Kvadratinis daugianaris

Lapas 2. Pilnojo kvadrato išskyrimas

9 klasė

Šiame lape išmoksime vieną pertvarkį – pilnojo kvadrato išskyrimą. Jis atrodo kuklus, bet ant jo laikosi beveik visa kvadratinio daugianario teorija – ir kvadratinių lygčių sprendimas, kurį išmoksime vėliau, ir daugybė įrodymų. Visame lape daugianarį žymime $P(x)$, o x – bet kuris realusis skaičius.

Apibrėžimas (pilnojo kvadrato pavidalas). Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) užrašas

$$P(x) = a(x - h)^2 + k,$$

čia h ir k – realieji skaičiai, vadinamas jo **pilnojo kvadrato pavidalu**. Pertvarkyti daugianarį iš standartinio pavidalo į pilnojo kvadrato pavidalą reiškia **išskirti pilnąjį kvadratą**.

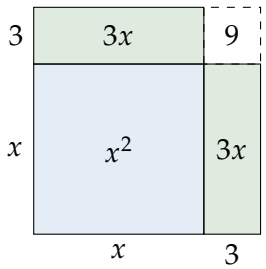
Tipinis pavyzdys: $x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2$. Čia $a = 1$, $h = 3$, $k = 2$ – patikrinkite atskliausdami. Atkreipkite dėmesį: $x^2 + 6x + 11 = (x + 3)^2 + 2 = (x - (-3))^2 + 2$, taigi čia $h = -3$.

Atskliausti lengva. Mūsų uždavinys – eiti atgal: iš standartinio pavidalo gauti pilnojo kvadrato pavidalą. Pradėsime nuo paprasčiausio atvejo ir žingsnis po žingsnio pasieksime bendrąjį.

1. Paprasčiausias atvejis: $x^2 + bx$

Pažiūrėkime į reiškinį $x^2 + 6x$ geometro akimis.

Geometrinis žvilgsnis. Tarkime, $x > 0$. Tada x^2 – kvadrato, kurio kraštinė x, plotas, o $6x$ – stačiakampio $x \times 6$ plotas. Perpjaukime stačiakampį į dvi juostas $x \times 3$ ir priglauskime jas prie dviejų gretimų kvadrato kraštinių. Gauname beveik kvadratą, kurio kraštinė $x + 3$: trūksta tik kampe esančio kvadratėlio 3×3.



Vadinasi, $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$.

Kur geometrija nebepadeda. Pabandykite tą patį su $x^2 - 6x$: juostų plotis turėtų būti -3, o neigiamo pločio juostos nenupjausi. Su $x^2 + 7x$ brėžinys dar veikia, bet juostos jau 3,5 pločio – nebe taip patogu. O jei $x < 0$, apie ilgius iš viso negalima kalbėti. Geometrija gražiai parodė, *kodėl* atsiranda kvadratas, bet kaip įrankis ji ribota: patogu tik tada, kai koeficientas prie x teigiamas ir lyginis. Reikia universalaus būdo – algebros.

Įrankis 1 (pilnojo kvadrato išskyrimas)

Su visais realiaisiais x ir b

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Įrodymas. Atskliauskime dešinę pusę pagal sumos kvadrato formulę:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx.$$

Gavome kairę pusę. Naudojome tik atskliaudimą, todėl lygybė teisinga su visais x ir b – jokių sąlygų jų ženklui nereikia. ■

Pastaba. Kodėl skliaustuose $\frac{b}{2}$? Kad dviguboji sandauga $2 \cdot x \cdot \frac{b}{2}$ būtų lygi bx. Kodėl atimame $\left(\frac{b}{2}\right)^2$? Atskliaudus kvadratą šis narys atsiranda „per daug“, todėl jį atimame. Formulės kalti nereikia: skliaustuose rašome *pusę* koeficiento prie x, o po to atimame tos pusės kvadratą.

Pavyzdys 1 (įvairūs atvejai)

Išskirkite pilnąjį kvadratą:

a) $x^2 + 8x$ b) $x^2 - 2x$ c) $x^2 + 7x$ d) $x^2 - \frac{4}{5}x$

Kaip galvoti. Receptas visur tas pats: pusė koeficiento prie x. Skiriasi tik pats koeficientas – jis lyginis, neigiamas, nelyginis, trupmeninis. Pažiūrėkime, ar dėl to kas nors keičiasi.

Sprendimas.

a) $\frac{b}{2} = 4$: $x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$.
b) $\frac{b}{2} = -1$: $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$.
c) $\frac{b}{2} = \frac{7}{2}$: $x^2 + 7x = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$.
d) $\frac{b}{2} = -\frac{2}{5}$: $x^2 - \frac{4}{5}x = \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}$.

Komentaras. Nelyginis ar trupmeninis koeficientas – ne kliūtis, tik skaičiavimas su trupmenomis. Dažniausia klaida – b) ir d) atvejais parašyti „+“ gale: atimame *kvadratą*, o kvadratas neigiamas nebūna. Ženklas skliaustuose toks pat kaip prieš x, o gale visada „−“.

Pavyzdys 2 (raidiniai koeficientai)

Išskirkite pilnąjį kvadratą (raidės a ir p – bet kurie skaičiai):

a) $x^2 + 2ax$ b) $x^2 - 3px$ c) $x^2 + (a-1)x$

Kaip galvoti. Raidė čia elgiasi lygiai kaip skaičius: tai tiesiog koeficientas prie x. Tad klausiame to paties – kam lygi jo pusė?

Sprendimas.

a) Koeficientas $2a$, pusė – a: $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$.
b) Koeficientas $-3p$, pusė – $-\frac{3p}{2}$: $x^2 - 3px = \left(x - \frac{3p}{2}\right)^2 - \frac{9p^2}{4}$.
c) Koeficientas $a-1$, pusė – $\frac{a-1}{2}$: $x^2 + (a-1)x = \left(x + \frac{a-1}{2}\right)^2 - \frac{(a-1)^2}{4}$.

Komentaras. c) atveju koeficientas – visas reiškinys $a-1$, todėl jį rašome skliaustuose ir dalijame visą. Klaida būtų rašyti $\left(x+\frac{a}{2}-1\right)^2$. Raidinius atsakymus visada verta patikrinti atskliaudžiant arba įstačius kokią nors a reikšmę, pavyzdžiui, $a=3$.

Toliau – pratimai įgūdžiui įtvirtinti. Jei pirmi keli eina lengvai, galite peršokti prie kitos serijos; jei ne – darykite visus: įgūdis ateina su kiekiu.

Pratimai 1. Išskirkite pilnąjį kvadratą. Atsakymą patikrinkite atskliausdami.

a) x^2+4x
b) x^2+6x
c) x^2-8x
d) x^2-12x
e) x^2+2x
f) x^2-10x
g) x^2+14x
h) x^2-16x
i) x^2+20x

Pratimai 2. Išskirkite pilnąjį kvadratą. Atsakymą patikrinkite atskliausdami.

a) x^2+5x
b) x^2-3x
c) x^2+x
d) x^2-7x
e) $x^2+\frac{3}{2}x$
f) $x^2-\frac{1}{2}x$
g) $x^2+\frac{2}{3}x$
h) $x^2-0{,}6x$
i) $x^2+\sqrt{2}\,x$

Pratimai 3. Išskirkite pilnąjį kvadratą. Kintamasis nebūtinai x, o raidės a, b, p – bet kurie skaičiai.

a) y^2+12y
b) t^2-3t
c) x^2-2ax
d) x^2+ax
e) x^2+4px
f) a^2+ab
g) $x^2+(a+1)x$
h) $x^2-(p+2)x$
i) x^2

Klausimas 1. *Mokinys teigia:* $x^2-6x=(x-3)^2-3$. *Patikrinkite lygybę, paaiškinkite klaidą ir užrašykite teisingą.*

2. Kai prieš x^2 yra koeficientas: ax^2+bx

O jei...? O jei prieš x^2 yra koeficientas, pavyzdžiui, $2x^2+12x$? Iš pirmo žvilgsnio tai naujas uždavinys: Įrankis 1 kalba tik apie x^2+bx, tad atrodo, kad reikės naujo metodo. Bet iškelkime 2 prieš skliaustus:

$$2x^2+12x=2\left(x^2+6x\right).$$

Skliaustuose – lygiai tas pavidalas, su kuriuo dirbti jau mokame! Naujas uždavinys susivedė į seną.

Pavyzdys 3 (koeficientas prieš x^2)

Išskirkite pilnąjį kvadratą:

a) $2x^2+12x$
b) $-3x^2+5x$

Kaip galvoti. Planas iš trijų žingsnių: iškeliame a prieš skliaustus; skliaustuose taikome Įrankį 1; atskliaudžiame išorinius skliaustus, t. y. abu gautus narius padauginame iš a.

Sprendimas.

a) $2x^2+12x=2\left(x^2+6x\right)=2\left((x+3)^2-9\right)=2(x+3)^2-18.$

b) $-3x^2+5x=-3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)=-3\left(\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right)=-3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{25}{12}$.

Komentaras. Atkreipkite dėmesį į b) atvejį: iškėlus -3, pasikeitė ženklas prie x, o pabaigoje atskliaudus „$-$“ virto „$+$“. Su neigiamu a klystama dažniausiai – čia verta dirbti lėtai.

Metodai: suvedimas į žinomą uždavinį.

Pavyzdys 4 (raidiniai koeficientai)

Išskirkite pilnąjį kvadratą:

a) $4x^2+bx$ b) ax^2+2x $(a\neq 0)$

Sprendimas.

a) Iškėlus 4, koeficientas prie x skliaustuose yra $\frac{b}{4}$, jo pusė – $\frac{b}{8}$:

$$4x^2+bx=4\left(x^2+\frac{b}{4}x\right)=4\left(\left(x+\frac{b}{8}\right)^2-\frac{b^2}{64}\right)=4\left(x+\frac{b}{8}\right)^2-\frac{b^2}{16}.$$

b) Iškėlus a, koeficientas skliaustuose yra $\frac{2}{a}$, jo pusė – $\frac{1}{a}$:

$$ax^2+2x=a\left(x^2+\frac{2}{a}x\right)=a\left(\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a^2}\right)=a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}.$$

Komentaras. b) atveju sąlyga $a\neq 0$ būtina: be jos negalėtume dalyti iš a. Pastebėkite ir paskutinį žingsnį: $a\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a}$.

Bendras atvejis. Tą patį atlikime su raidėmis ($a\neq 0$), žingsnis po žingsnio:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right) && \text{iškeliame } a \text{ prieš skliaustus}\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) && \text{Įrankis 1: pusė koeficiento } \tfrac{b}{a} \text{ yra } \tfrac{b}{2a}\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{pakeliame kvadratu}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\cdot\frac{b^2}{4a^2} && \text{atskliaudžiame}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a} && \text{suprastiname iš } a.
\end{aligned}$$

Bendra formulė (gauta iš Įrankio 1). Jei $a\neq 0$, tai $\quad ax^2+bx=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$.

Pastaba. Tai ne naujas įrankis, o tik Įrankio 1 taikymas. Šios formulės kalti nereikia: pamiršę iškelkite a ir gausite ją patys per pusę minutės.

Pratimai 4. Išskirkite pilnąjį kvadratą: iškelkite a prieš skliaustus ir skliaustuose taikykite Įrankį 1.

a) $2x^2+8x$
b) $3x^2-12x$
c) $-x^2+6x$
d) $-2x^2-8x$
e) $2x^2+4x$
f) $-3x^2+18x$
g) $4x^2-8x$
h) $-2x^2+12x$
i) $5x^2+20x$

Pratimai 5. Išskirkite pilnąjį kvadratą: iškelkite a prieš skliaustus ir skliaustuose taikykite Įrankį 1.

a) $2x^2+6x$
b) $4x^2-4x$
c) $-2x^2+2x$
d) $3x^2+3x$
e) $5x^2-5x$
f) $-x^2+5x$
g) $3x^2+2x$
h) $\frac{1}{2}x^2+3x$
i) $\frac{2}{3}x^2-4x$

Pratimai 6. Išskirkite pilnąjį kvadratą. Raidės a, b, p – bet kurie skaičiai (kur nurodyta, $a\neq 0$).

a) $3x^2-bx$
b) $-x^2+bx$
c) ax^2-3x $(a\neq 0)$
d) ax^2+2ax $(a\neq 0)$
e) ax^2-a^2x $(a\neq 0)$
f) $2x^2+(p+1)x$

Klausimas 2. *Mokinys užrašė* $-x^2+6x=-(x-3)^2-9$.

a) Patikrinkite lygybę įrašydami $x=0$*, paaiškinkite klaidą ir ją ištaisykite.*

b) Ar pakanka patikrinti lygybę su viena x *reikšme, kad žinotume, jog ji teisinga su visais* x*? Pagrįskite pavyzdžiu.*

3. Bendrasis atvejis: ax^2+bx+c

O jei...? O jei dar yra laisvasis narys, pavyzdžiui, $2x^2-8x+5$? Ir vėl naujo įrankio nereikia: su $2x^2-8x$ dirbti jau mokame, o c tiesiog pridėsime gale.

Pavyzdys 5 (bendrasis atvejis)

Išskirkite pilnąjį kvadratą:

a) $2x^2-8x+5$
b) $-x^2+4x+1$
c) $3x^2+2x-1$

Sprendimas.

a) $2x^2-8x+5=2\left(x^2-4x\right)+5=2\left((x-2)^2-4\right)+5=2(x-2)^2-8+5=2(x-2)^2-3$.
b) $-x^2+4x+1=-\left(x^2-4x\right)+1=-\left((x-2)^2-4\right)+1=-(x-2)^2+4+1=-(x-2)^2+5$.
c) $3x^2+2x-1=3\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)-1=3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right)-1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}-1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$.

Komentaras. Laisvąjį narį patogu iš karto palikti už skliaustų: tada jo nereikia dalyti iš a.

Pavyzdys 6 (raidiniai koeficientai)

Išskirkite pilnąjį kvadratą:

a) ax^2+2x+1 $(a\neq 0)$
b) $-2x^2+bx+c$

Sprendimas.

a) $ax^2+2x+1=a\left(x^2+\frac{2}{a}x\right)+1=a\left(\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a^2}\right)+1=a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2+1-\frac{1}{a}$.

b) $-2x^2+bx+c=-2\left(x^2-\frac{b}{2}x\right)+c=-2\left(\left(x-\frac{b}{4}\right)^2-\frac{b^2}{16}\right)+c=-2\left(x-\frac{b}{4}\right)^2+c+\frac{b^2}{8}$.

Komentaras. b) atveju iškėlus -2, koeficientas prie x skliaustuose yra $-\frac{b}{2}$ (ne $\frac{b}{2}$!). Patikra atskliaudžiant: $-2\left(x-\frac{b}{4}\right)^2+c+\frac{b^2}{8}=-2x^2+bx-\frac{b^2}{8}+c+\frac{b^2}{8}=-2x^2+bx+c$.

Bendras atvejis. Dabar tą patį atlikime su raidėmis ($a\neq 0$). Darome lygiai tuos pačius žingsnius kaip pavyzdyje – tik vietoje skaičių rašome raides:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c && \text{iškeliame } a \text{ tik iš pirmųjų dviejų narių}\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c && \text{skliaustuose – Įrankis 1}\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c && \text{pakeliame kvadratu}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\cdot\frac{b^2}{4a^2}+c && \text{atskliaudžiame}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c && \text{suprastiname iš } a\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} && c \text{ užrašome su vardikliu } 4a\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} && \text{sutraukiame trupmenas.}
\end{aligned}
$$

Paskutiniame žingsnyje atkreipkite dėmesį į ženklus: $-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Bendra formulė (gauta iš Įrankio 1). Jei $a\neq 0$, tai $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$,

t. y. $h=-\frac{b}{2a}$, $k=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Pastaba. Įsidėmėkite skaitiklyje atsiradusį reiškinį b^2-4ac. Jis toks svarbus, kad netrukus gaus savo vardą, ir pamatysime, kad nuo jo ženklo priklauso labai daug.

Pratimai 7. Išskirkite pilnąjį kvadratą. Atsakymą patikrinkite atskliausdami.

a) x^2+6x+5
b) x^2-8x+3
c) x^2+4x-3
d) $x^2-10x+25$
e) x^2+3x+1
f) x^2-x-2
g) x^2-4x+7
h) x^2-x+1
i) $x^2+10x+30$

Pratimai 8. Išskirkite pilnąjį kvadratą. Atsakymą patikrinkite atskliausdami.

a) $2x^2+8x+3$
b) $3x^2-12x+5$
c) $-x^2+6x-2$
d) $-2x^2-8x+1$
e) $2x^2+6x+4$
f) $4x^2-4x+7$
g) $-3x^2+6x+5$
h) $5x^2-5x+2$
i) $\frac{1}{2}x^2+3x-1$

Pratimai 9. Išskirkite pilnąjį kvadratą. Atsakymą patikrinkite atskliausdami.

a) $3x^2 + 2x + 1$
b) $4x^2 - 3x + 2$
c) $-2x^2 + 3x - 1$
d) $5x^2 + 2x + 1$
e) $-3x^2 - 4x + 2$
f) $2x^2 - 5x + 3$
g) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$
h) $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$
i) $-4x^2 + 4x - 1$

Pratimai 10. Išskirkite pilnąjį kvadratą. Raidės a, b, c, p, q – bet kurie skaičiai (kur nurodyta, $a \neq 0$).

a) $3x^2 + bx - 2$
b) $ax^2 - 5x + c$ $(a \neq 0)$
c) $4x^2 - 3x + c$
d) $ax^2 + bx + 1$ $(a \neq 0)$
e) $x^2 + px + q$
f) $x^2 + 2ax + a^2 + 1$

Išskirti pilnąjį kvadratą dažnai tenka kartu su tuo, ką išmokome 1 lape: atskliausti, apskaičiuoti reikšmę, rasti koeficientus. Pasitreniruokime viską kartu.

Pratimai 11. Daugianaris duotas pilnojo kvadrato pavidalu. Užrašykite jį standartiniu pavidalu ir nurodykite a, b, c.

a) $(x-3)^2 + 2$
b) $2(x+1)^2 - 5$
c) $-(x-2)^2 + 4$
d) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$
e) $-2(x+3)^2$
f) $\frac{1}{2}(x-4)^2 - 8$

Pratimai 12. $P(x) = 3(x-2)^2 - 5$. Apskaičiuokite *neatskliausdami*:

a) $P(2)$
b) $P(4)$
c) $P(-1)$
d) $P(1) + P(3)$
e) laisvąjį narį c
f) $P(2+t)$

Pratimai 13. Pirma raskite nežinomus koeficientus (1 lapas), paskui išskirkite pilnąjį kvadratą.

a) $P(x) = x^2 + bx + 5,\ P(1) = 0$
b) $P(x) = ax^2 + 8x + 3,\ P(-1) = -3$
c) $P(x) = x^2 - 3x + c,\ P(2) = 0$
d) $P(x) = ax^2 - 4x + a,\ P(1) = 2$
e) $P(x) = -x^2 + bx + 1,\ P(2) = 5$
f) $P(x) = ax^2 + bx + c,\ P(0) = 4,\ P(1) = 1,\ P(-1) = 9$

Pratimai 14. $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Užrašykite standartiniu pavidalu, paskui išskirkite pilnąjį kvadratą.

a) $P(x+1)$
b) $P(x-1)$
c) $P(-x)$
d) $P(2x)$
e) $P(x) + P(-x)$
f) $P(x+a)$

Klausimas 3. *Išskirkite pilnąjį kvadratą pačiame $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Kaip iš gauto pavidalo* iš karto *(be atskliaudimo) gauti paskutinių pratimų $P(x+1)$, $P(-x)$ ir $P(x+a)$ pilnojo kvadrato pavidalus?*

Esmė. Visi trys atvejai – $x^2 + bx$, $ax^2 + bx$ ir $ax^2 + bx + c$ – išsprendžiami vienu Įrankiu 1. Antrąjį ir trečiąjį atvejus suvedėme į pirmąjį: iškėlėme a prieš skliaustus, o laisvąjį narį pridėjome gale. Tai ir yra viena svarbiausių matematiko strategijų: naują uždavinį suvesti į seną, kurį jau mokame spręsti.

Uždaviniai

1. Išskirkite pilnąjį kvadratą *geometriškai*: nubraižykite kvadratą, kurio kraštinė $x > 0$, ir stačiakampius $x \times 1$; stačiakampius padalykite į dvi lygias juostas ir priglauskite prie dviejų gretimų kvadrato kraštinių. Kiek vienetinių kvadratėlių trūksta iki kvadrato? Kokią lygybę gaunate?

a) $x^2 + 8x$ b) $x^2 + 14x$

2. Dvinario kvadratu vadiname reiškinį $(x + d)^2$.

a) Su kuriomis p reikšmėmis reiškinys $x^2 + px + 9$ yra dvinario kvadratas?
b) Su kuria c reikšme reiškinys $x^2 - 5x + c$ yra dvinario kvadratas?

3. Raskite kvadratinį daugianarį $P(x) = ax^2 + bx + c$, kurio $P(0) = 3$, $P(1) = 0$, $P(2) = -1$. Užrašykite jį standartiniu ir pilnojo kvadrato pavidalu.

4. Daugianaris $P(x) = a(x - 1)^2 + k$ tenkina $P(0) = 5$ ir $P(3) = 17$. Raskite a ir k ir užrašykite $P(x)$ standartiniu pavidalu.

5. Raskite kvadratinį daugianarį $P(x) = ax^2 + bx + c$, kurio $P(-1) = 10$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$. Užrašykite jį standartiniu ir pilnojo kvadrato pavidalu.

6. Raskite kvadratinį daugianarį $P(x) = ax^2 + bx + c$, kurio $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(-2) = 3$. Užrašykite jį standartiniu ir pilnojo kvadrato pavidalu.

7. Raskite kvadratinį daugianarį $P(x) = ax^2 + bx + c$, kurio $P(0) = -5$, $P(1) = -3$, $P(2) = -5$. Užrašykite jį standartiniu ir pilnojo kvadrato pavidalu. Kokį ryšį matote tarp lygybės $P(0) = P(2)$ ir gauto pilnojo kvadrato pavidalo?

8. Kvadratinio daugianario $P(x) = 2x^2 + bx + c$ pilnojo kvadrato pavidalas yra $2(x - h)^2 + k$. Žinoma, kad $P(0) = 11$ ir $P(1) = 5$. Raskite h ir k.

9. Duotas daugianaris $P(x) = (m - 2)x^2 + 4x + 1$.

a) Su kuriomis m reikšmėmis jis kvadratinis?
b) Su kuria m reikšme jis yra dvinario kvadratas? Užrašykite tą kvadratą.

10. Raskite realiuosius skaičius h ir k, su kuriais lygybė teisinga su visais x. Įrodykite, kad kitų tokių h ir k nėra.

a) $x^2 - 8x + 7 = (x - h)^2 + k$ b) $-2x^2 + 12x - 1 = -2(x - h)^2 + k$

11. Užrašykite pilnojo kvadrato pavidalu $P(x) = x^2 + 2(a + 1)x + a^2$.

12. Duotas daugianaris $P(x) = x^2 + x$. Apskaičiuokite $P(1), P(2), P(3), P(4)$ ir skirtumus $P(2) - P(1)$, $P(3) - P(2)$, $P(4) - P(3)$. Ką pastebite? Įrodykite, kad su kiekvienu n

$$P(n + 1) - P(n) = 2n + 2.$$

13. Raskite kvadratinį daugianarį $P(x)$, kurio $P(-1) = -5$, $P(1) = -1$, $P(2) = 1$.

14. Įrodykite, kad jokiam natūraliajam n skaičius $n^2 + n + 1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Pasitikrinkite

Po šio lapo turėtumėte mokėti:

- ☐ išskirti pilnąjį kvadratą reiškiniuose $x^2 + bx$, $ax^2 + bx$ ir $ax^2 + bx + c$, taip pat su trupmenomis ir raidėmis;
- ☐ pertvarkyti atgal (atskliausti) ir taip patikrinti savo atsakymą;
- ☐ naudotis pilnojo kvadrato pavidalu: nustatyti, kada reiškinys yra dvinario kvadratas;
- ☐ rasti daugianarį iš trijų reikšmių ir užrašyti jį abiem pavidalais.

Pratimai 15. Pasitikrinkite be užrašų (apie 15 min.). Jei suklydote – grįžkite prie atitinkamo skyriaus.

a) Išskirkite pilnąjį kvadratą: $x^2 - 12x$

b) Išskirkite pilnąjį kvadratą: $x^2 + 5x + 2$

c) Išskirkite pilnąjį kvadratą: $3x^2 - 6x + 7$

d) Išskirkite pilnąjį kvadratą: $-2x^2 + 10x$

e) Atskliauskite: $-(x + 4)^2 + 3$

f) Su kuria c reiškinys $x^2 + 10x + c$ yra dvinario kvadratas?

g) Išskirkite pilnąjį kvadratą (a – bet koks skaičius): $x^2 + 2ax + 5$

h) Raskite $P(x) = ax^2 + bx + c$, jei $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(2) = 3$, ir užrašykite jį pilnojo kvadrato pavidalu.

Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

Įrankis 1 *(pilnojo kvadrato išskyrimas)* $x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$

Pratimų atsakymai

Pratimai 1. a) $(x+2)^2-4$; b) $(x+3)^2-9$; c) $(x-4)^2-16$; d) $(x-6)^2-36$; e) $(x+1)^2-1$; f) $(x-5)^2-25$; g) $(x+7)^2-49$; h) $(x-8)^2-64$; i) $(x+10)^2-100$;

Pratimai 2. a) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$; b) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$; c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$; d) $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$; e) $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$; f) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$; g) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$; h) $(x-0{,}3)^2-0{,}09$; i) $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$;

Pratimai 3. a) $(y+6)^2-36$; b) $\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$; c) $(x-a)^2-a^2$; d) $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$; e) $(x+2p)^2-4p^2$; f) $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}$; g) $\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{(a+1)^2}{4}$; h) $\left(x-\frac{p+2}{2}\right)^2-\frac{(p+2)^2}{4}$; i) $(x-0)^2+0$;

Pratimai 4. a) $2(x+2)^2-8$; b) $3(x-2)^2-12$; c) $-(x-3)^2+9$; d) $-2(x+2)^2+8$; e) $2(x+1)^2-2$; f) $-3(x-3)^2+27$; g) $4(x-1)^2-4$; h) $-2(x-3)^2+18$; i) $5(x+2)^2-20$;

Pratimai 5. a) $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$; b) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1$; c) $-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$; d) $3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$; e) $5\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$; f) $-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$; g) $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$; h) $\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{9}{2}$; i) $\frac{2}{3}(x-3)^2-6$;

Pratimai 6. a) $3\left(x-\frac{b}{6}\right)^2-\frac{b^2}{12}$; b) $-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4}$; c) $a\left(x-\frac{3}{2a}\right)^2-\frac{9}{4a}$; d) $a(x+1)^2-a$; e) $a\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^3}{4}$; f) $2\left(x+\frac{p+1}{4}\right)^2-\frac{(p+1)^2}{8}$;

Pratimai 7. a) $(x+3)^2-4$; b) $(x-4)^2-13$; c) $(x+2)^2-7$; d) $(x-5)^2$; e) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$; f) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$; g) $(x-2)^2+3$; h) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$; i) $(x+5)^2+5$;

Pratimai 8. a) $2(x+2)^2-5$; b) $3(x-2)^2-7$; c) $-(x-3)^2+7$; d) $-2(x+2)^2+9$; e) $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$; f) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+6$; g) $-3(x-1)^2+8$; h) $5\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$; i) $\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{11}{2}$;

Pratimai 9. a) $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$; b) $4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{23}{16}$; c) $-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$; d) $5\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$; e) $-3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$; f) $2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$; g) $-\frac{1}{2}(x-2)^2+5$; h) $\frac{1}{3}(x+3)^2+1$; i) $-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$;

Pratimai 10. a) $3\left(x+\frac{b}{6}\right)^2-2-\frac{b^2}{12}$; b) $a\left(x-\frac{5}{2a}\right)^2+c-\frac{25}{4a}$; c) $4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+c-\frac{9}{16}$; d) $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1-\frac{b^2}{4a}$; e) $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$; f) $(x+a)^2+1$;

Pratimai 11. a) $x^2-6x+11$; b) $2x^2+4x-3$; c) $-x^2+4x$; d) $3x^2-2x+1$; e) $-2x^2-12x-18$; f) $\frac{1}{2}x^2-4x$;

Pratimai 12. a) -5; b) 7; c) 22; d) -4; e) $c=P(0)=7$; f) $3t^2-5$;

Pratimai 13. a) $b=-6$; $(x-3)^2-4$; b) $a=2$; $2(x+2)^2-5$; c) $c=2$; $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$; d) $a=3$; $3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$; e) $b=4$; $-(x-2)^2+5$; f) $x^2-4x+4=(x-2)^2$;

Pratimai 14. a) $x^2+4x=(x+2)^2-4$; b) x^2-4; c) $x^2-2x-3=(x-1)^2-4$; d) $4x^2+4x-3=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4$; e) $2x^2-6$; f) $x^2+2(a+1)x+a^2+2a-3=(x+a+1)^2-4$;

Pratimai 15. a) $(x-6)^2-36$; b) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$; c) $3(x-1)^2+4$; d) $-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$; e) $-x^2-8x-13$; f) $c=25$; g) $(x+a)^2+5-a^2$; h) $2x^2-3x+1=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$;

Uždavinių atsakymai

1. a) 16 kvadratėlių; $x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$; b) 49 kvadratėliai; $x^2 + 14x = (x+7)^2 - 49$.
2. a) $p = \pm 6$; b) $c = \frac{25}{4}$.
3. $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$.
4. $a = 4$, $k = 1$; $P(x) = 4x^2 - 8x + 5$.
5. $2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2$.
6. $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
7. $-2x^2 + 4x - 5 = -2(x-1)^2 - 3$; skaičius 1 – vidurys tarp 0 ir 2.
8. $h = 2$, $k = 3$.
9. a) $m \neq 2$; b) $m = 6$, $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$.
10. a) $h = 4$, $k = -9$; b) $h = 3$, $k = 17$.
11. $(x + a + 1)^2 - 2a - 1$.
12. 2, 6, 12, 20; skirtumai 4, 6, 8.
13. Tokio daugianario nėra ($a = 0$).
14. Įrodymas – žr. sprendimus.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. Reiškinyje $x^2 + 8x$ yra 8 stačiakampiai $x \times 1$: dvi juostos po 4.
2. Išskirkite pilnąjį kvadratą: kas turi likti „už kvadrato“?
3. Pradėkite nuo $P(0)$: kam jis lygus?
4. Įrašykite $x = 0$ ir $x = 3$ tiesiai į pilnojo kvadrato pavidalą – gausite dvi lygtis su a ir k.
5. Atimkite lygtis, gautas iš $P(1)$ ir $P(-1)$: kas lieka?
7. Kuris skaičius yra „per vidurį“ tarp 0 ir 2? Pažiūrėkite į skliaustus.
8. Kam lygus $P(0)$? (1 lapo Įrankis 1.)
9. b) Iškelkite $m - 2$ prieš skliaustus ir išskirkite pilnąjį kvadratą. Kas turi likti „už kvadrato“?
10. Vienatinumui: atskliauskite dešinę pusę ir sulyginkite koeficientus (1 lapas).
11. Koeficientas prie x yra $2(a+1)$; kam lygi jo pusė?
12. Įrašykite $x = n + 1$ ir sutraukite panašiuosius narius.
13. Išspręskite sistemą ir atidžiai pažiūrėkite į koeficientą a.
14. Įrodykite, kad $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$. Kas yra tarp dviejų gretimų kvadratų?

Sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

5 uždavinys.

Kaip galvoti. Turime tris nežinomuosius a, b, c ir tris duomenis – reikia trijų lygčių. Kiekviena reikšmė $P(-1)$, $P(1)$, $P(2)$ duoda vieną lygtį. Pastebėkite, kad $P(-1)$ ir $P(1)$ lygtyse skiriasi tik ženklas prie b: sudėję ir atėmę jas, atsikratysime arba b, arba $a+c$ (kaip siūlo užuomina).

Sprendimas. Įrašome kiekvieną reikšmę į $P(x) = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{aligned} P(-1) &= a - b + c = 10, \\ P(1) &= a + b + c = 2, \\ P(2) &= 4a + 2b + c = 4. \end{aligned}$$

Iš antrosios lygties atėmę pirmąją, gauname $2b = 2 - 10 = -8$, t. y. $b = -4$. Tada iš antrosios lygties $a + c = 2 - b = 6$. Trečioje lygtyje įrašome $b = -4$: $4a - 8 + c = 4$, t. y. $4a + c = 12$. Atėmę iš šios lygties $a + c = 6$, gauname $3a = 6$, taigi $a = 2$, o $c = 6 - a = 4$.

Vadinasi, $P(x) = 2x^2 - 4x + 4$. Išskirkime pilnąjį kvadratą:

$$2x^2 - 4x + 4 = 2\left(x^2 - 2x\right) + 4 = 2\left((x-1)^2 - 1\right) + 4 = 2(x-1)^2 - 2 + 4 = 2(x-1)^2 + 2.$$

Komentaras. Pasitikrinkime: $P(-1) = 2+4+4 = 10$, $P(1) = 2-4+4 = 2$, $P(2) = 8-8+4 = 4$. Tinka.

6 uždavinys.

Kaip galvoti. Reikšmė $P(0)$ ypač patogi: įrašę $x = 0$, visi nariai su x dingsta ir lieka tik c (1 lapo Įrankis 1). Tad pradėkime nuo jos, o su likusiomis dviem reikšmėmis gausime dvi lygtis nežinomiesiems a ir b.

Sprendimas. Kadangi $P(0) = c$, tai $c = 1$. Dabar

$$\begin{aligned} P(1) = a + b + 1 = 3 &\;\Rightarrow\; a + b = 2, \\ P(-2) = 4a - 2b + 1 = 3 &\;\Rightarrow\; 4a - 2b = 2 \;\Rightarrow\; 2a - b = 1. \end{aligned}$$

Sudėję lygtis $a + b = 2$ ir $2a - b = 1$, gauname $3a = 3$, taigi $a = 1$, o $b = 2 - a = 1$.

Vadinasi, $P(x) = x^2 + x + 1$. Pilnojo kvadrato išskyrimas: koeficientas prie x yra 1, jo pusė – $\frac{1}{2}$, todėl

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Komentaras. Pasitikrinkime: $P(1) = 1 + 1 + 1 = 3$, $P(-2) = 4 - 2 + 1 = 3$. Tinka.

7 uždavinys.

Kaip galvoti. Pradėkime nuo $P(0)$: jis iš karto duoda c. Likusias dvi reikšmes paverskime lygtimis. O į pilnojo kvadrato pavidalą pažiūrėkime atidžiai – užduotyje prašoma pastebėti ryšį su lygybe $P(0) = P(2)$.

Sprendimas. Kadangi $P(0) = c$, tai $c = -5$. Toliau

$$\begin{aligned} P(1) = a + b - 5 = -3 &\;\Rightarrow\; a + b = 2, \\ P(2) = 4a + 2b - 5 = -5 &\;\Rightarrow\; 4a + 2b = 0 \;\Rightarrow\; 2a + b = 0. \end{aligned}$$

Atėmę pirmąją lygtį iš antrosios, gauname $a = -2$, tada $b = 2 - a = 4$. Taigi $P(x) = -2x^2 + 4x - 5$. Išskirkime pilnąjį kvadratą:

$$-2x^2 + 4x - 5 = -2\left(x^2 - 2x\right) - 5 = -2\left((x-1)^2 - 1\right) - 5 = -2(x-1)^2 + 2 - 5 = -2(x-1)^2 - 3.$$

Ryšys su $P(0) = P(2)$. Skliaustuose gavome $x - 1$, o 1 yra lygiai vidurys tarp 0 ir 2. Priežastis: $P(1+t) = -2t^2 - 3$ ir $P(1-t) = -2(-t)^2 - 3 = -2t^2 - 3$, t. y. $P(1+t) = P(1-t)$ su visais t. Reikšmės vienodos skaičiuose, vienodai nutolusiuose nuo 1 – tarp jų ir $0 = 1 - 1$ bei $2 = 1 + 1$.

Komentaras. Tai pirmas pastebėjimas apie simetriją: pilnojo kvadrato pavidalas $a(x-h)^2 + k$ rodo, kad reikšmės su $x = h + t$ ir $x = h - t$ sutampa. Šią mintį dar sutiksime vėliau.

8 uždavinys.

Kaip galvoti. Nežinomieji b ir c randami iš duotų reikšmių $P(0)$ ir $P(1)$ – tai 1 lapo metodas. Kai b ir c bus žinomi, liks įprastas pilnojo kvadrato išskyrimas, nes vyriausiasis koeficientas 2 jau duotas.

Sprendimas. Kadangi $P(0) = c$, tai $c = 11$. Toliau $P(1) = 2 + b + 11 = 5$, todėl $b = 5 - 13 = -8$. Vadinasi, $P(x) = 2x^2 - 8x + 11$. Išskirkime pilnąjį kvadratą: iškeliame 2 iš pirmųjų dviejų narių, o 11 paliekame už skliaustų:

$$2x^2 - 8x + 11 = 2\left(x^2 - 4x\right) + 11 = 2\left((x-2)^2 - 4\right) + 11 = 2(x-2)^2 - 8 + 11 = 2(x-2)^2 + 3.$$

Palyginę su $2(x-h)^2 + k$, gauname $h = 2$, $k = 3$.

Komentaras. Atkreipkite dėmesį: skliaustuose esantį -4 dauginame iš 2, todėl gale atsiranda -8, o ne -4.

9 uždavinys.

Kaip galvoti. a) klausimas – apie tai, kada x^2 koeficientas nėra nulis: tada ir tik tada daugianaris kvadratinis. b) užuomina rodo kelią: iškelkime koeficientą prie x^2 ir išskirkime pilnąjį kvadratą. Reiškinys bus dvinario kvadratas, kai „už kvadrato“ nieko neliks.

Sprendimas. a) Daugianaris kvadratinis, kai vyriausiasis koeficientas nelygus nuliui: $m - 2 \neq 0$, t. y. $m \neq 2$.

b) Reikia, kad būtų $m \neq 2$ (kitaip daugianaris ne kvadratinis). Pažymėkime $a = m - 2 \neq 0$. Tada

$$ax^2 + 4x + 1 = a\left(x^2 + \frac{4}{a}x\right) + 1 = a\left(\left(x + \frac{2}{a}\right)^2 - \frac{4}{a^2}\right) + 1 = a\left(x + \frac{2}{a}\right)^2 + 1 - \frac{4}{a}.$$

Čia koeficiento $\frac{4}{a}$ pusė yra $\frac{2}{a}$, o $a \cdot \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a}$. Reiškinys yra kvadratas, kai nieko nelieka „už kvadrato“: $1 - \frac{4}{a} = 0$, t. y. $a = 4$, taigi $m = a + 2 = 6$. Tada $P(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$.

Komentaras. Galima spręsti ir kitaip: iš karto rašyti $ax^2 + 4x + 1 = (px + q)^2 = p^2x^2 + 2pqx + q^2$ ir sulyginti koeficientus: $q^2 = 1$, $2pq = 4$, $p^2 = a$. Iš $q = \pm 1$ gauname $p = \pm 2$, taigi $a = 4$ – tas pats atsakymas.

10 uždavinys.

Kaip galvoti. Pirma dalis – paprastas pilnojo kvadrato išskyrimas, kuris mums duos kandidatus h ir k. Bet užduotyje prašoma ir įrodyti, kad kitų porų nėra, o tam reikia kito samprotavimo: jei lygybė teisinga su visais x, tai atskliautus abi pusės turi turėti tuos pačius koeficientus (1 lapas).

Sprendimas. a) Išskiriame pilnąjį kvadratą: $x^2-8x+7=(x-4)^2-16+7=(x-4)^2-9$. Taigi tinka $h=4$, $k=-9$.

Vienatinumas. Tarkime, lygybė teisinga su kokiais nors h, k. Atskliaudę dešinę pusę:

$$x^2-8x+7=(x-h)^2+k=x^2-2hx+h^2+k.$$

Dvinariai lygūs su visais x, todėl lygūs ir koeficientai prie x bei laisvieji nariai: $-2h=-8$ ir $h^2+k=7$. Iš pirmosios $h=4$, tada iš antrosios $k=7-16=-9$. Kitų porų nėra.

b) Išskiriame pilnąjį kvadratą:
$-2x^2+12x-1=-2\left(x^2-6x\right)-1=-2\left((x-3)^2-9\right)-1=-2(x-3)^2+17$. Taigi tinka $h=3$, $k=17$.

Vienatinumas: atskliaudžiame $-2(x-h)^2+k=-2x^2+4hx-2h^2+k$ ir sulyginame koeficientus su $-2x^2+12x-1$: $4h=12$ ir $-2h^2+k=-1$. Iš pirmosios $h=3$, tada $k=-1+18=17$. Kitų porų nėra.

Komentaras. Du žingsniai turi skirtingą paskirtį: pilnojo kvadrato išskyrimas parodo, kad sprendinys *egzistuoja*, o koeficientų sulyginimas – kad jis *vienintelis*.

11 uždavinys.

Kaip galvoti. Čia koeficientas prie x yra $2(a+1)$ – tai tiesiog „dvigubas kažkas“, todėl jo pusė iš karto matoma: $a+1$. Raidė a elgiasi kaip bet koks skaičius, o $(a+1)$ traktuojame kaip vieną dydį.

Sprendimas. Pagal Įrankį 1, kai $b=2(a+1)$, pusė $\frac{b}{2}=a+1$, todėl

$$x^2+2(a+1)x=(x+a+1)^2-(a+1)^2.$$

Prie to pridėkime laisvąjį narį a^2:

$$P(x)=(x+a+1)^2-(a+1)^2+a^2=(x+a+1)^2-(a^2+2a+1)+a^2=(x+a+1)^2-2a-1.$$

Komentaras. Dažna klaida – ne atskliausti $(a+1)^2$ ir parašyti $-a^2-1+a^2$. Ženklą prieš kvadratą taikome visam $(a+1)^2=a^2+2a+1$. Patikra: su $a=1$ gauname $P(x)=x^2+4x+1$, o formulė duoda $(x+2)^2-3=x^2+4x+1$.

12 uždavinys.

Kaip galvoti. Pirma dalis – tiesiog skaičiavimas: įrašome $x=1,2,3,4$ ir žiūrime, ką parodo skirtumai. Bendrąjį teiginį įrodome taip pat, kaip siūlo užuomina: vietoje x rašome $n+1$ ir atskliaudžiame.

Sprendimas. Skaičiuojame: $P(1)=1+1=2$, $P(2)=4+2=6$, $P(3)=9+3=12$, $P(4)=16+4=20$. Skirtumai: $6-2=4$, $12-6=6$, $20-12=8$ – jie kaskart didėja po 2.

Įrodymas. Su bet kuriuo n

$$P(n+1)-P(n)=\left((n+1)^2+(n+1)\right)-\left(n^2+n\right)=n^2+2n+1+n+1-n^2-n=2n+2.$$

Kvadratai n^2 ir pirmieji nariai n susiprastina, lieka $2n+2$. Tai ir paaiškina pastebėjimą: einant nuo n prie $n+1$, skirtumas $2n+2$ padidėja 2.

Komentaras. Pavyzdžiui, $n=3$: $P(4)-P(3)=20-12=8=2\cdot 3+2$. Tinka.

13 uždavinys.

Kaip galvoti. Kvadratinio daugianario $P(x)=ax^2+bx+c$ turime tris nežinomuosius, o duota trys reikšmės – natūralu sudaryti sistemą. Užuomina perspėja: ją išsprendę, patikrinkite, ar $a\neq 0$. Kvadratinio daugianario apibrėžime to reikalaujama.

Sprendimas. Įrašome duotas reikšmes:

$$\begin{aligned} P(-1) &= a - b + c = -5, \\ P(1) &= a + b + c = -1, \\ P(2) &= 4a + 2b + c = 1. \end{aligned}$$

Iš antrosios lygties atėmę pirmąją, gauname $2b = 4$, t. y. $b = 2$. Tada $a + c = -1 - b = -3$. Trečioje lygtyje $4a + 4 + c = 1$, t. y. $4a + c = -3$. Atėmę iš jos $a + c = -3$, gauname $3a = 0$, taigi $a = 0$ ir $c = -3$.

Vadinasi, vienintelis daugianaris, tenkinantis visas tris sąlygas, yra $P(x) = 2x - 3$. Tai pirmojo laipsnio daugianaris, nes $a = 0$. Kvadratinio daugianario apibrėžimas reikalauja $a \neq 0$, todėl *tokio kvadratinio daugianario nėra*.

Komentaras. Pasitikrinkime: $2 \cdot (-1) - 3 = -5$, $2 \cdot 1 - 3 = -1$, $2 \cdot 2 - 3 = 1$. Tinka. Išvada: trys reikšmės ne visada nusako kvadratinį daugianarį – verta pasitikrinti $a \neq 0$.

14 uždavinys.

Kaip galvoti. Reikia įrodyti, kad skaičius nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Tinka toks metodas: parodyti, kad jis yra tarp dviejų *gretimų* kvadratų, nes tarp jų kito kvadrato nėra. Pažiūrėkime į $n^2 + n + 1$: jis truputį didesnis už n^2 ir turėtų būti mažesnis už kitą kvadratą $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Taip užuomina ir sako.

Sprendimas. **Teiginys 1.** $n^2 < n^2 + n + 1$.

Įrodymas. Atėmę n^2, gauname nelygybę $0 < n + 1$, kuri teisinga, nes n natūralusis. ■

Teiginys 2. $n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$.

Įrodymas. Kadangi $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, atėmę $n^2 + n + 1$ gauname $n > 0$. Tai teisinga. ■

Išvada. Iš 1 ir 2 teiginių $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$. Jei $n^2 + n + 1 = m^2$ su natūraliuoju m, tai $n^2 < m^2 < (n + 1)^2$, taigi $n < m < n + 1$. Tarp dviejų gretimų natūraliųjų skaičių kito natūraliojo skaičiaus nėra – prieštara. Vadinasi, $n^2 + n + 1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Komentaras. Pavyzdžiui, $n = 4$: $16 < 21 < 25$. Tas pats būdas padeda ir kituose uždaviniuose: kai skaičius įspraustas tarp gretimų kvadratų, jis pats kvadratas būti negali.

Metodai: įvertinimas (suspaudimas tarp gretimų kvadratų).