Kvadratinis daugianaris

Lapas 1. Kvadratinis daugianaris: koeficientai ir reikšmės

9 klasė

Šiuo lapu pradedame didelį skyrių apie kvadratinius daugianarius. Iš pirmo žvilgsnio $ax^2 + bx + c$ – paprastas reiškinys. Bet jame slypi tiek daug, kad jam skirsime dešimt lapų. Šiame lape susipažinsime su pagrindinėmis sąvokomis ir išmoksime atsakyti į klausimą: *kaip, žinant kelias daugianario reikšmes, atkurti patį daugianarį?*

1. Kas yra kvadratinis daugianaris

Apibrėžimas (kvadratinis daugianaris). Reiškinys

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

vadinamas **kvadratiniu**, arba **antrojo laipsnio**, **daugianariu** su kintamuoju x. Skaičiai a, b, c – jo **koeficientai**: a – **vyriausiasis koeficientas**, b – **koeficientas prie** x, c – **laisvasis narys**. Užrašas $ax^2 + bx + c$ vadinamas **standartiniu pavidalu**.

Vadovėliuose sutiksite ir pavadinimą *kvadratinis trinaris* – tai tas pats.

Kodėl $a \neq 0$**?** Jei $a = 0$, lieka $P(x) = bx + c$ – tai jau *tiesinis*, arba *pirmojo laipsnio*, daugianaris. Jo savybės visai kitokios, todėl kvadratiniu jo nevadiname. O štai b ir c gali būti bet kokie, ir nuliai taip pat:

$$3x^2 \ (b = c = 0), \qquad x^2 - 5 \ (b = 0), \qquad 2x^2 + x \ (c = 0).$$

Visi trys – tikri kvadratiniai daugianariai.

Pastaba. Koeficientą skaitome *kartu su ženklu*: daugianaryje $4 - x^2$ vyriausiasis koeficientas yra -1, o ne 1; koeficientas prie x lygus 0; laisvasis narys – 4. Jei daugianaris užrašytas ne standartiniu pavidalu, pirmiausia jį pertvarkome: atskliaudžiame ir sutraukiame panašiuosius narius.

Pavyzdys 1 (koeficientai)

Nurodykite koeficientus a, b, c:

a) $5 - 2x^2$ b) $(x-2)^2$ c) $x(2x+1) - 3$

Sprendimas.

a) $5 - 2x^2 = -2x^2 + 0 \cdot x + 5$: $a = -2$, $b = 0$, $c = 5$.
b) $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$: $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$.
c) $x(2x+1) - 3 = 2x^2 + x - 3$: $a = 2$, $b = 1$, $c = -3$.

Komentaras. Kol reiškinys neužrašytas standartiniu pavidalu, jo koeficientų „neperskaitysi“. b) atveju koeficientas $b = -4$ visai nesimato, kol neatskliaudžiame.

Jei pratimai eina lengvai – peršokite prie kitos serijos; jei ne – darykite visus.

Pratimai 1. Kurie reiškiniai yra kvadratiniai daugianariai su kintamuoju x? Pagrįskite.

a) $2x^2 - 3x + 1$
b) $5x - 2$
c) $-x^2 + 4$
d) $x^3 + x^2$
e) $7x^2$
f) $\frac{1}{x} + x^2$
g) -4
h) $\sqrt{2}\,x^2 + 1$
i) $(x+1)^2 - x^2$
j) $x(3-x)$
k) $(x-1)(x+1) + 1 - x^2$
l) $\frac{x^2+1}{2}$

Pratimai 2. Nurodykite koeficientus a, b, c.

a) $2x^2 + 3x - 5$
b) $-x^2 + 4x$
c) x^2
d) $-3 + x - x^2$
e) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x$
f) $3(x-1)(x+2)$

Pratimai 3. Užrašykite kvadratinį daugianarį $P(x)$, kurio:

a) $a = 2, b = -3, c = 1$
b) $a = -1, b = 0, c = 4$
c) $a = \frac{1}{2}, b = -2, c = 0$
d) visi trys koeficientai neigiami
e) tik vienas koeficientas nelygus nuliui
f) $a = b = c$

2. Daugianario reikšmė

Apibrėžimas (reikšmė). Užrašas $P(4)$ reiškia: *kiekvieną* x daugianaryje $P(x)$ pakeičiame skaičiumi 4 ir apskaičiuojame. Gautas skaičius vadinamas daugianario **reikšme**, kai $x = 4$.

Pavyzdžiui, jei $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$, tai

$$P(4) = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 = 32 - 12 + 1 = 21, \qquad P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15.$$

Pastaba. $P(4)$ – ne sandauga „P kart 4“. P – daugianario vardas, o skliaustuose – ką įrašome vietoje x. Įrašydami neigiamą skaičių ar trupmeną, visada rašykite ją skliaustuose: $(-2)^2 = 4$, o $-2^2 = -4$.

Įrašyti galima ne tik skaičių, bet ir raidę ar visą reiškinį. Taisyklė ta pati: *kiekvieną* x keičiame tuo, kas parašyta skliaustuose.

Pavyzdys 2 (įrašome reiškinį)

$P(x) = x^2 - 2x + 3$. Raskite $P(a)$, $P(x+1)$ ir $P(-x)$.

Sprendimas. $P(a) = a^2 - 2a + 3$. $P(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 3 = x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 3 = x^2 + 2$. $P(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 3 = x^2 + 2x + 3$.

Komentaras. Dažniausia klaida – manyti, kad $P(x+1) = P(x) + 1$. Kaip matome, $P(x+1) = x^2 + 2$, o $P(x) + 1 = x^2 - 2x + 4$ – visai kas kita. Įrašant reiškinį, jį *visada* rašome skliaustuose.

Pratimai 4. $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Apskaičiuokite:

a) $P(0)$
b) $P(1)$
c) $P(-1)$
d) $P(3)$
e) $P(-3)$
f) $P(10)$
g) $P\left(\frac{1}{2}\right)$
h) $P\left(-\frac{1}{2}\right)$
i) $P(4) - P(-2)$

Pratimai 5. $Q(x) = -x^2 + 5x - 6$. Apskaičiuokite:

a) $Q(0)$
b) $Q(1)$
c) $Q(-1)$
d) $Q(2)$
e) $Q(3)$
f) $Q(4)$
g) $Q\left(\frac{5}{2}\right)$
h) $Q(6)$
i) $Q(-2)$

Pratimai 6. $P(x) = x^2 - 2x + 3$. Užrašykite standartiniu pavidalu:

a) $P(-a)$
b) $P(2a)$
c) $P(a+1)$
d) $P(x-1)$
e) $P(2x)$
f) $P(x) + P(-x)$

Klausimas 1. *$P(x) = x^2 + 3$. Ar $P(2+3) = P(2) + P(3)$? Ar $P(2 \cdot 3) = P(2) \cdot P(3)$?*

3. Kai koeficientai – raidės

Koeficientai nebūtinai yra konkretūs skaičiai: jie gali būti raidės ar net reiškiniai. Kaip tada atskirti, kuri raidė kintamasis, o kuri – koeficientas? Atsakymą duoda **skliaustai po daugianario vardu**: užrašas $P(x)$ sako, kad kintamasis yra x. Visa kita – koeficientai.

Pavyzdys 3 (parametras)

$P(x) = (m-1)x^2 + 2mx + m + 3$. Nurodykite koeficientus. Su kuriomis m reikšmėmis $P(x)$ yra kvadratinis daugianaris?

Kaip galvoti. Kintamasis – x, todėl m čia tiesiog skaičius, tik dar nežinomas. Grupuojame pagal x laipsnius.

Sprendimas. $a = m - 1$, $b = 2m$, $c = m + 3$. Kvadratinis daugianaris tada ir tik tada, kai $a \neq 0$, t. y. $m \neq 1$. (Kai $m = 1$, gauname $P(x) = 2x + 4$ – tiesinį daugianarį.)

Komentaras. Tą patį reiškinį galima perskaityti ir kaip daugianarį su kintamuoju m:

$$Q(m) = (m-1)x^2 + 2mx + m + 3 = \left(x^2 + 2x + 1\right) m + \left(3 - x^2\right).$$

Kintamojo m atžvilgiu jis – *tiesinis*! Taigi tas pats reiškinys gali būti kvadratinis vieno kintamojo atžvilgiu ir tiesinis – kito. Todėl ir rašome $P(x)$: kad būtų aišku, apie kurį kalbame.

Pratimai 7. Nurodykite koeficientus a, b, c ir sąlygą, kada daugianaris kvadratinis.

a) $P(x) = kx^2 - 3x + k$
b) $P(x) = (p+2)x^2 + px - 1$
c) $P(x) = bx^2 + cx + a$
d) $P(t) = 3t^2 - xt + x^2$
e) $R(y) = xy^2 + x^2y + 1$
f) $P(x) = (m^2 - 1)x^2 + (m-1)x + 2$
g) $P(x) = (k-2)(x^2 + x) + 3x$
h) $P(x) = x^2 + 2ax + a^2$

Pratimai 8. Su kuriomis parametro m reikšmėmis daugianaris $P(x)$ yra kvadratinis? Nurodykite jo vyriausiąjį koeficientą.

a) $P(x) = (m-3)x^2 + 2x + 1$
b) $P(x) = (2m+1)x^2 - mx + 4$
c) $P(x) = (5-m)x^2 + x$
d) $P(x) = (3m-6)x^2 + (m+1)x - m$

e) $P(x) = (4-2m)x^2 + 3$
f) $P(x) = mx^2 + (m-1)x + 2$
g) $P(x) = (1-3m)x^2 - x$
h) $P(x) = (m-2)x^2 + (m-2)x + m - 2$
i) $P(x) = (m-1)(x^2+2) + x$
j) $P(x) = mx^2 - 3x^2 + mx$
k) $P(x) = (2x+m)(mx-1)$
l) $P(x) = (m+1)x^2 - mx^2 + mx$
m) $P(x) = x(mx+1) - mx^2 + 2$

4. Koeficientų radimas iš reikšmių

Dabar apverskime klausimą: daugianaris žinomas tik iš dalies, bet žinome kai kurias jo reikšmes. Kiekviena žinoma reikšmė duoda vieną lygtį koeficientams.

Vienas nežinomas koeficientas

Pavyzdys 4 (viena lygtis)

$P(x) = ax^2 + 3x - 2$ ir $P(2) = 12$. Raskite a.

Sprendimas. Įrašome $x = 2$: $P(2) = 4a + 6 - 2 = 4a + 4$. Kadangi $P(2) = 12$, tai $4a + 4 = 12$, $a = 2$. Taigi $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

Komentaras. Visada patikrinkite: $P(2) = 8 + 6 - 2 = 12$. Teisingai.

Pratimai 9. Raskite nežinomą koeficientą (patikrinkite, ar daugianaris tikrai kvadratinis).

a) $P(x) = ax^2 - x + 5$, $P(1) = 7$
b) $P(x) = 2x^2 + bx - 1$, $P(3) = 20$
c) $P(x) = x^2 - 4x + c$, $P(5) = 0$
d) $P(x) = ax^2 + 2x + 1$, $P(-1) = 5$
e) $P(x) = -x^2 + bx + 6$, $P(2) = 0$
f) $P(x) = ax^2 + x$, $P(2) = 1$
g) $P(x) = ax^2 + ax + 1$, $P(1) = 7$
h) $P(x) = x^2 + bx + b$, $P(2) = 10$
i) $P(x) = ax^2 + 4x + 1$, $P(1) = 5$

Du nežinomi koeficientai: dviejų lygčių sistema

Pavyzdys 5 (dvi lygtys)

$P(x) = ax^2 + bx + 3$, $P(1) = 2$, $P(2) = 7$. Raskite a ir b.

Sprendimas. Kiekviena reikšmė duoda lygtį:

$$P(1) = a + b + 3 = 2, \qquad P(2) = 4a + 2b + 3 = 7, \qquad \text{t. y.} \qquad \begin{cases} a + b = -1, \\ 4a + 2b = 4. \end{cases}$$

Antrąją lygtį padaliję iš 2, gauname $2a + b = 2$. Iš jos atėmę pirmąją: $a = 3$, tada $b = -4$. Atsakymas: $P(x) = 3x^2 - 4x + 3$.

Komentaras. Dviejų nežinomųjų reikia dviejų lygčių, taigi dviejų žinomų reikšmių.

Metodai: lygčių sudarymas, sistemos sprendimas sudėties būdu.

Pratimai 10. Pasitreniruokite spręsti sistemas.

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ x+2y=8 \end{cases}$

Pratimai 11. Raskite nežinomus koeficientus.

a) $P(x)=ax^2+bx+1;\ P(1)=4, P(2)=11$
b) $P(x)=ax^2+bx-2;\ P(1)=0, P(-1)=-6$
c) $P(x)=ax^2+3x+c;\ P(1)=6, P(2)=15$
d) $P(x)=x^2+bx+c;\ P(1)=0, P(3)=0$
e) $P(x)=ax^2+bx;\ P(4)=2, P(2)=4$
f) $P(x)=ax^2-x+c;\ P(-1)=5, P(2)=8$
g) $P(x)=ax^2+bx+5;\ P(1)=4, P(-2)=19$
h) $P(x)=ax^2+bx-4;\ P(2)=P(-2)=8$

Trys nežinomi koeficientai: trijų lygčių sistema

Pavyzdys 6 (trys lygtys)

Raskite kvadratinį daugianarį $P(x)=ax^2+bx+c$, kurio $P(1)=2,\ P(2)=7,\ P(3)=16$.

Kaip galvoti. Trys nežinomieji – trys lygtys. Trijų lygčių sistemą sprendžiame suvesdami ją į dviejų lygčių sistemą, kurią jau mokame spręsti: vieną nežinomąjį *pašaliname*. Visose lygtyse c stovi su koeficientu 1 – todėl jį pašalinti lengviausia, atimant lygtis.

Sprendimas.

$$\begin{cases} a+b+c=2, \\ 4a+2b+c=7, \\ 9a+3b+c=16. \end{cases}$$

Iš antrosios atėmę pirmąją: $3a+b=5$. Iš trečiosios atėmę antrąją: $5a+b=9$. Gavome dviejų lygčių sistemą; atėmę: $2a=4$, $a=2$; tada $b=5-3a=-1$, o $c=2-a-b=1$. Atsakymas: $P(x)=2x^2-x+1$. Patikra: $P(3)=18-3+1=16$.

Komentaras. Tai mūsų pagrindinė strategija: naujas uždavinys (trys lygtys) suvedamas į seną (dvi lygtys).

Metodai: suvedimas į žinomą uždavinį, nežinomojo pašalinimas.

Pratimai 12. Pasitreniruokite spręsti trijų lygčių sistemas.

a) $\begin{cases} a+b+c=6 \\ a-b+c=2 \\ 4a+2b+c=11 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-1 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} a+b+c=4 \\ 2a-b+c=8 \\ a+2b-c=-3 \end{cases}$
d) $\begin{cases} a+2b+3c=14 \\ 2a+b+c=7 \\ 3a-b+2c=7 \end{cases}$

Pratimai 13. Raskite kvadratinį daugianarį $P(x)=ax^2+bx+c$, jei:

a) $P(1)=0, P(2)=3, P(3)=8$
b) $P(1)=6, P(2)=11, P(3)=18$
c) $P(-1)=6, P(1)=0, P(2)=3$
d) $P(0)=-1, P(1)=2, P(2)=9$
e) $P(1)=-2, P(3)=4, P(4)=13$
f) $P(-2)=13, P(1)=1, P(3)=23$

5. Ar galima greičiau? Įrankiai

Sistemos veikia visada, bet sprendžiant jas ilgai – ir lengva suklysti. Pažiūrėkite atidžiau į ankstesnius pratimus: kai tarp žinomų reikšmių pasitaikydavo $P(0)$, $P(1)$ ar $P(-1)$, darbo būdavo gerokai mažiau. Tai ne atsitiktinumas.

Įrankis 1 (reikšmė nulyje)

$P(0) = c$: daugianario reikšmė, kai $x = 0$, lygi laisvajam nariui.

Įrodymas. $P(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. ■

Įrankis 2 (reikšmės taškuose 1 ir -1)

$P(1) = a + b + c$ (koeficientų suma), $P(-1) = a - b + c$. Todėl

$$b = \frac{P(1) - P(-1)}{2}, \qquad a + c = \frac{P(1) + P(-1)}{2}, \qquad a = \frac{P(1) + P(-1)}{2} - P(0).$$

Įrodymas. Įrašome: $P(1) = a + b + c$, $P(-1) = a - b + c$. Atėmę gauname $P(1) - P(-1) = 2b$, sudėję – $P(1) + P(-1) = 2(a + c)$. Paskutinė formulė gaunama iš antrosios, pasinaudojus Įrankiu 1 ($c = P(0)$). ■

Pavyzdys 7 (be sistemos)

$P(0) = 3$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 10$. Raskite $P(x)$.

Sprendimas. $c = P(0) = 3$ (Įrankis 1). $b = \frac{0-10}{2} = -5$, $a + c = \frac{0+10}{2} = 5$, todėl $a = 2$ (Įrankis 2). Atsakymas: $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

Komentaras. Sistemą sprendžiant būtume gavę tą patį, bet čia nereikėjo nė vieno pašalinimo. Įrankiai 1 ir 2 – tai sistema, išspręsta vieną kartą visiems laikams.

Pratimai 14. Raskite kvadratinį daugianarį $P(x) = ax^2 + bx + c$ nesudarydami sistemos (Įrankiai 1–2).

a) $P(0) = 2, P(1) = 5, P(-1) = 3$
b) $P(0) = 1, P(1) = 0, P(-1) = 4$
c) $P(0) = -4, P(1) = 0, P(-1) = -6$
d) $P(0) = 0, P(1) = 3, P(-1) = 1$
e) $P(0) = 5, P(1) = 5, P(-1) = 9$
f) $P(-1) = 6, P(1) = 0, P(0) = 1$

Įrankis 3 (koeficientų sulyginimas)

Jei $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ su visais x, tai $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

Įrodymas. Lygybė teisinga su visais x, todėl ir su $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Įrašę $x = 0$, gauname $c = c'$ (Įrankis 1). Įrašę $x = 1$ ir $x = -1$: $a + b + c = a' + b' + c'$ ir $a - b + c = a' - b' + c'$. Kadangi $c = c'$, tai $a + b = a' + b'$ ir $a - b = a' - b'$. Sudėję gauname $a = a'$, atėmę – $b = b'$. ■

Pastaba. Įrodymas parodo daugiau: dviem kvadratiniams daugianariams sutapti *visur* pakanka sutapti trijuose taškuose 0, 1, -1. Lygybės su *viena* x reikšme nepakanka: $x^2 = x$, kai $x = 1$, bet tai ne tas pats daugianaris.

Pavyzdys 8 (sulyginame koeficientus)

Raskite m ir n, su kuriais $(mx+1)(x-n) = 2x^2 - 5x - 3$ su visais x.

Sprendimas. Atskliaudžiame kairę pusę: $mx^2 + (1-mn)x - n$. Pagal Įrankį 3: $m = 2$, $-n = -3$, $1 - mn = -5$. Iš pirmųjų dviejų $m = 2$, $n = 3$, ir trečioji lygybė tenkinama: $1 - 6 = -5$.

Įrankis 4 (skirtumai)

$P(x+1) - P(x) = 2ax + (a+b)$. Todėl

$$P(2) - 2P(1) + P(0) = 2a.$$

Įrodymas. $P(x+1) - P(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = a(2x+1) + b = 2ax + a + b$. Įrašę $x = 1$ ir $x = 0$: $P(2) - P(1) = 3a + b$, $P(1) - P(0) = a + b$. Atėmę: $P(2) - 2P(1) + P(0) = 2a$. ■

Pastaba. Skirtumas $P(x+1) - P(x)$ – jau *tiesinis* daugianaris: atimdami gretimas reikšmes, „numušame“ laipsnį vienetu. Todėl gretimų reikšmių skirtumai kvadratiniam daugianariui kaskart pakinta tuo pačiu skaičiumi $2a$. Pažiūrėkite: $P(x) = x^2$ reikšmės 0,1,4,9,16, skirtumai 1,3,5,7, jų skirtumai 2,2,2.

Uždaviniai

Daugumą šių uždavinių galima išspręsti „tiesiai“ – sudarius lygčių sistemą. Bet kiekviename yra ir gudresnis kelias, kuriuo sistemos išvengiama. Pabandykite rasti abu.

1. Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = 2$, $P(1) = 5$, $P(-1) = 3$. Raskite $P(x)$.

2. Raskite daugianario $P(x) = (2x-3)^2 + (x+2)^2$ koeficientų sumą *neatskliausdami*.

3. Raskite daugianario $P(x) = (x-3)^2 + 2(x+1)^2 - x$ laisvąjį narį neatskliausdami.

4. $P(x) = (2x+1)^2 - (x-2)^2$. Apskaičiuokite $a - b + c$ neatskliausdami.

5. Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(1) = 7$ ir $P(-1) = 3$. Raskite b ir $a + c$. Ar galima rasti a?

6. Įrodykite: jei kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės $P(2)$ ir $P(-2)$ lygios, tai $b = 0$. Ar teiginys lieka teisingas, jei vietoje 2 imsime bet kurį skaičių $t \neq 0$?

7. Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(1) = 6$, $P(-1) = 2$, $P(2) = 15$. Raskite $P(-2)$.

8. Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(1) = 4$, $P(-1) = -2$, $P(3) = 20$. Raskite $P(-3)$.

9. Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(1) = 5$, $P(-1) = 1$. Raskite $P(5) - P(-5)$. Ar duomenų pakanka, nors žinomos tik dvi reikšmės?

10. Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = 1$, $P(2) = 7$, $P(-2) = 3$. Raskite $P(1) + P(-1)$.

11. Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(3) = P(-3) = 10,\ P(0) = 1$. Raskite $P(1)$.

12. Neatskliausdami raskite $4a + 2b + c$, jei $P(x) = ax^2 + bx + c = (x-1)^2 + (x+3)^2$.

13. Neatskliausdami raskite $4a - 2b + c$, jei $P(x) = ax^2 + bx + c = (3x+2)(x-4) + 5$.

14. Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = 1,\ P(1) = 4,\ P(2) = 11$. Raskite $P(x)$ dviem būdais.

15. Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris $P(x) = ax^2 + bx + c$, kurio $P(1) = P(2) = P(3)$?

16. Įrodykite, kad reiškinio $x^2 + x + 1$ reikšmė su kiekvienu sveikuoju x yra nelyginė.

17. Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ koeficientai a, b, c – sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad $P(1)$ ir $P(-1)$ – to paties lyginumo.

18. Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris su sveikaisiais koeficientais, kurio $P(1) = 2$ ir $P(-1) = 3$?

19. Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ koeficientai – sveikieji skaičiai, o $P(0)$ ir $P(1)$ – nelyginiai. Įrodykite, kad $P(n)$ nelyginis su kiekvienu sveikuoju n.

20. Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris su sveikaisiais koeficientais, kurio $P(0) = 1$ ir $P(2) = 4$?

21. Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ koeficientai a, b, c – sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad $P(5) - P(2)$ dalijasi iš 3.

Pasitikrinkite

Po šio lapo turėtumėte mokėti:

- ☐ atpažinti kvadratinį daugianarį ir nurodyti jo koeficientus a, b, c, net kai reiškinys dar nesutvarkytas;
- ☐ apskaičiuoti daugianario reikšmę, kai vietoje x įrašomas skaičius arba reiškinys;
- ☐ nustatyti, su kuriomis parametro reikšmėmis daugianaris yra kvadratinis;
- ☐ rasti nežinomus koeficientus iš daugianario reikšmių, greitai naudodamiesi $P(0) = c$ ir $P(\pm 1)$.

Pratimai 15. Pasitikrinkite be užrašų (apie 15 min.). Jei suklydote – grįžkite prie atitinkamo skyriaus.

a) Ar $(x+2)^2 - x^2$ yra kvadratinis daugianaris?
b) Nurodykite a, b, c: $(2x-3)(x+1)$
c) $P(x) = 3x^2 - x + 2$. Apskaičiuokite $P(-2)$.
d) $P(x) = x^2 + 3x - 1$. Užrašykite $P(x-2)$ standartiniu pavidalu.
e) Su kuriomis m daugianaris $(m+4)x^2 + mx$ yra kvadratinis?
f) $P(x) = x^2 + bx + c,\ P(0) = 4,\ P(2) = 0$. Raskite b ir c.
g) Raskite $P(x) = ax^2 + bx + c$, jei $P(0) = -2$, $P(1) = 3$, $P(-1) = -1$.

Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

Įrankis 1 *(reikšmė nulyje)* $P(0) = c$

Įrankis 2 *(reikšmės taškuose 1 ir −1)* $P(1) = a + b + c$, $P(-1) = a - b + c$; $b = \frac{P(1)-P(-1)}{2}$, $a + c = \frac{P(1)+P(-1)}{2}$

Įrankis 3 *(koeficientų sulyginimas)* jei $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ su visais x, tai $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$

Įrankis 4 *(skirtumai)* $P(x + 1) - P(x) = 2ax + a + b$; $P(2) - 2P(1) + P(0) = 2a$

Pratimų atsakymai

Pratimai 1. a) taip; b) ne (tiesinis); c) taip; d) ne; e) taip; f) ne; g) ne; h) taip; i) ne: $= 2x + 1$; j) taip: $= -x^2 + 3x$; k) ne: $= 0$; l) taip;

Pratimai 2. a) $a = 2$, $b = 3$, $c = -5$; b) $a = -1$, $b = 4$, $c = 0$; c) $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$; d) $a = -1$, $b = 1$, $c = -3$; e) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = 0$; f) $a = 3$, $b = 3$, $c = -6$;

Pratimai 3. a) $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$; b) $P(x) = -x^2 + 4$; c) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$; d) pvz. $-x^2 - 2x - 3$; e) pvz. $5x^2$ (tai gali būti tik a); f) pvz. $2x^2 + 2x + 2$ (bet ne 0!);

Pratimai 4. a) 1; b) 0; c) 6; d) 10; e) 28; f) 171; g) 0; h) 3; i) 6;

Pratimai 5. a) −6; b) −2; c) −12; d) 0; e) 0; f) −2; g) $\frac{1}{4}$; h) −12; i) −20;

Pratimai 6. a) $a^2 + 2a + 3$; b) $4a^2 - 4a + 3$; c) $a^2 + 2$; d) $x^2 - 4x + 6$; e) $4x^2 - 4x + 3$; f) $2x^2 + 6$;

Pratimai 7. a) $a = k$, $b = -3$, $c = k$; $k \neq 0$; b) $a = p + 2$, $b = p$, $c = -1$; $p \neq -2$; c) vyriausiasis b, prie $x - c$, laisvasis a; $b \neq 0$; d) kintamasis t: 3, $-x$, x^2; visada kvadratinis; e) kintamasis y: x, x^2, 1; $x \neq 0$; f) $a = m^2 - 1$, $b = m - 1$, $c = 2$; $m \neq \pm 1$; g) $a = k - 2$, $b = k + 1$, $c = 0$; $k \neq 2$; h) 1, $2a$, a^2; visada kvadratinis;

Pratimai 8. a) $a = m - 3$; $m \neq 3$; b) $a = 2m + 1$; $m \neq -\frac{1}{2}$; c) $a = 5 - m$; $m \neq 5$; d) $a = 3m - 6$; $m \neq 2$; e) $a = 4 - 2m$; $m \neq 2$; f) $a = m$; $m \neq 0$; g) $a = 1 - 3m$; $m \neq \frac{1}{3}$; h) $a = m - 2$; $m \neq 2$; i) $a = m - 1$; $m \neq 1$; j) $a = m - 3$; $m \neq 3$; k) $a = 2m$; $m \neq 0$; l) $a = 1$; su visomis m; m) $a = 0$; su jokia m;

Pratimai 9. a) $a = 3$; b) $b = 1$; c) $c = -5$; d) $a = 6$; e) $b = -1$; f) $a = -\frac{1}{4}$; g) $a = 3$; h) $b = 2$; i) $a = 0$ – tokio kvadratinio daugianario nėra!;

Pratimai 10. a) $x = 3$, $y = 2$; b) $x = 3$, $y = 1$; c) $x = 2$, $y = 3$;

Pratimai 11. a) $a = 2$, $b = 1$; b) $a = -1$, $b = 3$; c) $a = 2$, $c = 1$; d) $b = -4$, $c = 3$; e) $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{7}{2}$; f) $a = 2$, $c = 2$; g) $a = 2$, $b = -3$; h) $a = 3$, $b = 0$;

Pratimai 12. a) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$; b) $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$; c) $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$; d) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$;

Pratimai 13. a) $x^2 - 1$; b) $x^2 + 2x + 3$; c) $2x^2 - 3x + 1$; d) $2x^2 + x - 1$; e) $2x^2 - 5x + 1$; f) $3x^2 - x - 1$;

Pratimai 14. a) $2x^2 + x + 2$; b) $x^2 - 2x + 1$; c) $x^2 + 3x - 4$; d) $2x^2 + x$; e) $2x^2 - 2x + 5$; f) $2x^2 - 3x + 1$;

Pratimai 15. a) ne: $(x+2)^2 - x^2 = 4x + 4$; b) $2x^2 - x - 3$; $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$; c) 16; d) $x^2 - x - 3$; e) $m \neq -4$; f) $c = 4$, $b = -4$; g) $3x^2 + 2x - 2$;

Uždavinių atsakymai

1. $P(x) = 2x^2 + x + 2$.
2. 10.
3. 11.
4. -8.
5. $b = 2$, $a + c = 5$; a rasti negalima (reikia dar vienos reikšmės).
6. Teiginys teisingas su kiekvienu $t \neq 0$ (su $t = 0$ – ne).
7. $P(-2) = 7$.
8. $P(-3) = 2$.
9. 20; duomenų pakanka.
10. 4.
11. $P(1) = 2$.
12. 26.
13. 29.
14. $P(x) = 2x^2 + x + 1$.
15. Neegzistuoja.
16. Įrodymas – žr. sprendimus.
17. Įrodymas – žr. sprendimus.
18. Ne.
19. Įrodymas – žr. sprendimus.
20. Ne.
21. Įrodymas – žr. sprendimus.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

2. Kokia reikšmė lygi koeficientų sumai?
4. Su kuriuo x daugianaris lygus $a - b + c$?
7. Kam lygus skirtumas $P(2) - P(-2)$? O b?
8. Kam lygus $P(3) - P(-3)$?
10. $P(1) + P(-1) = 2(a + c)$. O kam lygus $P(2) + P(-2)$?
12. Su kuriuo x daugianaris lygus $4a + 2b + c$?
15. Palyginkite skirtumus $P(2) - P(1)$ ir $P(3) - P(2)$.
16. $x^2 + x = x(x + 1)$. Ką žinote apie dviejų gretimų sveikųjų skaičių sandaugą?
19. Atskirai nagrinėkite lyginį ir nelyginį n. Kokio lyginumo n^2?
20. Apskaičiuokite $P(2) - P(0)$ per koeficientus.
21. Apskaičiuokite skirtumą ir iškelkite bendrą daugiklį.

Sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

4 uždavinys.

Kaip galvoti. Ar tikrai reikia atskliausti? Pažiūrėkite, ką sako $a-b+c$: tai koeficientai su ženklais $+,-,+$, o taip atsitinka, kai į ax^2+bx+c įrašome $x=-1$ (nes $(-1)^2=1$, o prie b atsiranda minusas). Taigi (Įrankis 2) čia pasako, kad $a-b+c$ – tai tiesiog $P(-1)$, o jį apskaičiuoti galima tiesiai iš duotos išraiškos.

Sprendimas. Pagal (Įrankis 2): $a-b+c=P(-1)$. Įrašome $x=-1$ į $P(x)=(2x+1)^2-(x-2)^2$:

$$P(-1)=\big(2\cdot(-1)+1\big)^2-\big(-1-2\big)^2=(-1)^2-(-3)^2=1-9=-8.$$

Atsakymas: -8.

Komentaras. Pasitikrinkime: atskliaudę gauname $P(x)=3x^2+8x-3$, taigi $a-b+c=3-8-3=-8$. Sutampa. Bet tai buvo reikalinga tik patikrai – pats sprendimas atskliaudimo nereikalauja.

5 uždavinys.

Kaip galvoti. Duotos dvi reikšmės, o ieškoma b ir $a+c$ – ne a ir c atskirai. Pažiūrėkite į (Įrankis 2): $P(1)=a+b+c$ ir $P(-1)=a-b+c$ skiriasi tik ženklu prie b. Todėl šias lygybes sudėję išnyks b (liks $a+c$), o atėmę – išnyks $a+c$ (liks b). Tai ir yra būtent tai, ko klausiama. Klausimas „ar galima rasti a?“ tada reiškia: ar vien iš $a+c$ galima atskirti a?

Sprendimas. Pagal (Įrankis 2):

$$a+b+c=7,\qquad a-b+c=3.$$

Atėmę antrąją iš pirmosios: $2b=4$, $b=2$. Sudėję: $2(a+c)=10$, $a+c=5$.

Ar galima rasti a? Žinome tik tai, kad $a+c=5$, o tokių porų yra be galo daug: $a=1$, $c=4$ arba $a=2$, $c=3$ ir t. t. Abi poros tinka:

$$P(x)=x^2+2x+4:\ P(1)=7,P(-1)=3;\qquad P(x)=2x^2+2x+3:\ P(1)=7,P(-1)=3.$$

Taigi vien iš šių dviejų reikšmių a nustatyti negalima; reikia dar vienos reikšmės (trys nežinomieji – trys lygtys). Atsakymas: $b=2$, $a+c=5$; a rasti negalima.

6 uždavinys.

Kaip galvoti. Čia reikia įrodyti, o ne apskaičiuoti, todėl nesistenkime įrašinėti skaičių – užrašykime abi reikšmes per koeficientus ir pažiūrėkime, ką duoda jų skirtumas. Pagal (Įrankis 2) tokia mintis jau padėjo su $x=1$ ir $x=-1$; ar ji tinka su t ir $-t$? Tada ir klausimas „ar tinka bet kuriam t?“ išsispręs pats.

Sprendimas. Užrašome abi reikšmes:

$$P(t)=at^2+bt+c,\qquad P(-t)=at^2-bt+c.$$

Atėmę: $P(t)-P(-t)=2bt$ (nariai at^2 ir c susiprastina).

Jei $P(t)=P(-t)$, tai $2bt=0$. Kai $t\neq 0$, abi puses galime padalyti iš $2t$ ir gauname $b=0$. Su $t=2$ tai ir yra uždavinio teiginys.

Ar tinka bet kuriam $t \neq 0$? Taip: samprotavime apie t nieko daugiau nenaudojome, tik tai, kad $t \neq 0$. O su $t = 0$ teiginys neteisingas: lygybė $P(0) = P(-0)$ yra tiesiog $P(0) = P(0)$, ji teisinga visada ir apie b nieko nesako. Atsakymas: teiginys teisingas su kiekvienu $t \neq 0$.

Komentaras. Esmė: $P(t) - P(-t) = 2bt$ – tai (Įrankis 2) apibendrinimas. Dalydami iš t, visada patikrinkite, ar jis nelygus nuliui.

7 uždavinys.

Kaip galvoti. Sistema (trys lygtys) veiktų, bet gautume nemalonias trupmenas. Pažiūrėkime, ko iš tiesų reikia: $P(-2)$. Jis labai panašus į duotąjį $P(2)$ – skiriasi tik ženklu prie b. Todėl pabandykime rasti skirtumą $P(2) - P(-2)$: jame liks tik b, o b mokame rasti iš $P(1)$ ir $P(-1)$ (Įrankis 2).

Sprendimas. Pagal (Įrankis 2): $b = \dfrac{P(1) - P(-1)}{2} = \dfrac{6-2}{2} = 2$.

Kita vertus,

$$P(2) - P(-2) = (4a + 2b + c) - (4a - 2b + c) = 4b = 8.$$

Todėl $P(-2) = P(2) - 8 = 15 - 8 = 7$. Atsakymas: $P(-2) = 7$.

Komentaras. Sistemos keliu eitume taip: $a + c = 4$ ir $4a + c = 11$, todėl $3a = 7$, $a = \frac{7}{3}$, $c = \frac{5}{3}$ – nepatogios trupmenos. Gudresnis kelias nė nereikalauja žinoti a ir c.

Metodai: ieškoti, ko iš tiesų reikia, o ne visko iš eilės.

8 uždavinys.

Kaip galvoti. Tas pats kaip ankstesniame uždavinyje: $P(-3)$ labai panašus į duotąjį $P(3)$, o skirtumas $P(3) - P(-3)$ priklauso tik nuo b. Šiam b rasti pakanka $P(1)$ ir $P(-1)$ (Įrankis 2). Sistemos nereikia.

Sprendimas. Pagal (Įrankis 2): $b = \dfrac{P(1) - P(-1)}{2} = \dfrac{4 - (-2)}{2} = 3$.

Toliau

$$P(3) - P(-3) = (9a + 3b + c) - (9a - 3b + c) = 6b = 18,$$

todėl $P(-3) = P(3) - 18 = 20 - 18 = 2$. Atsakymas: $P(-3) = 2$.

Komentaras. Iš sistemos gautume $a = \frac{5}{4}$, $c = -\frac{1}{4}$ – vėl nepatogios trupmenos, o atsakymas toks pat.

9 uždavinys.

Kaip galvoti. Ieškome $P(5) - P(-5)$. Prisiminkime, kad $P(t) - P(-t)$ susiprastina iki $2bt$: lieka tik b. Taigi duomenų pakanka, jei b galime rasti. O b randame iš $P(1)$ ir $P(-1)$ (Įrankis 2) – būtent tiek reikšmių ir duota.

Sprendimas. Skirtumas:

$$P(5) - P(-5) = (25a + 5b + c) - (25a - 5b + c) = 10b.$$

Pagal (Įrankis 2): $b = \dfrac{P(1) - P(-1)}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2$. Todėl $P(5) - P(-5) = 10 \cdot 2 = 20$.

Ar duomenų pakanka? Taip. Nors a ir c atskirai nežinome (žinome tik $a + c = 3$), jų šiame skirtumui nereikia. Atsakymas: 20; duomenų pakanka.

10 uždavinys.

Kaip galvoti. Prašoma $P(1)+P(-1)$. Sudėję šias reikšmes, išnyksta b ir lieka $2(a+c)$. Taigi reikia rasti $a+c$. Žinome $c=P(0)$ (Įrankis 1), o kad rastume a, panaudokime kitą porą – $P(2)$ ir $P(-2)$: jų suma taip pat neturi b.

Sprendimas. Pagal (Įrankis 1): $c=P(0)=1$.

Sudėkime $P(2)$ ir $P(-2)$:

$$P(2)+P(-2)=(4a+2b+c)+(4a-2b+c)=8a+2c=2(4a+c).$$

Iš sąlygos $P(2)+P(-2)=7+3=10$, todėl $4a+c=5$. Kadangi $c=1$, tai $4a=4$, $a=1$.

Dabar

$$P(1)+P(-1)=(a+b+c)+(a-b+c)=2(a+c)=2(1+1)=4.$$

Atsakymas: 4.

Komentaras. Pasitikrinkime: dar rastume b iš $P(2)-P(-2)=4b=4$, $b=1$, taigi $P(x)=x^2+x+1$. Tikrai $P(2)=7$, $P(-2)=3$, $P(1)+P(-1)=3+1=4$.

11 uždavinys.

Kaip galvoti. Duotos reikšmės $P(3)$ ir $P(-3)$ – priešingų skaičių pora. Verta imti jų skirtumą: jis išmeta a ir c ir palieka tik b. Kai b žinomas, c gauname iš $P(0)$ (Įrankis 1), o a – iš $P(3)$.

Sprendimas. Skirtumas:

$$P(3)-P(-3)=(9a+3b+c)-(9a-3b+c)=6b.$$

Kadangi $P(3)=P(-3)$, tai $6b=0$, $b=0$. Pagal (Įrankis 1): $c=P(0)=1$. Dabar $P(3)=9a+3b+c=9a+1=10$, todėl $9a=9$, $a=1$. Taigi $P(x)=x^2+1$.

Ieškomoji reikšmė: $P(1)=a+b+c=1+0+1=2$. Atsakymas: $P(1)=2$.

12 uždavinys.

Kaip galvoti. Atskliausti galima, bet užduotyje prašoma to nedaryti. Pažiūrėkite, kokį x įstačius į ax^2+bx+c gaunama $4a+2b+c$: reikia $x^2=4$ ir $x=2$, todėl $x=2$. Taigi ieškoma reikšmė – tiesiog $P(2)$.

Sprendimas. Kai $x=2$, $P(2)=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=4a+2b+c$. Taigi

$$4a+2b+c=P(2)=(2-1)^2+(2+3)^2=1+25=26.$$

Atsakymas: 26.

Komentaras. Patikra: $P(x)=2x^2+4x+10$, todėl $4a+2b+c=8+8+10=26$. Tai tas pats triukas kaip (Įrankis 1) ir (Įrankis 2), tik su kitu x: tinkamą x parenkame pagal koeficientų ženklus ir laipsnius.

13 uždavinys.

Kaip galvoti. Ieškoma suma $4a-2b+c$. Pastebėkime: jei $x=-2$, tai $x^2=4$, o $bx=-2b$. Taigi $4a-2b+c$ – tai reikšmė, kai $x=-2$. Kaip ir (Įrankis 2) su $x=-1$.

Sprendimas. Kai $x=-2$: $P(-2)=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=4a-2b+c$. Todėl

$$4a-2b+c=P(-2)=\big(3\cdot(-2)+2\big)\big(-2-4\big)+5=(-4)(-6)+5=24+5=29.$$

Atsakymas: 29.

Komentaras. Patikra: $(3x+2)(x-4)+5 = 3x^2-10x-3$, o $3\cdot 4+20-3 = 29$. Atkreipkite dėmesį: įrašydami neigiamą skaičių, rašykite jį skliaustuose.

14 uždavinys.

Kaip galvoti. Pirmasis būdas paprastas: žinomos trys reikšmės, o nežinomi trys koeficientai – sudarome sistemą. Bet kiekviena iš trijų reikšmių $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ yra gretima kitai, todėl verta prisiminti (Įrankis 4): gretimų reikšmių skirtumai susiję su a. O c iš karto žinome iš $P(0)$ (Įrankis 1).

1-asis būdas. Pagal (Įrankis 1): $c = P(0) = 1$. Toliau

$$P(1) = a+b+1 = 4, \quad P(2) = 4a+2b+1 = 11 \implies \begin{cases} a+b = 3, \\ 4a+2b = 10. \end{cases}$$

Antrąją lygtį padaliję iš 2: $2a+b = 5$. Atėmę pirmąją: $a = 2$, tada $b = 1$.

2-asis būdas. Pagal (Įrankis 4): $P(2)-2P(1)+P(0) = 2a$, todėl $2a = 11-8+1 = 4$, $a = 2$. Pagal (Įrankis 1): $c = 1$. Iš $P(1) = a+b+c$: $b = 4-2-1 = 1$.

Abiem būdais $P(x) = 2x^2+x+1$.

Komentaras. Antrasis būdas trumpesnis, nes nereikia nieko pašalinti. Bet jis tinka tik tada, kai duotos reikšmės yra trys gretimos ($x = 0,1,2$). Sistemos būdas veikia visada.

15 uždavinys.

Kaip galvoti. Tai klausimas „ar galima?“ – bandykime rasti, kodėl neįmanoma. Lygybė $P(1) = P(2) = P(3)$ reiškia, kad gretimų reikšmių skirtumai lygūs nuliui. O gretimų reikšmių skirtumus mokame užrašyti per koeficientus ((Įrankis 4)). Jei pasirodys prieštara, daugianaris neegzistuoja.

Sprendimas. Tarkime, toks daugianaris yra. Apskaičiuokime skirtumus:

$$P(2)-P(1) = (4a+2b+c)-(a+b+c) = 3a+b, \qquad P(3)-P(2) = (9a+3b+c)-(4a+2b+c) = 5a+b.$$

Kadangi $P(1) = P(2) = P(3)$, abu skirtumai lygūs 0: $3a+b = 0$ ir $5a+b = 0$. Atėmę gauname $2a = 0$, taigi $a = 0$. Bet kvadratinio daugianario vyriausiasis koeficientas nelygus nuliui – prieštara. Vadinasi, toks daugianaris neegzistuoja. Atsakymas: neegzistuoja.

Komentaras. Tas pats išeitų ir sistemos keliu (gautume $a = 0$). Prieštaros metodas: tarus, kad egzistuoja, gauname kažką, kas negali būti.

Metodai: prieštaros metodas.

16 uždavinys.

Kaip galvoti. Įrodyti reikia, kad x^2+x+1 visada nelyginis. Pastebėkime, kad x^2+x galima užrašyti kaip $x(x+1)$ – dviejų gretimų sveikųjų skaičių sandauga. Iš dviejų gretimų skaičių vienas visada lyginis; kai sandaugoje yra lyginis daugiklis, ji lyginė. Likęs „+1“ ją paverčia nelygine.

Sprendimas. Užrašykime $x^2+x+1 = x(x+1)+1$. Skaičiai x ir $x+1$ yra gretimi sveikieji, todėl vienas iš jų lyginis (jei x lyginis – pirmasis, jei nelyginis – $x+1$ lyginis). Sandauga, kurios vienas dauginamasis lyginis, yra lyginė. Taigi $x(x+1)$ lyginis, o $x(x+1)+1$ – nelyginis. Tai ir reikėjo įrodyti. ■

Komentaras. Galima ir atvejais: jei $x = 2k$, tai $x^2+x+1 = 4k^2+2k+1$ – nelyginis; jei $x = 2k+1$, tai $x^2+x+1 = 4k^2+6k+3$ – nelyginis.

Metodai: atvejų perrinkimas, lyginumas.

17 uždavinys.

Kaip galvoti. Reikia įrodyti, kad $P(1)$ ir $P(-1)$ to paties lyginumo. Du sveikieji skaičiai to paties lyginumo tada ir tik tada, kai jų skirtumas lyginis, todėl pakanka įrodyti, kad $P(1) - P(-1)$ lyginis. Skirtumą $P(1) - P(-1)$ mokame užrašyti per koeficientus (Įrankis 2).

Sprendimas. Pagal (Įrankis 2): $P(1) - P(-1) = (a + b + c) - (a - b + c) = 2b$. Kadangi b sveikasis, $2b$ – lyginis skaičius. Du sveikieji skaičiai, kurių skirtumas lyginis, yra to paties lyginumo (abu lyginiai arba abu nelyginiai). Vadinasi, $P(1)$ ir $P(-1)$ to paties lyginumo. ■

18 uždavinys.

Kaip galvoti. Ar toks daugianaris gali egzistuoti? Skaičiai 2 ir 3 skirtingo lyginumo, o ką tik įrodėme (ankstesniame uždavinyje), kad su sveikaisiais koeficientais $P(1)$ ir $P(-1)$ turi to paties lyginumo. Panašiai galime ir tiesiogiai: $2b = P(1) - P(-1)$.

Sprendimas. Tarkime, toks daugianaris yra. Pagal (Įrankis 2): $2b = P(1) - P(-1) = 2 - 3 = -1$, todėl $b = -\frac{1}{2}$. Bet b turi būti sveikasis – prieštara. Vadinasi, toks daugianaris neegzistuoja. Atsakymas: ne.

Komentaras. Kitas būdas: pagal ankstesnį uždavinį $P(1)$ ir $P(-1)$ turi būti to paties lyginumo, o 2 ir 3 – ne.

Metodai: prieštaros metodas, lyginumas.

19 uždavinys.

Kaip galvoti. Reikia įrodyti apie *visus* sveikuosius n, o žinome tik du faktus: $c = P(0)$ (Įrankis 1) ir $a + b + c = P(1)$ (Įrankis 2) yra nelyginiai. Kadangi svarbus tik lyginumas, natūralu nagrinėti du atvejus: n lyginis ir n nelyginis. Kiekvienu atveju stengiamės parodyti, kad $P(n)$ to paties lyginumo kaip $P(0)$ arba kaip $P(1)$. Tam pravers, kad n^2 ir n turi tą patį lyginumą.

Sprendimas. Iš sąlygos: $c = P(0)$ nelyginis ir $a + b + c = P(1)$ nelyginis.

1 atvejis: n lyginis. Tada n^2 ir n lyginiai, todėl $an^2 + bn$ lyginis. Taigi $P(n) = an^2 + bn + c$ turi tą patį lyginumą kaip c, t. y. nelyginis.

2 atvejis: n nelyginis. Tada n^2 ir n nelyginiai. Nelyginis skaičius (n ar n^2), padaugintas iš a arba b, išlaiko a arba b lyginumą, todėl $an^2 + bn$ turi tą patį lyginumą kaip $a + b$. Taigi $P(n) = an^2 + bn + c$ turi tą patį lyginumą kaip $a + b + c$, t. y. nelyginis.

Abiem atvejais $P(n)$ nelyginis. ■

Komentaras. Atkreipkite dėmesį, kad nereikėjo atskirai žinoti a, b – užteko jų lyginumo kartu su c.

Metodai: atvejų perrinkimas, lyginumas.

20 uždavinys.

Kaip galvoti. Užuomina sako: apskaičiuokime $P(2) - P(0)$ per koeficientus. Jis, kaip ir anksčiau, susiprastins ir paliks tik a ir b narius, o c išnyks. Jei išeitų, kad jis būtinai lyginis, o pagal sąlygą jis nelyginis, turėsime prieštarą.

Sprendimas. Tarkime, toks daugianaris yra. Tada

$$P(2) - P(0) = (4a + 2b + c) - c = 4a + 2b = 2(2a + b).$$

Skaičiai a, b sveikieji, todėl $2a + b$ sveikasis, o $2(2a + b)$ – lyginis. Bet pagal sąlygą $P(2) - P(0) = 4 - 1 = 3$ – nelyginis. Prieštara, todėl toks daugianaris neegzistuoja. Atsakymas: ne.

Metodai: prieštaros metodas, lyginumas.

21 uždavinys.

Kaip galvoti. Užuomina siūlo apskaičiuoti skirtumą ir iškelti bendrą daugiklį. Kai atimame, c išnyksta, o a ir b gauna koeficientus, kurie galbūt dalijasi iš 3. Tada galėsime iškelti 3 prieš skliaustus.

Sprendimas.

$$P(5) - P(2) = (25a + 5b + c) - (4a + 2b + c) = 21a + 3b = 3(7a + b).$$

Kadangi a ir b sveikieji, $7a + b$ sveikasis, todėl $3(7a + b)$ dalijasi iš 3. ■

Komentaras. Tai atskiras atvejis bendro fakto: su sveikaisiais koeficientais $P(m) - P(n)$ dalijasi iš $m - n$ (nes $am^2 - an^2 = a(m - n)(m + n)$ ir $bm - bn = b(m - n)$). Prie jo grįšime.