, kai $a=\frac{3}{2}$, ir tada ji lygi $\frac{9}{4}$.

10 uždavinys.

Kaip galvoti. Tai ne kvadratinis daugianaris – yra x^4. Bet $x^4=(x^2)^2$, todėl pažymėję $t=x^2$ gauname t^2-2t+3.

Sprendimas. $x^4-2x^2+3 = (x^2-1)^2+2$. $(x^2-1)^2 \geq 0$, $(x^2-1)^2+2 \geq 2$. Lygybė, kai $x^2=1$: $x=1$ arba $x=-1$.

Komentaras. Šįkart tinkamų x du. Prieštaros nėra: reiškinys ne kvadratinis.

11 uždavinys.

Kaip galvoti. Nariai $-xy$, $-x$, $-y$ primena dvigubas sandaugas iš $(x-y)^2$, $(x-1)^2$, $(y-1)^2$, tik ten jie su koeficientu 2. Todėl dauginame iš 2.

Sprendimas.

Teiginys 1. $2\left(x^2+y^2+1-xy-x-y\right)=(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2$.

Įrodymas. Atskliaudę dešinę pusę, gauname $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+2$, t. y. kairę pusę. ■

Teiginys 2. $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$, *o lygybė – tik kai* $x=y=1$.

Įrodymas. Kiekvienas kvadratas ≥ 0 (Įrankis 1); suma lygi nuliui tik tada, kai visi trys lygūs nuliui: $x=y$, $x=1$, $y=1$. ■

Išvada. $x^2+y^2+1-xy-x-y\geq 0$; lygybė – tik kai $x=y=1$.

12 uždavinys.

1-asis būdas (lygčių sistema). $c=2$, $a+b+c=0$, $a-b+c=8$, t. y. $a+b=-2$, $a-b=6$. Sudėję: $2a=4$, $a=2$; tada $b=-4$.

2-asis būdas (1 lapo įrankiai). $c=P(0)=2$; $b=\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{0-8}{2}=-4$;
$a=P(1)-b-c=0+4-2=2$.

Patikra. $P(x)=2x^2-4x+2$: $P(0)=2$, $P(1)=0$, $P(-1)=2+4+2=8$ – tinka.

Sprendimas. $P(x)=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2$. $(x-1)^2\geq 0$, $2(x-1)^2\geq 0$, todėl $P(x)\geq 0$; lygybė, kai $x=1$. $x_{\min}=1$, $P_{\min}=0$. Kadangi $P(x)\geq 0$, reikšmė -1 negalima.

13 uždavinys.

1-asis būdas (lygčių sistema). Minimumo taškas $-\frac{b}{2}=3$, taigi $b=-6$. Iš $P(1)=0$: $1-6+c=0$, $c=5$.

2-asis būdas (vienas nežinomasis). $P(x)=(x-3)^2+k$. Iš $P(1)=0$: $4+k=0$, $k=-4$. Taigi $P(x)=(x-3)^2-4=x^2-6x+5$.

Patikra. $(x-3)^2\geq 0$, $(x-3)^2-4\geq -4$, lygybė, kai $x=3$: $x_{\min}=3$. $P(1)=1-6+5=0$ – tinka. Atsakymas: $b=-6$, $c=5$, $P_{\min}=-4$.

14 uždavinys.

1-asis būdas (lygčių sistema). $P_{\min}=c-\frac{b^2}{4}=0$ ir $P(1)=1+b+c=4$. Iš antrosios $c=3-b$; įrašę: $3-b-\frac{b^2}{4}=0$, $b^2+4b-12=0$. Pilnos kvadratinės lygties spręsti dar nemokame – bet galime išskirti kvadratą: $(b+2)^2=16$, $b=2$ arba $b=-6$. Tada $c=1$ arba $c=9$.

2-asis būdas (vienas nežinomasis). $P(x)=(x-h)^2$. Iš $P(1)=4$: $(1-h)^2=4$, $1-h=\pm 2$, $h=-1$ arba $h=3$.

Patikra. $(x+1)^2\geq 0$ ir $(x-3)^2\geq 0$, lygybė įgyjama – abiejų minimumas 0; $P(1)=4$ abiem atvejais. Atsakymas: x^2+2x+1 arba x^2-6x+9.

Komentaras. Antrasis būdas daug trumpesnis: tinkamai pasirinktas pavidalas palieka vieną nežinomąjį.

15 uždavinys.

1-asis būdas (lygčių sistema). $c=P(0)=-3$; $-\frac{b}{2a}=2$, t. y. $b=-4a$; $P(2)=4a+2b-3=5$. Įrašę: $-4a=8$, $a=-2$, $b=8$.

2-asis būdas (vienas nežinomasis). $P(x) = a(x-2)^2 + 5$. Iš $P(0) = -3$: $4a + 5 = -3$, $a = -2$.

Patikra ir analizė. $P(x) = -2(x-2)^2 + 5 = -2x^2 + 8x - 3$. $(x-2)^2 \geq 0$, $-2(x-2)^2 \leq 0$, $-2(x-2)^2 + 5 \leq 5$, lygybė, kai $x = 2$ – tikrai maksimumas, $x_{\max} = 2$, $P_{\max} = 5$; $P(0) = -3$ – tinka.

$P(1) - P(-1)$: tiesiogiai $P(1) = 3$, $P(-1) = -13$, skirtumas 16; per 1 lapo įrankį – $2b = 16$.