Geometrija

Mišinys 3

9 klasė

Uždaviniai be temos: kuriuo keliu eiti, sprendžiate patys. Naudotis galima tik įrankių dėže (1–6, 2b, 2c lapai).

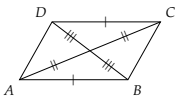
Įrankių dėžė

1–4 lapų faktai.

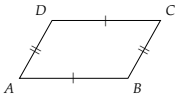
- **Kampai**: gretutinių suma 180°; kryžminiai lygūs; lygiagrečios ir kirstinė – atitinkamieji, vidaus priešiniai lygūs, vienašalių suma 180° (ir atvirkščiai). **Sumos**: trikampio 180°, priekampis – dviejų negretimų suma, stačiojo smailiųjų 90°, n-kampio $(n-2)\cdot 180°$.
- **Trikampių lygumas**: dvi kraštinės ir kampas tarp jų; kraštinė ir du kampai; trys kraštinės. **Statieji**: du statiniai; statinis ir smailusis kampas; įžambinė ir smailusis kampas; įžambinė ir statinis. **Lygiašonis**: kampai prie pagrindo lygūs (ir atv.); pusiaukampinė iš viršūnės = pusiaukraštinė = aukštinė.
- **Statusis trikampis**: pusiaukraštinė į įžambinę lygi jos pusei (ir atv.); statinis prieš 30° – pusė įžambinės (ir atv.). **Vidurio statmuo** – taškai, vienodai nutolę nuo atkarpos galų; **pusiaukampinė** – vienodai nuo kampo kraštinių; vidurio statmenys, pusiaukampinės, aukštinės kertasi viename taške. **Nelygybės**: prieš didesnę kraštinę – didesnis kampas; statmuo trumpesnis už pasvirąją; trikampio nelygybė.
- **Apskritimas**: statmuo iš centro dalija stygą pusiau; liestinė $\perp$ spinduliui (ir atv.); liestinių iš taško P atkarpos lygios, PO – kampo tarp jų pusiaukampinė (O – centras); įbrėžtinio apskritimo centras – pusiaukampinių susikirtimas; nuo viršūnės A iki lietimosi taško $p-a$ (p – pusperimetris, $a=BC$); jei į keturkampį įbrėžtas apskritimas, $AB+CD=BC+DA$.

2b–2c lapų įrankiai (lygiagretainis, vidurio linija, trapecija).

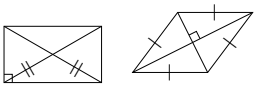
10. **Lygiagretainio savybės**: priešingos kraštinės ir kampai lygūs, gretimų kampų suma 180°; įstrižainės dalija viena kitą pusiau.



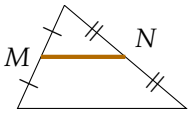
11. **Lygiagretainio požymiai** (iškilasis keturkampis): priešingos kraštinės poromis lygios; viena pora lygi ir lygiagreti; įstrižainės dalija viena kitą pusiau; priešingi kampai poromis lygūs.

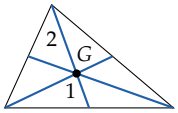


12–13. **Stačiakampis** – lygiagretainis su lygiomis įstrižainėmis (požymiai: statusis kampas arba lygios įstrižainės). **Rombas** – lygiagretainis, kurio įstrižainės statmenos ir dalija kampus pusiau (požymiai: gretimos kraštinės lygios arba įstrižainės statmenos).

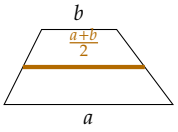


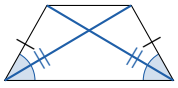
14–15. **Vidurio linija** $MN \parallel BC$, $MN=\frac{1}{2}BC$; ir atvirkščiai: tiesė per kraštinės vidurį, lygiagreti kitai kraštinei, eina per trečiosios vidurį. **Pusiaukraštinės** kertasi taške G, kuris dalija kiekvieną santykiu 2 : 1 nuo viršūnės.



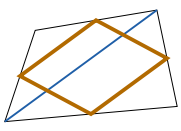


16–17. **Trapecijos vidurio linija** lygiagreti pagrindams ir lygi $\frac{a+b}{2}$; atkarpa tarp įstrižainių vidurių lygi $\frac{a-b}{2}$. **Lygiašonė trapecija**: kampai prie pagrindo lygūs, įstrižainės lygios (ir atvirkščiai).



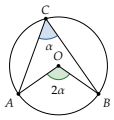


Lygių atkarpų teorema: lygiagrečios tiesės, atkertančios lygias atkarpas vienoje kirstinėje, atkerta lygias ir kitoje. **Varinjonas**: kraštinių viduriai – lygiagretainis (kraštinės lygiagrečios įstrižainėms, lygios jų pusėms).

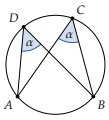


5–6 lapų įrankiai (kampai apskritime, įbrėžtinis keturkampis).

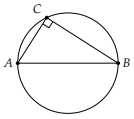
33. **Įbrėžtinis kampas** lygus pusei lanko, į kurį remiasi: $\angle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ (kai lankas mažesnis už pusapskritimį – pusė centrinio $\angle AOB$).



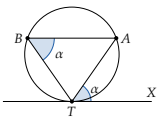
34. **Kampai į tą patį lanką** (ar lygius lankus) lygūs. Lygios stygos atitinka lygius mažesniuosius lankus. *Kampai į tą pačią stygą iš skirtingų pusių – jų suma* 180°.



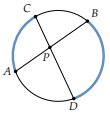
35. **Kampas į skersmenį**: AB – skersmuo $\Leftrightarrow \angle ACB = 90°$.



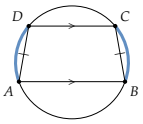
36. **Kampas tarp liestinės ir stygos** lygus įbrėžtiniam kampui į lanką tarp jų: $\angle XTA = \angle TBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{TA}$.



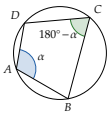
Kampas tarp stygų (kertasi viduje) – pusė lankų sumos; **tarp kirstinių** (kertasi išorėje) – pusė lankų skirtumo.



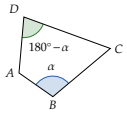
Lygiagrečios stygos atkerta lygius lankus: įbrėžtinė trapecija – lygiašonė. **Taisyklingasis n-kampis**: viršūnės dalija apibrėžtinį apskritimą į lankus po $\frac{360°}{n}$.



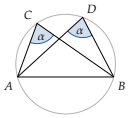
37. **Įbrėžtinio keturkampio** priešingų kampų suma 180° (priekampis lygus priešingam vidaus kampui).



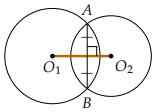
38. **Požymis: suma.** Iškilojo keturkampio priešingų kampų suma 180° ⇒ jis įbrėžtinis.



39. **Požymis: lygūs kampai.** C, D – toje pačioje AB pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB$ ⇒ A, B, C, D – viename apskritime. *Kampai iš skirtingų pusių – jų suma* 180°.



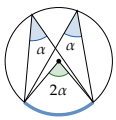
Du apskritimai: liečiasi taške $T \Rightarrow T$ tiesėje O_1O_2; kertasi taškuose A, $B \Rightarrow$ O_1O_2 – atkarpos AB vidurio statmuo.



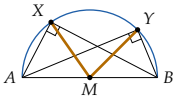
Technikos (T1–T16 – veiksmai; T17–T21 – signalas → veiksmas).

- **T1–T5**: kampų gaudymas (α, β); papildoma lygiagreti tiesė; lygūs trikampiai; pusiaukraštinę pratęskite tiek pat; atidėkite lygią atkarpą.
- **T6–T9**: užbaikite iki lygiagretainio; centras O (atkarpa per jį dalijama pusiau); du viduriai → vidurio linija; trapecijoje šoninę ar įstrižainę perkelkite lygiagrečiai.
- **T10–T12**: atspindys per pusiaukampinę; statusis kampas ir įžambinės vidurys → sujunkite su viršūne; taškas pusiaukampinėje → statmenys, vidurio statmenyje → jungti su galais.
- **T13–T16**: ištiesinkite laužtę; liestinė → spindulys į lietimosi tašką; styga → statmuo iš centro; liestinių atkarpas žymėkite x, y, z.

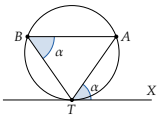
T17. Taškai apskritime → kampai į tą patį lanką lygūs, lankas 2α.



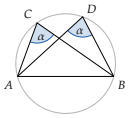
T18. Du statieji kampai į tą pačią atkarpą → **apskritimas su skersmeniu**.



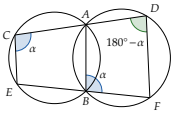
T19. Liestinė + styga iš lietimosi taško → įbrėžtinis kampas į tą patį lanką.



T20. Du lygūs kampai į atkarpą (toje pačioje pusėje) ar suma 180° → **nematomas apskritimas**; perkelkite kampus.

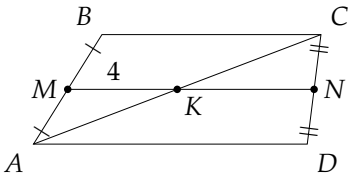


T21. Keli įbrėžtiniai keturkampiai su bendrais taškais → kampą perkelkite iš vieno į kitą.

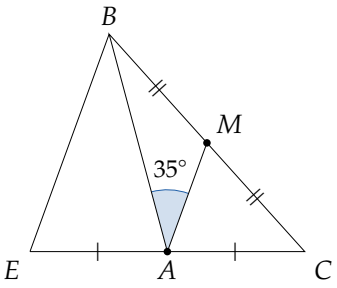


I. Apšilimas

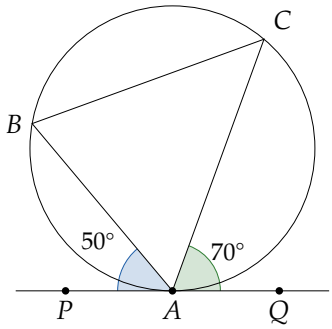
1. Trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$) šoninių kraštinių AB ir CD viduriai – M ir N. Įstrižainė AC kerta atkarpą MN taške K; $MN = 9$, $MK = 4$. Raskite pagrindus BC ir AD.



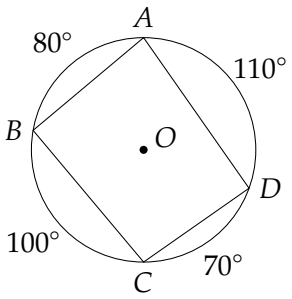
2. AM – trikampio ABC pusiaukraštinė. Kraštinės CA tęsinyje už taško A pažymėtas taškas E, $AE = AC$. Įrodykite, kad $BE = 2AM$, ir raskite $\angle ABE$, jei $\angle BAM = 35°$.



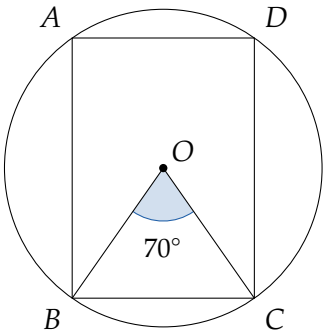
3. Trikampis ABC įbrėžtas į apskritimą. Apskritimo liestinėje, nubrėžtoje per tašką A, pažymėti taškai P ir Q (A – tarp jų, žr. brėžinį); $\angle PAB = 50°$, $\angle QAC = 70°$. Raskite trikampio ABC kampus.



4. Taškai A, B, C, D (šia tvarka) dalija apskritimą į lankus $AB = 80°$, $BC = 100°$, $CD = 70°$, $DA = 110°$. Raskite keturkampio $ABCD$ kampus. Kuri jo įstrižainė – apskritimo skersmuo?

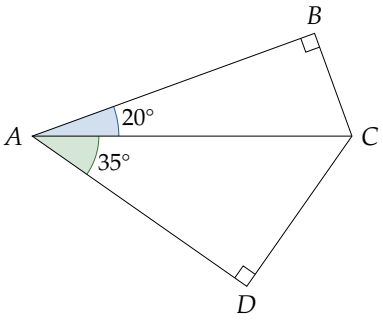


5. Stačiakampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą su centru O, $\angle BOC = 70°$. Raskite $\angle ACD$.

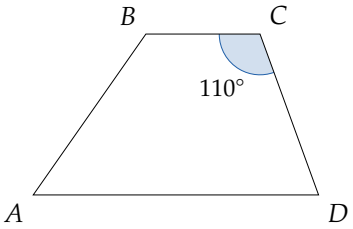


II. Tilteliai

6. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 35°$. Raskite $\angle CBD$ ir $\angle ADB$.



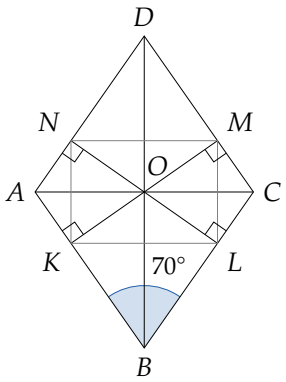
7. Trapecijoje $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AD = BC + CD$, $\angle BCD = 110°$. Raskite $\angle BAD$ ir $\angle ABC$.



8. Rombo $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O; OK, OL, OM, ON – statmenys į kraštines AB, BC, CD, DA.

a) Įrodykite, kad $KLMN$ – stačiakampis.

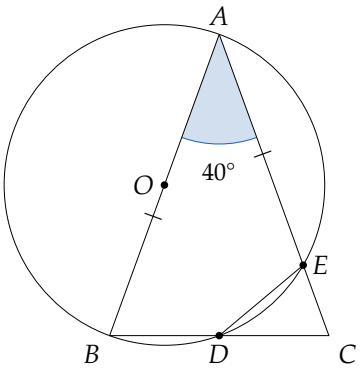
b) $\angle ABC = 70°$. Raskite $\angle OKL$.



9. Lygiašonio trikampio ABC ($AB = AC$) kampas A lygus 40°. Apskritimas, kurio skersmuo AB, antrą kartą kerta kraštines BC ir AC taškuose D ir E.

a) Įrodykite, kad D – kraštinės BC vidurys.

b) Raskite $\angle DEC$.

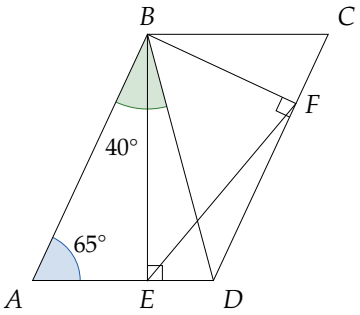


III. Pagrindas

10. Lygiagretainio $ABCD$ smailusis kampas BAD lygus $65°$. Iš bukojo kampo viršūnės B į kraštines AD ir CD nuleisti statmenys BE ir BF.

a) Įrodykite, kad B, E, D, F – viename apskritime.

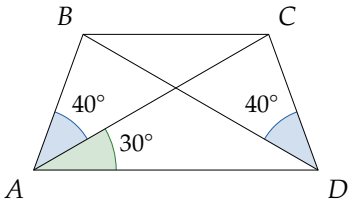
b) $\angle ABD = 40°$. Raskite $\angle BFE$ ir $\angle BEF$.



11. Trapecijoje $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) $\angle BAC = \angle BDC = 40°$, $\angle CAD = 30°$.

a) Įrodykite, kad trapecija lygiašonė.

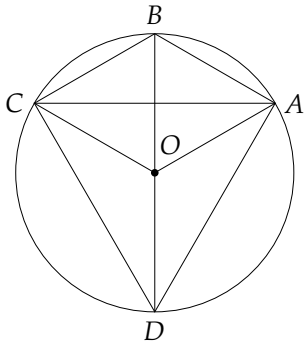
b) Raskite trapecijos kampus.



12. Taškai A, B, C yra apskritimo su centru O taškai, o $OABC$ – lygiagretainis. Tiesė BO antrą kartą kerta apskritimą taške D.

a) Raskite $\angle ABC$.

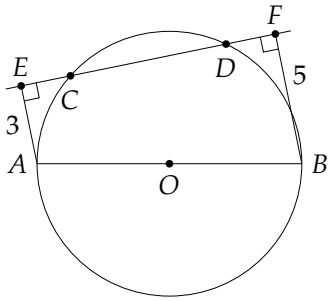
b) Įrodykite, kad trikampis ACD lygiakraštis.



13. AB – apskritimo su centru O skersmuo. Styga CD nekerta skersmens AB; AE ir BF – statmenys iš A ir B į tiesę CD.

a) Įrodykite, kad $CE = DF$.

b) $AE = 3$, $BF = 5$. Raskite atstumą nuo O iki tiesės CD.

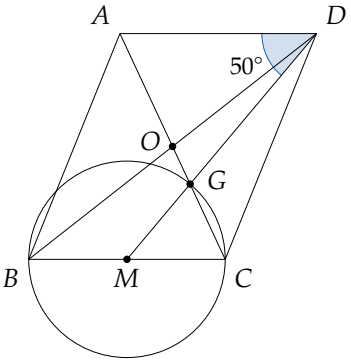


14. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O, M – kraštinės BC vidurys, G – atkarpų AC ir DM susikirtimo taškas. Apskritimas, kurio skersmuo BC, eina per G.

a) Įrodykite, kad $AD = DG$.

b) $\angle ADM = 50°$. Raskite $\angle DAC$ ir $\angle GBC$.

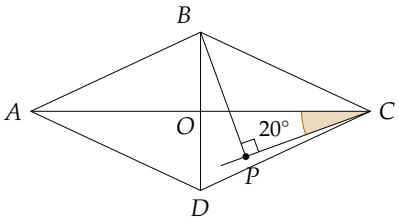
c) $BC = 8$. Raskite DM.



15. Rombo $ABCD$ smailusis kampas A lygus $50°$, O – įstrižainių susikirtimo taškas. Per viršūnę C nubrėžta tiesė, sudaranti su įstrižaine CA $20°$ kampą; P – statmens iš B į šią tiesę pagrindas.

a) Įrodykite, kad B, O, C, P – viename apskritime.

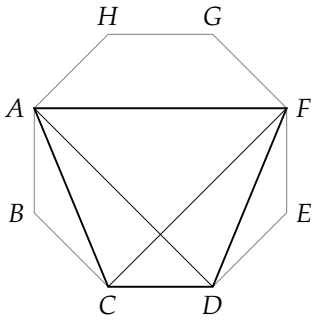
b) Raskite $\angle BPO$ ir $\angle ABP$ (du atvejai).



16. $ABCDEFGH$ – taisyklingasis aštuonkampis.

a) Įrodykite, kad $ACDF$ – lygiašonė trapecija ($CD \parallel AF$), o jos įstrižainės AD ir CF statmenos.

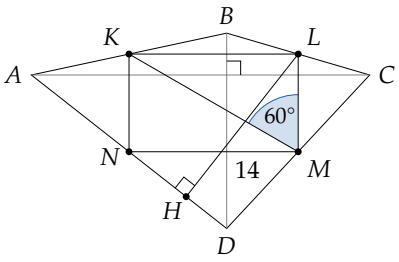
b) Įrodykite, kad trapecijos $ACDF$ aukštinė lygi jos vidurio linijai.



17. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD statmenos. K, L, M, N – kraštinių AB, BC, CD, DA viduriai, LH – statmuo į kraštinę AD.

a) Įrodykite, kad $KLMN$ – stačiakampis ir kad K, L, M, N, H – viename apskritime.

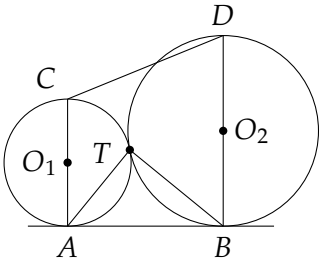
b) $BD = 14$, $\angle KML = 60°$. Raskite to apskritimo spindulį ir $\angle LHM$.



18. Apskritimai su centrais O_1 ir O_2 (nevienodų spindulių) liečiasi iš išorės taške T. Jų bendroji išorinė liestinė liečia pirmąjį apskritimą taške A, antrąjį – taške B; AC ir BD – šių apskritimų skersmenys.

a) Įrodykite, kad $\angle ATB = 90°$.

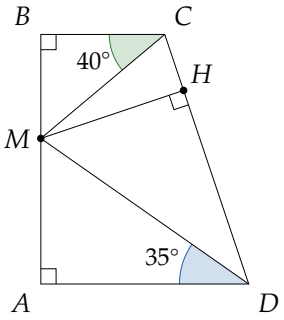
b) Įrodykite, kad $ACDB$ – trapecija, o jos įstrižainės AD ir BC eina per T.



19. Stačiakampėje trapecijoje $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $\angle A = \angle B = 90°$) kraštinėje AB pažymėtas taškas M, $\angle ADM = 35°$, $\angle BCM = 40°$. MH – statmuo į kraštinę CD.

a) Raskite $\angle CMD$.

b) Įrodykite, kad $\angle AHB = \angle CMD$.



IV. Rask klaidą

20. Mokinys sprendė uždavinį: „Lygiašonės trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB = CD$) kraštinių AB, BC, CD, DA viduriai – K, L, M, N. Įrodykite, kad $KLMN$ – stačiakampis.“ Jo sprendimas:

1) KL – trikampio ABC vidurio linija, MN – trikampio ACD vidurio linija: $KL \parallel MN$, $KL = MN = \frac{1}{2}AC$, todėl $KLMN$ – lygiagretainis.
2) Lygiašonės trapecijos įstrižainės lygios: $AC = BD$.
3) Lygiagretainio $KLMN$ įstrižainės lygios ($AC = BD$), todėl $KLMN$ – stačiakampis. ■

Raskite klaidą. Ar teiginys teisingas?

21. Mokinys sprendė uždavinį: „Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą su centru O; jo įstrižainės AC ir BD statmenos ir kertasi taške P. Įrodykite, kad $ABCD$ – deltoidas, t. y. $AB = AD$ ir $CB = CD$.“ Jo sprendimas:

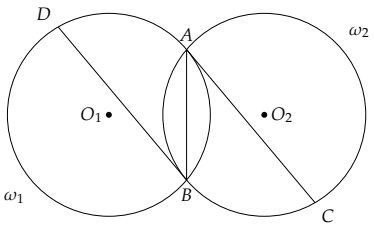
1) $AC \perp BD$ (duota).
2) Statmuo į stygą dalija ją pusiau, todėl P – stygos BD vidurys.
3) Taigi AC – atkarpos BD vidurio statmuo, todėl $AB = AD$ ir $CB = CD$. ■

Raskite klaidą. Ar teiginys teisingas?

V. Iššūkiai

22.

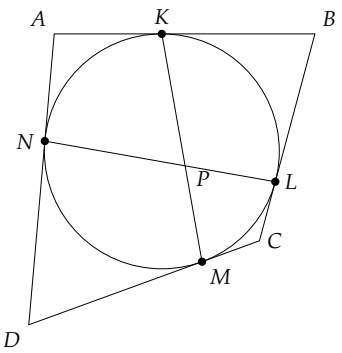
Du lygūs apskritimai ω_1 ir ω_2 su centrais O_1 ir O_2 kertasi taškuose A ir B. Apskritimo ω_1 liestinė taške A antrą kartą kerta ω_2 taške C, o apskritimo ω_2 liestinė taške B antrą kartą kerta ω_1 taške D.



a) Įrodykite, kad O_1AO_2B – rombas ir $AC \parallel BD$.
b) Įrodykite, kad $ACBD$ – lygiagretainis, kurio kraštinės BC ir AD lygios įstrižainei AB.
c) Raskite lygiagretainio $ACBD$ kampus, jei $\angle O_1AO_2 = 100°$. Kokio didumo turi būti $\angle O_1AO_2$, kad $ACBD$ būtų rombas?

23.

Į iškiląjį keturkampį $ABCD$ įbrėžtas apskritimas; jis liečia kraštines AB, BC, CD, DA taškuose K, L, M, N. Atkarpos KM ir LN kertasi taške P.

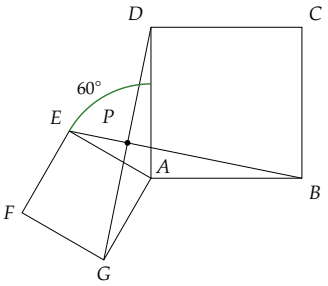


a) Įrodykite, kad $\angle KPL = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BCD)$.
b) Įrodykite: apie $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai $KM \perp LN$.
c) Tegu $KM \perp LN$, $\angle BAD = 70°$. Raskite $\angle KMN$ ir $\angle LNM$.

24.

Kvadratai $ABCD$ ir $AEFG$ turi bendrą viršūnę A; abiejų viršūnės išvardytos prieš laikrodžio rodyklę, $\angle DAE = 60°$ (žr. brėžinį). Atkarpos BE ir DG kertasi taške P.

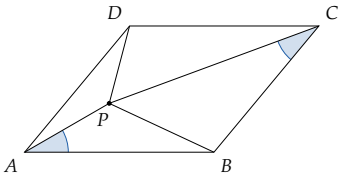
a) Įrodykite, kad $BE = DG$ ir kad P yra abiejų kvadratų apibrėžtiniuose apskritimuose.
b) Įrodykite, kad tiesė CF eina per P.



25.

Taškas P yra lygiagretainio $ABCD$ viduje, $\angle PAB = \angle PCB$.

a) Įrodykite, kad $\angle PBA = \angle PDA$.
b) Raskite $\angle PDA$, jei $\angle PAB = 30°$, $\angle APB = 125°$.



Keturkampiai ir apskritimai

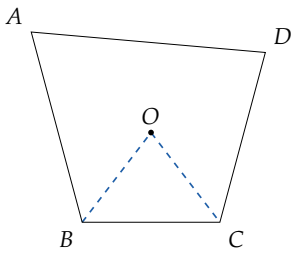
26. Ar keturkampiui visada yra **a)** apskritimas, einantis per visas jo viršūnes; **b)** apskritimas, liečiantis visas keturias jo kraštines? Įrašykite „taip“ (visada), „ne“ (niekada) arba „ne visada“ ir pagrįskite vienu sakiniu; kai „ne visada“ – nurodykite pavyzdį, kai apskritimas yra, ir kai jo nėra. Deltoidas – iškilasis keturkampis $ABCD$, kuriame $AB = AD$ ir $CB = CD$.

Keturkampis	**a) per visas viršūnes**	**b) liečia visas kraštines**
kvadratas		
stačiakampis		
rombas		
lygiagretainis		
lygiašonė trapecija		
deltoidas		

Papildomai

27.

Papildomai. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinės tenkina lygybę $AB + CD = BC + AD$. Įrodysime, kad į jį galima įbrėžti apskritimą. Raides pažymėkime taip, kad BC būtų trumpiausia kraštinė.



a) Kampų B ir C pusiaukampinės kertasi taške O. Įrodykite, kad apskritimas ω su centru O, liečiantis BC, liečia ir AB bei CD, o lietimosi taškai K, L, M yra pačiose kraštinėse AB, BC, CD (ne tęsiniuose).

b) Nubrėžkime tiesei AD lygiagrečią ω liestinę, kurios atžvilgiu ω ir BC yra vienoje pusėje. Ši liestinė kerta spindulius BA ir CD taškuose E ir F. Įrodykite, kad $EB + CF = BC + EF$.

c) Įrodykite, kad $E = A$ ir $F = D$, t. y. ω liečia ir AD. (Tarkime priešingai ir išnagrinėkite du atvejus: E ir F – atkarpose BA ir CD; E ir F – už A ir D.)

Uždavinių atsakymai

1. $BC = 8$, $AD = 10$.

2. $BE = 2AM$ – įrodymas; $\angle ABE = 35°$.

3. $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 50°$.

4. $\angle A = 85°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 95°$, $\angle D = 90°$; AC.

5. $35°$.

6. $\angle CBD = 35°$, $\angle ADB = 70°$.

7. $\angle BAD = 55°$, $\angle ABC = 125°$.

8. a) Įrodymas – lapo gale; b) $35°$.

9. a) Įrodymas – lapo gale; b) $70°$.

10. a) Įrodymas – lapo gale; b) $\angle BFE = 75°$, $\angle BEF = 40°$.

11. a) Įrodymas – lapo gale; b) $\angle A = \angle D = 70°$, $\angle B = \angle C = 110°$.

12. a) $120°$; b) įrodymas – lapo gale.

13. a) Įrodymas – lapo gale; b) 4.

14. a) Įrodymas – lapo gale; b) $\angle DAC = 65°$, $\angle GBC = 25°$; c) 12.

15. a) Įrodymas – lapo gale; b) P toje pačioje AC pusėje kaip B: $\angle BPO = 155°$, $\angle ABP = 45°$; kitoje pusėje: $\angle BPO = 25°$, $\angle ABP = 85°$.

16. Įrodymas – lapo gale.

17. a) Įrodymas – lapo gale; b) 7; $\angle LHM = 30°$.

18. Įrodymas – lapo gale.

19. a) $75°$; b) įrodymas – lapo gale.

20. Klaida 3) žingsnyje: AC ir BD – trapecijos, o ne $KLMN$ įstrižainės. Iš $AC = BD$ išplaukia $KL = LM$, t. y. $KLMN$ – rombas. Teiginys klaidingas: pvz., kai pagrindai 8 ir 4, aukštinė 3, rombo $KLMN$ įstrižainės $KM = 6$, $LN = 3$.

21. Klaida 2) žingsnyje: stygą pusiau dalija statmuo iš centro, o AC neturi eiti per O. Teiginys klaidingas: pvz., kai lankai $AB = 40°$, $BC = 60°$, $CD = 140°$, $DA = 120°$, įstrižainės statmenos, bet $AB \neq AD$.

22. a), b) Įrodymas – lapo gale; c) $40°$ ir $140°$; kai $\angle O_1AO_2 = 60°$.

23. a), b) Įrodymas – lapo gale; c) $\angle KMN = 55°$, $\angle LNM = 35°$.

24. Įrodymas – lapo gale.

25. a) Įrodymas – lapo gale; b) $25°$.

26.

	a) per viršūnes	b) liečia kraštines
kvadratas	taip	taip
stačiakampis	taip	ne visada
rombas	ne visada	taip
lygiagretainis	ne visada	ne visada
lygiašonė trapecija	taip	ne visada
deltoidas	ne visada	taip

- **Kvadratas** – ir stačiakampis, ir rombas.
- **Stačiakampis**: a) $\angle B + \angle D = 180°$ (įbrėžtinio keturkampio požymis); b) $AB + CD = BC + AD$, $AB = CD$, $BC = AD$, todėl $AB = BC$: yra tik kvadratui (stačiakampiui 2×1 nėra).
- **Rombas**: a) $\angle A = \angle C$ ir $\angle A + \angle C = 180°$, todėl $\angle A = 90°$: yra tik kvadratui (rombui su $60°$ kampu nėra); b) įstrižainių susikirtimo taškas yra visų kampų pusiaukampinėse, todėl vienodai nutolęs nuo visų kraštinių (taškas pusiaukampinėje).

- **Lygiagretainis**: a) kaip rombo – yra tik stačiakampiui (lygiagretainiui su 60° kampu nėra); b) $AB + CD = BC + AD$, $AB = CD$, $BC = AD$, todėl $AB = BC$: yra tik rombui (stačiakampiui 2×1 nėra).
- **Lygiašonė trapecija** ($AD \parallel BC$): a) $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (vienašaliai), todėl $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (požymis); b) yra: nubrėžkime apskritimą, dvi lygiagrečias jo liestines ir dvi kitas nelygiagrečias liestines simetriškai; nėra: pagrindai 10 ir 4, šoninės 5 ($10 + 4 \neq 5 + 5$).
- **Deltoidas**: a) $\triangle ABC = \triangle ADC$ (trys kraštinės), todėl $\angle B = \angle D$, ir apskritimas yra tik kai $\angle B = \angle D = 90^\circ$ (pvz. kvadratas; rombui su 60° kampu nėra); b) AC – kampų A ir C pusiaukampinė (tie patys lygūs trikampiai), kampo B pusiaukampinė kerta AC taške I, vienodai nutolusiame nuo visų keturių kraštinių (taškas pusiaukampinėje).

27. Įrodymas – lapo gale.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) $MN \parallel BC$ ir eina per kraštinės AB vidurį. 2) K – atkarpos AC vidurys; MK ir KN – trikampių ABC ir ACD vidurio linijos.

2. 1) Du viduriai: A – atkarpos CE, M – atkarpos CB. 2) AM – trikampio CEB vidurio linija.

3. 1) Kampai PAB ir QAC – tarp liestinės ir stygos. 2) Kiekvienas iš jų lygus įbrėžtiniam kampui, kuris remiasi į tą patį lanką.

4. 1) Kiekvienas keturkampio kampas – įbrėžtinis. 2) Kampas lygus pusei lanko, į kurį remiasi (lanko be kampo viršūnės); statusis įbrėžtinis kampas remiasi į skersmenį.

5. 1) $\angle BOC$ – centrinis kampas, besiremiantis į lanką BC. 2) Raskite įbrėžtinį kampą BAC; $AB \parallel CD$.

6. 1) Atkarpa AC iš taškų B ir D matoma stačiu kampu. 2) B ir D – apskritime su skersmeniu AC; ieškokite kampų, besiremiančių į tą patį lanką.

7. 1) Pagrindų skirtumas $AD - BC$ lygus šoninei kraštinei CD. 2) Per C nubrėžkite $CE \parallel AB$ ($E \in AD$): kokia atkarpa ED ir koks trikampis CED?

8. 1) a) O yra rombo kampų pusiaukampinėse; b) atkarpa OB iš taškų K ir L matoma stačiu kampu. 2) a) Palyginkite OK, OL, OM, ON; įrodykite, kad K, O, M – vienoje tiesėje; b) kampą OKL perkelkite į viršūnę B (apskritimas su skersmeniu OB).

9. 1) a) AB – skersmuo; b) A, B, D, E – viename apskritime. 2) a) Koks kampas ADB? Kuo AD yra lygiašoniam trikampiui? b) $\angle DEC$ – keturkampio $ABDE$ priekampis.

10. 1) Prie E ir F – statieji kampai, abu remiasi į atkarpą BD. 2) E, F – apskritime su skersmeniu BD; kampus BFE ir BEF perkelkite į tašką D (kampai į tą patį lanką).

11. 1) Atkarpa BC iš taškų A ir D matoma vienodu kampu. 2) A, B, C, D – viename apskritime; kokia būna į apskritimą įbrėžta trapecija?

12. 1) a) Kurios lygiagretainio $OABC$ kraštinės ir kuri įstrižainė – spinduliai? b) BD – skersmuo. 2) a) Trikampiai OAB ir OBC lygiakraščiai; b) palyginkite centrinius kampus AOC, COD, DOA.

13. 1) $AE \parallel BF$, O – atkarpos AB vidurys, CD – styga. 2) Nuleiskite statmenį OM į CD: M – ir stygos CD, ir atkarpos EF vidurys.

14. 1) O – atkarpos BD vidurys; $MG = MC$ – apskritimo spinduliai. 2) a) CO ir DM – trikampio BCD pusiaukraštinės: kokiu santykiu jas dalija G? b) $\angle GMC$ – centrinis kampas; c) $DM = 3GM$.

15. 1) Prie O ir prie P – statieji kampai, abu remiasi į BC. 2) O, P – apskritime su skersmeniu BC; tiesė gali eiti abiejose AC pusėse, todėl taškų B, O, C, P tvarka apskritime skiriasi; $\angle OBP = \angle OCP$.

16. 1) Taisyklingojo aštuonkampio viršūnės dalija apibrėžtinį apskritimą į lygius lankus. 2) a) Išreikškite per lankus kampus CDA, DAF ir kampą tarp stygų AD ir CF; b) P – įstrižainių susikirtimo taškas: kokie trikampiai PCD ir PAF?

17. 1) Keturkampio kraštinių viduriai; prie H – statusis kampas. 2) a) $KLMN$ kraštinės lygiagrečios įstrižainėms; atkarpa LN iš K, M, H matoma stačiu kampu; b) stačiajame trikampyje KLM raskite $\angle LKM$ ir KM.

18. 1) a) Per T eina abiejų apskritimų bendroji liestinė; b) AC ir BD – skersmenys. 2) a) Bendroji liestinė taške T kerta AB taške M: palyginkite MA, MT, MB; b) raskite kampus ATC ir BTD ir sudėkite su $\angle ATB$.

19. 1) Statieji kampai prie A, B ir H: atkarpos MD ir MC matomos stačiu kampu iš dviejų taškų. 2) Apskritimai su skersmenimis MD ir MC: $\angle AHM$ perkelkite į D, $\angle MHB$ – į C.

20. 1) Kurios atkarpos yra lygiagretainio $KLMN$ įstrižainės? 2) $KL = \frac{1}{2}AC$, $LM = \frac{1}{2}BD$ – kas išplaukia iš $AC = BD$? Patikrinkite trapeciją su pagrindais 8 ir 4, aukštine 3: kokio ilgio KM ir LN?

21. 1) Kuris statmuo į stygą tikrai dalija ją pusiau? 2) Ar AC būtinai eina per O? Paimkite lankus $AB = 40°$, $BC = 60°$, $CD = 140°$, $DA = 120°$: kokį kampą sudaro įstrižainės? Ar $AB = AD$?

22. 1) a) Keturios atkarpos iš centrų į A ir B – spinduliai; liestinės nubrėžtos spindulių galuose. b) Kampus prie A ir B sudaro liestinė ir styga AB. 2) a) $O_1A \parallel O_2B$, o $AC \perp O_1A$, $BD \perp O_2B$. b) Pažymėkite $\alpha = \angle CAB$ ir įrodykite, kad $\angle DBA = \angle ADB = \angle ACB = \alpha$; tada $BC \parallel AD$. c) Rombo įstrižainė AB dalija kampą O_1AO_2 pusiau.

23. 1) Iš kiekvienos viršūnės išeina dvi lygios liestinių atkarpos. Nagrinėkite trikampį KPL. 2) Kampus PKL ir PLK raskite iš lygiašonių trikampių AKN ir CLM (kampas tarp liestinės ir stygos).

24. 1) a) Kokie trikampių ABE ir ADG kampai prie A? b) Kokius kampus sudaro PC su PB ir PF su PG? 2) a) Iš lygių trikampių $\angle ABP = \angle ADP$ – taškai A, P, B, D viename apskritime; tada $\angle BPD = 90°$. b) Kampus BPC ir FPG perkelkite į kvadratų įstrižaines (kampai į tą patį lanką).

25. 1) Abu kampai remiasi į PB, bet jų viršūnės – skirtingose PB pusėse. 2) Paimkite tašką Q, kad $ABQP$ būtų lygiagretainis. Įrodykite, kad $\triangle ADP = \triangle BCQ$ ir kad P, B, Q, C – viename apskritime.

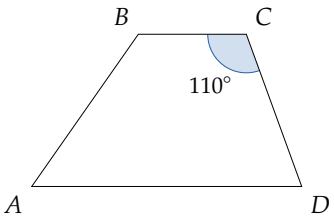
26. 1) a) Žiūrėkite į priešingų kampų sumą. b) Ieškokite taško, vienodai nutolusio nuo visų kraštinių. 2) „Ne visada“: jei apskritimas yra, ką tai sako apie keturkampį? (a: priešingų kampų suma 180°; b: priešingų kraštinių sumos lygios.)

27. 1) a) Taškas pusiaukampinėje vienodai nutolęs nuo kampo kraštinių. b) Kokį apskritimą turi keturkampis $EBCF$? c) Ar laužtė gali būti tokio pat ilgio kaip atkarpa, jungianti jos galus? 2) a) $BK = BL$, $CM = CL$, todėl $BK < BC \le AB$ – kur yra K? b) ω liečia visas keturias $EBCF$ kraštines – priešingų kraštinių sumos lygios. c) Įrašykite $AB = AE + EB$, $CD = CF + FD$ (antruoju atveju $EB = EA + AB$, $CF = CD + DF$) į $AB + CD = BC + AD$ ir į b) lygybę.

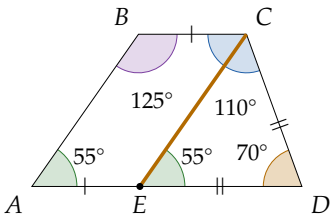
Sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

7 uždavinys.



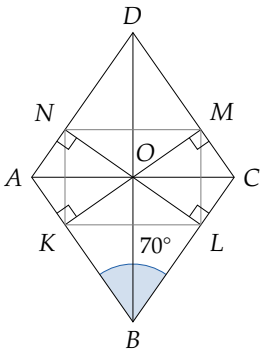
sąlyga



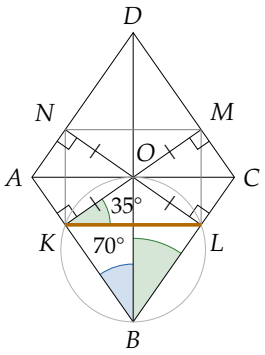
sprendimas

1. $CE \parallel AB$, $E \in AD$: $ABCE$ – lygiagretainis, $AE = BC$ (lygiagretainio savybė), todėl $ED = AD - BC = CD$.
2. $\angle D = 180° - 110° = 70°$ (vienašaliai kampai); $\angle CED = \frac{180°-70°}{2} = 55°$ (lygiašonio trikampio CED kampai prie pagrindo).
3. $\angle BAD = \angle CED = 55°$ (atitinkamieji kampai, $AB \parallel EC$), $\angle ABC = 180° - 55° = 125°$ (vienašaliai kampai).

8 uždavinys.



sąlyga

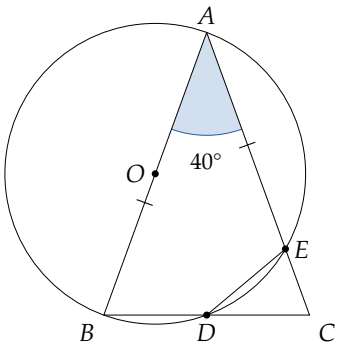


sprendimas

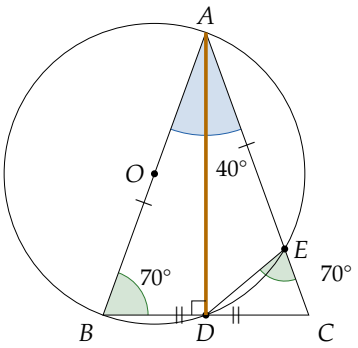
1. a) Rombo įstrižainės – kampų pusiaukampinės, todėl $OK = OL = OM = ON$ (taškas pusiaukampinėje).
2. $OK \perp AB$, $OM \perp CD$, $AB \parallel CD$, todėl K, O, M – vienoje tiesėje; taip pat L, O, N. Įstrižainės $KM = LN = 2OK$ ir dalija viena kitą pusiau, todėl $KLMN$ – stačiakampis (lygiagretainis su lygiomis įstrižainėmis).
3. b) $\angle OKB = \angle OLB = 90°$, todėl K, L – apskritime su skersmeniu OB (kampas į skersmenį). $\angle OKL = \angle OBL = \frac{1}{2} \cdot 70° = 35°$ (kampai į tą patį lanką OL; rombo įstrižainė – pusiaukampinė).

Antras kelias b) daliai: $OK = OL$, $\angle KOL = 360° - 90° - 90° - 70° = 110°$ (keturkampio $OKBL$ kampų suma), $\angle OKL = \frac{180°-110°}{2} = 35°$ (lygiašonis trikampis).

9 uždavinys.



sąlyga

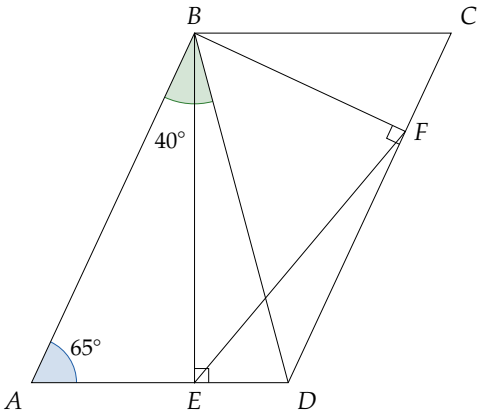


sprendimas

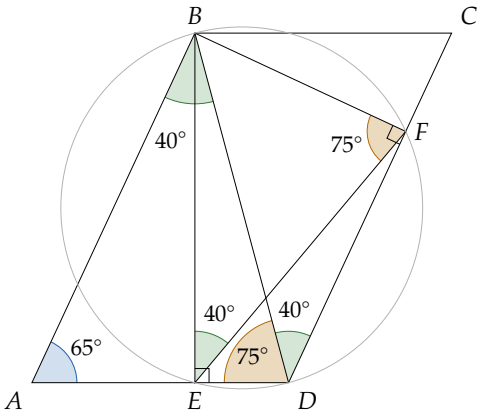
1. a) $\angle ADB = 90°$ (kampas į skersmenį), todėl AD – lygiašonio trikampio aukštinė iš viršūnės, kartu ir pusiaukraštinė: $BD = DC$.
2. b) $\angle B = \frac{180°-40°}{2} = 70°$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo); $\angle DEC = \angle ABD = 70°$ (įbrėžtinio keturkampio $ABDE$ priekampis).

Antras kelias b) daliai: $\angle BEC = 90°$ (kampas į skersmenį), ED – stačiojo trikampio BEC pusiaukraštinė, todėl $ED = DC$ (pusiaukraštinė į įžambinę) ir $\angle DEC = \angle C = 70°$ (lygiašonis trikampis).

10 uždavinys.



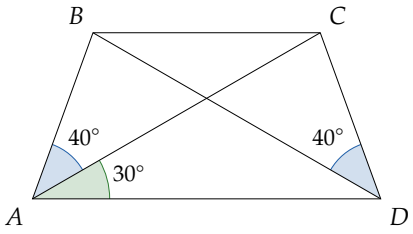
sąlyga



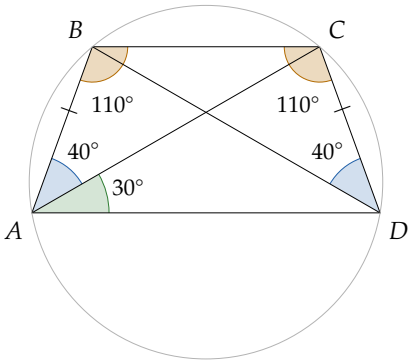
sprendimas

1. a) $\angle BED = \angle BFD = 90°$, todėl E ir F – apskritime su skersmeniu BD (kampas į skersmenį).
2. b) $\angle BDE = 180° - 65° - 40° = 75°$ (trikampio ABD kampų suma); $\angle BFE = \angle BDE = 75°$ (kampai į tą patį lanką BE).
3. $\angle BDF = \angle ABD = 40°$ (vidaus priešiniai kampai, $AB \parallel CD$); $\angle BEF = \angle BDF = 40°$ (kampai į tą patį lanką BF).

11 uždavinys.



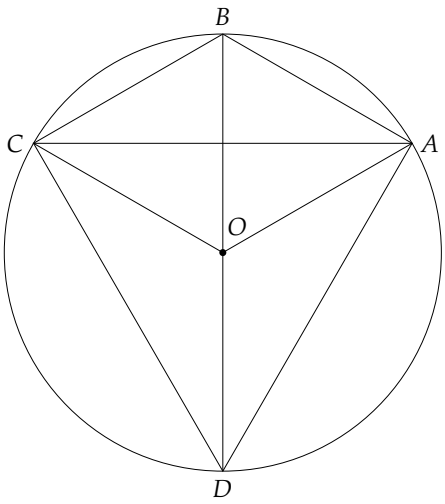
sąlyga



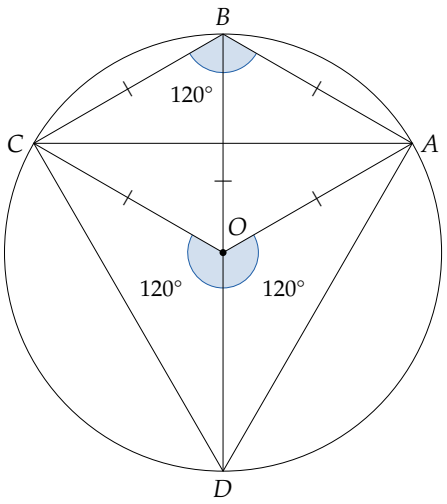
sprendimas

1. a) A ir D – toje pačioje tiesės BC pusėje, $\angle BAC = \angle BDC$, todėl A, B, C, D – viename apskritime (įbrėžtinio keturkampio požymis).
2. $AD \parallel BC$ – lygiagrečios stygos, todėl $AB = CD$ (lygiagrečios stygos): trapecija lygiašonė.
3. b) $\angle A = 40° + 30° = 70°$, $\angle D = \angle A = 70°$ (lygiašonė trapecija), $\angle B = \angle C = 180° - 70° = 110°$ (vienašaliai kampai).

12 uždavinys.



sąlyga

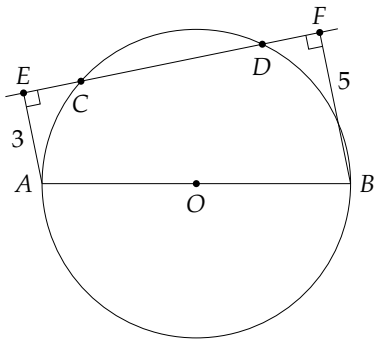


sprendimas

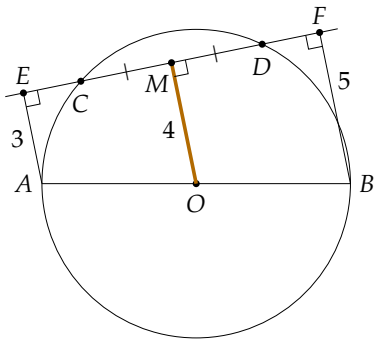
1. a) $OA = OC$ (spinduliai), todėl $OABC$ – rombas (rombo požymis); $AB = BC = OA = OB$ (OB – irgi spindulys), todėl trikampiai OAB ir OBC lygiakraščiai: $\angle ABC = 60° + 60° = 120°$.
2. b) $\angle AOC = 120°$, $\angle AOD = \angle COD = 180° - 60° = 120°$ (gretutiniai kampai), todėl $AC = CD = DA$ (lygūs centriniai kampai – lygios stygos).

Pamoka. Antras kelias a) daliai – per lankus (ilgesnis): $x = \angle ABC = \angle AOC$ (lygiagretainio savybė); įbrėžtinis $\angle ABC$ remiasi į didįjį lanką AC, todėl $x = \frac{1}{2}(360° - x)$, $x = 120°$. Nubrėžtas apskritimas kviečia skaičiuoti lankus, bet trumpiau – lygiagretainis su lygiomis gretimomis kraštinėmis.

13 uždavinys.



sąlyga

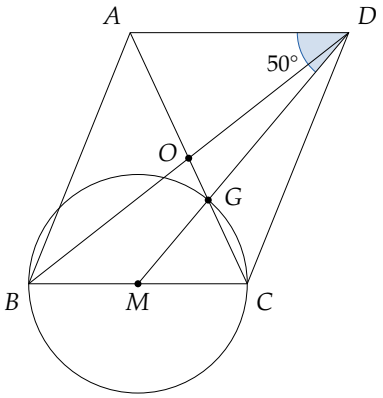


sprendimas

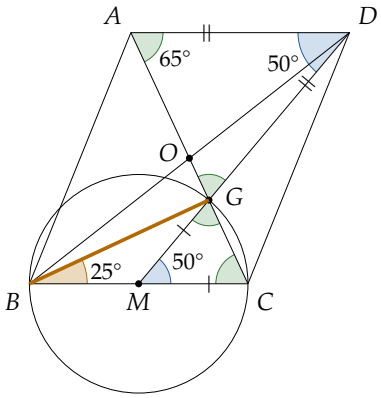
1. a) $OM \perp CD$: $CM = MD$ (statmuo iš centro dalija stygą pusiau).
2. $AE \parallel OM \parallel BF$, $AO = OB$, todėl $EM = MF$ (lygių atkarpų teorema).
3. Atkarpos CD ir EF turi bendrą vidurį M, todėl $CE = DF$.
4. b) $OM = \frac{3+5}{2} = 4$ (trapecijos vidurio linija).

Pamoka. Skersmuo kviečia ieškoti stačiųjų kampų, bet trumpiau – statmuo iš centro. (b dalis artima 4 lapo 27 uždavinio b daliai.)

14 uždavinys.



sąlyga

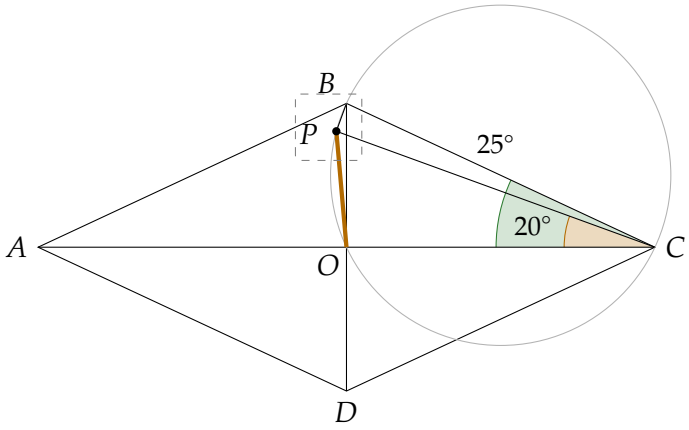


sprendimas

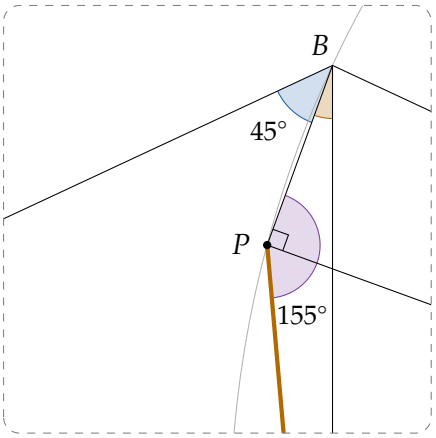
1. a) O – BD vidurys (lygiagretainio savybė), todėl CO ir DM – trikampio BCD pusiaukraštinės, G – jų susikirtimo taškas: $DG = 2GM$ (pusiaukraštinių susikirtimas). $GM = MC = \frac{1}{2}BC$ (spinduliai), todėl $DG = BC = AD$.
2. b) $\angle DAC = \frac{180°-50°}{2} = 65°$ (lygiašonio trikampio ADG kampai). $\angle GMC = \angle ADM = 50°$ (vidaus priešiniai kampai), $\angle GBC = \frac{1}{2}\angle GMC = 25°$ (įbrėžtinis kampas).
3. c) $GM = \frac{1}{2}BC = 4$ (spindulys), $DM = 3GM = 12$ (a dalis).

Antras kelias a) daliai: $MG = MC$ (spinduliai), todėl $\angle MGC = \angle MCG$; $\angle DAG = \angle MCG$ (vidaus priešiniai kampai), $\angle DGA = \angle MGC$ (kryžminiai kampai), todėl $\angle DAG = \angle DGA$, $AD = DG$ (lygiašonio požymis).

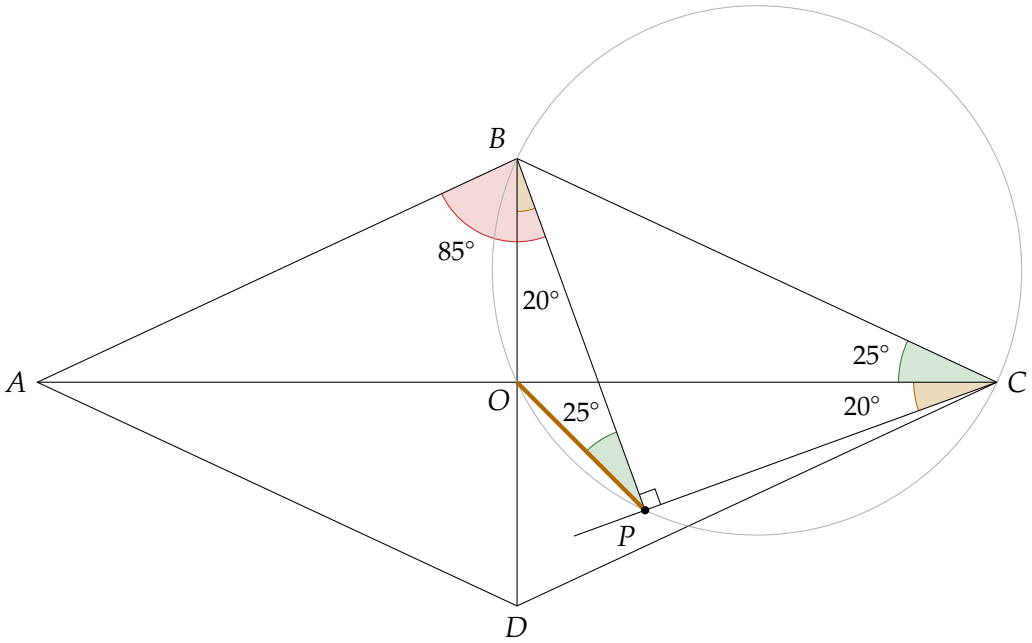
15 uždavinys.



1 atvejis (P ir B – toje pačioje AC pusėje)



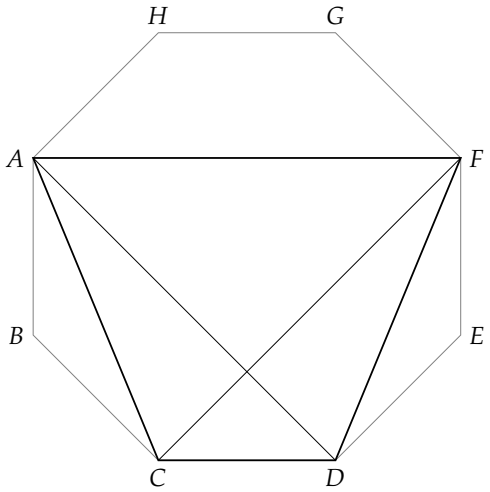
sritis prie B (padidinta)



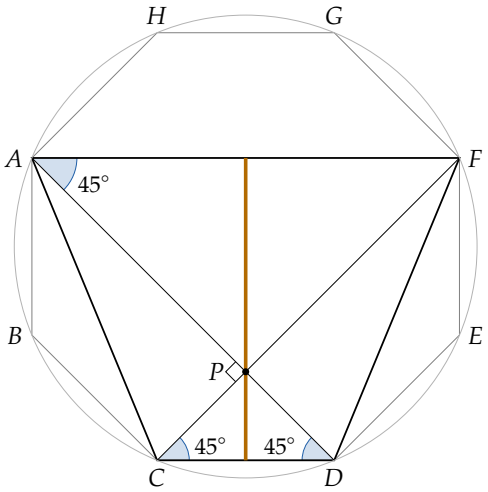
2 atvejis (P – kitoje AC pusėje)

1. a) $\angle BOC = 90°$ (rombo įstrižainės statmenos), $\angle BPC = 90°$, todėl O ir P – apskritime su skersmeniu BC (kampas į skersmenį).
2. $\angle BCO = 25°$, $\angle ABO = 65°$ (rombo įstrižainės – pusiaukampinės; $\angle B = 130°$). Abiem atvejais $\angle OBP = \angle OCP = 20°$ (kampai į tą patį lanką OP).
3. b) 1 atvejis (P ir B – toje pačioje AC pusėje; tvarka B, P, O, C): $\angle BPO = 180° - 25° = 155°$ (įbrėžtinio keturkampio $BPOC$ kampų suma), $\angle ABP = 65° - 20° = 45°$.
4. 2 atvejis (P – kitoje AC pusėje; tvarka B, O, P, C): $\angle BPO = \angle BCO = 25°$ (kampai į tą patį lanką BO), $\angle ABP = 65° + 20° = 85°$.

16 uždavinys.



sąlyga

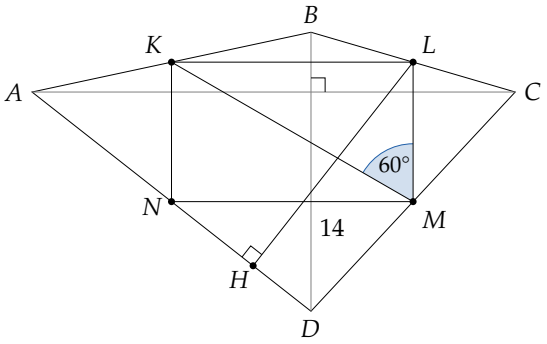


sprendimas

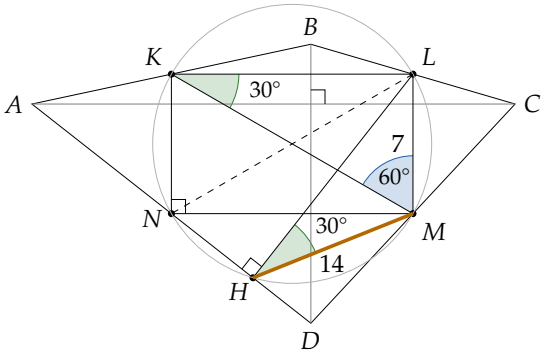
1. a) Viršūnės dalija apibrėžtinį apskritimą į 8 lankus po 45° (taisyklingasis daugiakampis); P – įstrižainių AD ir CF susikirtimo taškas.
2. $\angle CDA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC} = 45°$, $\angle DAF = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DEF} = 45°$ (įbrėžtinis kampas), todėl $CD \parallel AF$ (vidaus priešiniai kampai), $CD \neq AF$ (lankai 45° ir 135°). Trapecija įbrėžta į apskritimą, todėl lygiašonė (lygiagrečios stygos).
3. $\angle APC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DF}) = \frac{1}{2}(90° + 90°) = 90°$ (kampas tarp stygų).
4. b) $\angle PDC = \angle PCD = 45°$, todėl PCD – statusis lygiašonis trikampis; jo aukštinė iš P yra ir pusiaukraštinė, lygi $\frac{1}{2}CD$ (pusiaukraštinė į įžambinę). Taip pat trikampio PAF aukštinė iš P lygi $\frac{1}{2}AF$.
5. Abi aukštinės – vienoje tiesėje per P, statmenoje pagrindams, todėl trapecijos aukštinė $h = \frac{CD+AF}{2}$ (trapecijos vidurio linija).

Pamoka. Antras kelias b) daliai (perkelkite įstrižainę): per D tiesė, lygiagreti CF, kerta tiesę AF taške X. $CDXF$ – lygiagretainis: $AX = AF+CD$, $DX = CF = AD$ (lygiašonės trapecijos įstrižainės), $DX \perp AD$. Stačiojo lygiašonio trikampio ADX aukštinė iš D lygi $\frac{1}{2}AX = \frac{AF+CD}{2}$.

17 uždavinys.



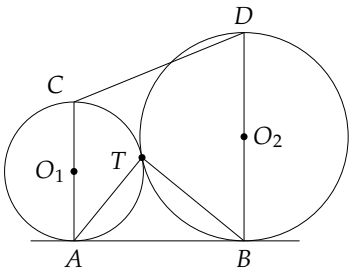
sąlyga



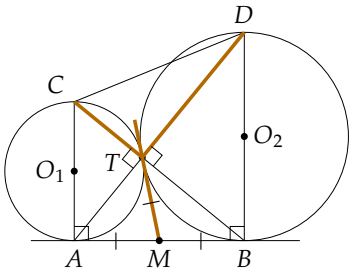
sprendimas

1. a) $KL \parallel AC \parallel NM$, $LM \parallel BD \parallel KN$ (Varinjonas), todėl $KLMN$ – lygiagretainis; $AC \perp BD$, todėl $KL \perp LM$: stačiakampis (požymis: statusis kampas).
2. $\angle LKN = \angle LMN = 90°$ (stačiakampio kampai), $\angle LHN = 90°$, todėl K, M, H – apskritime su skersmeniu LN (kampas į skersmenį).
3. b) $LM = \frac{1}{2}BD = 7$ (vidurio linija); $\angle LKM = 90° - 60° = 30°$ (stačiojo trikampio KLM smailiųjų kampų suma), $KM = 2LM = 14$ (statinis prieš $30°$ kampą). $KM = LN$ (stačiakampio įstrižainės) – skersmuo, spindulys 7.
4. $\angle LHM = \angle LKM = 30°$ (kampai į tą patį lanką LM).

18 uždavinys.



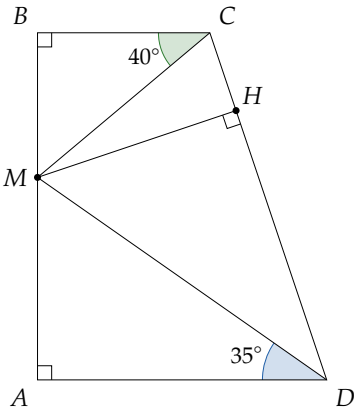
sąlyga



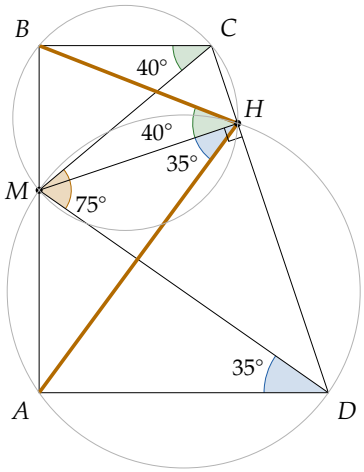
sprendimas

1. a) Bendroji liestinė taške T kerta AB taške M: $MA = MT = MB$ (liestinių atkarpos). Trikampio ATB pusiaukraštinė TM lygi pusei AB, todėl $\angle ATB = 90°$ (pusiaukraštinė į įžambinę, atvirkščiai).
2. b) $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ (liestinė ir spindulys), todėl $AC \parallel BD$; $AC \neq BD$ (nevienodi spinduliai): $ACDB$ – trapecija.
3. $\angle ATC = 90°$ (kampas į skersmenį), $\angle ATB + \angle ATC = 180°$, todėl B, T, C – vienoje tiesėje.
4. $\angle BTD = 90°$ (kampas į skersmenį), $\angle ATB + \angle BTD = 180°$, todėl A, T, D – vienoje tiesėje. Abi įstrižainės eina per T.

19 uždavinys.



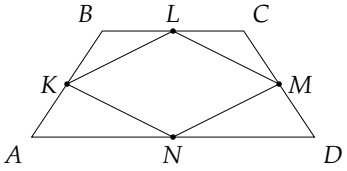
sąlyga



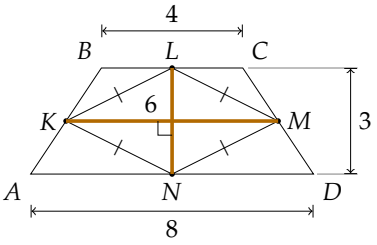
sprendimas

1. a) $\angle AMD = 90° - 35° = 55°$, $\angle BMC = 90° - 40° = 50°$ (stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma), $\angle CMD = 180° - 55° - 50° = 75°$.
2. b) $\angle MAD = \angle MHD = 90°$, todėl A, H – apskritime su skersmeniu MD (kampas į skersmenį), $\angle AHM = \angle ADM = 35°$ (kampai į tą patį lanką AM).
3. $\angle MBC = \angle MHC = 90°$, todėl B, H – apskritime su skersmeniu MC, $\angle MHB = \angle MCB = 40°$ (kampai į tą patį lanką MB).
4. $\angle AHB = 35° + 40° = 75° = \angle CMD$. (Bet kuriam M: $\angle AHB = \angle ADM + \angle BCM = \angle CMD$.)

20 uždavinys.



sąlyga

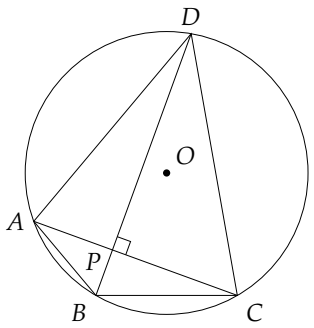


sprendimas

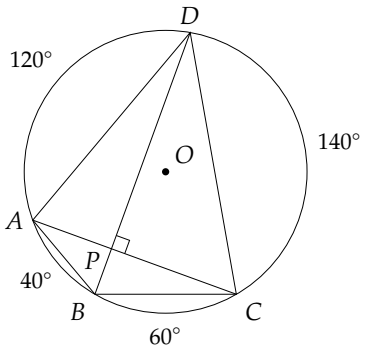
1. Klaida 3) žingsnyje: $KLMN$ įstrižainės yra KM ir LN, o ne AC ir BD.
2. Iš $AC = BD$: $KL = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = LM$ (vidurio linija), todėl $KLMN$ – rombas (gretimos kraštinės lygios).
3. Kontrpavyzdys: $AD = 8$, $BC = 4$, aukštinė 3. $KM = \frac{8+4}{2} = 6$ (trapecijos vidurio linija), $KM \parallel AD$.
4. $LN \perp KM$ (rombo įstrižainės statmenos), todėl $LN \perp AD$ ir $LN = 3$ (atstumas tarp lygiagrečių). $KM \neq LN$, o stačiakampio įstrižainės lygios – $KLMN$ ne stačiakampis.

Pamoka. Keturkampio kraštinių vidurių lygiagretainis: lygios įstrižainės – rombas, statmenos – stačiakampis.

21 uždavinys.



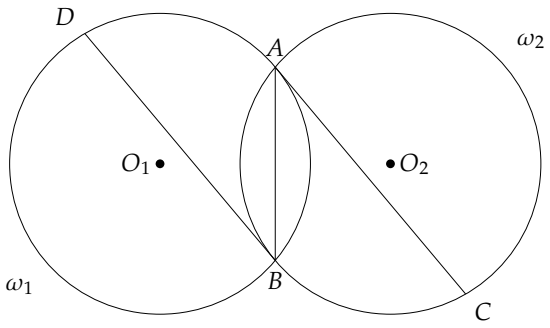
sąlyga



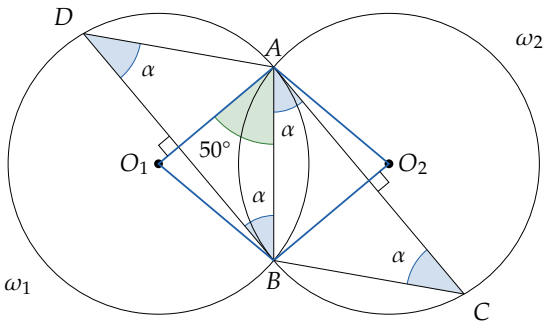
sprendimas

1. Klaida 2) žingsnyje: stygą pusiau dalija statmuo iš centro, o AC neturi eiti per O.
2. Kontrpavyzdys: lankai $AB = 40°$, $BC = 60°$, $CD = 140°$, $DA = 120°$. $\angle APB = \frac{40°+140°}{2} = 90°$ (kampas tarp stygų), t. y. $AC \perp BD$.
3. Lankai AB ir AD nelygūs, todėl $AB \neq AD$ (lygios stygos – lygūs lankai): $ABCD$ ne deltoidas.
4. Teiginys teisingas, jei AC – skersmuo: tada AC dalija BD pusiau.

22 uždavinys.



sąlyga

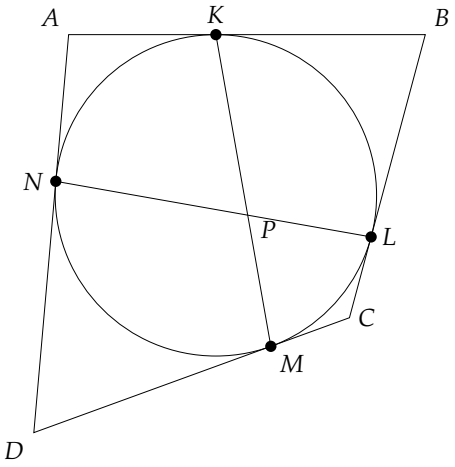


sprendimas

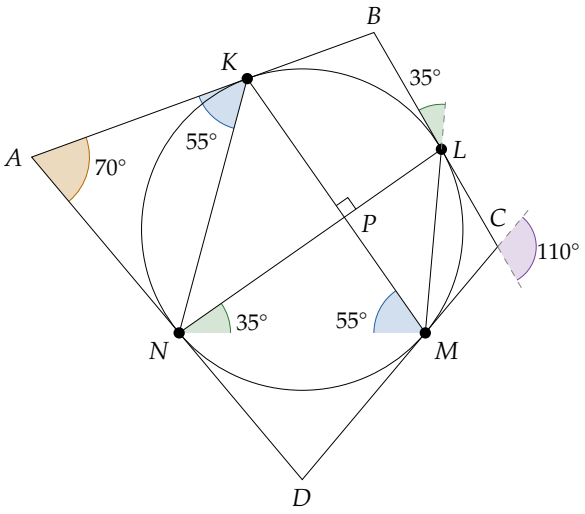
Pažymėkime $\angle CAB = \alpha$.

1. a) $O_1A = O_1B = O_2A = O_2B$ (lygūs spinduliai), todėl O_1AO_2B – rombas (visos kraštinės lygios) ir $O_1A \parallel O_2B$.
2. $AC \perp O_1A$, $BD \perp O_2B$ (liestinė ir spindulys), todėl $AC \perp O_2B$ (statmuo vienai iš lygiagrečių tiesių) ir $AC \parallel BD$ (lygiagretumo požymis).
3. b) $\angle DBA = \alpha$ (vidaus priešiniai, $AC \parallel BD$); $\angle ADB = \angle CAB = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos, ω_1); $\angle ACB = \angle DBA = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos, ω_2).
4. Trikampiai ABC ir BAD lygiašoniai: $BC = AB = AD$ (lygiašonio požymis); jų tretieji kampai $\angle CBA = \angle DAB = 180° - 2\alpha$ (trikampio kampų suma).
5. $\angle CBA = \angle DAB$ – vidaus priešiniai, todėl $BC \parallel AD$; kartu su $AC \parallel BD$ – $ACBD$ lygiagretainis.
6. c) $\angle O_1AB = 50°$ (rombo įstrižainė dalija kampą pusiau), $\angle O_1AC = 90°$, todėl $\alpha = 40°$. Kampai: $\angle ACB = \alpha = 40°$, $\angle CAD = \alpha + (180° - 2\alpha) = 140°$.
7. $ACBD$ – rombas $\Leftrightarrow AC = BC = AB \Leftrightarrow \triangle ABC$ lygiakraštis $\Leftrightarrow \alpha = 60° \Leftrightarrow \angle O_1AB = 30° \Leftrightarrow \angle O_1AO_2 = 60°$.

23 uždavinys.



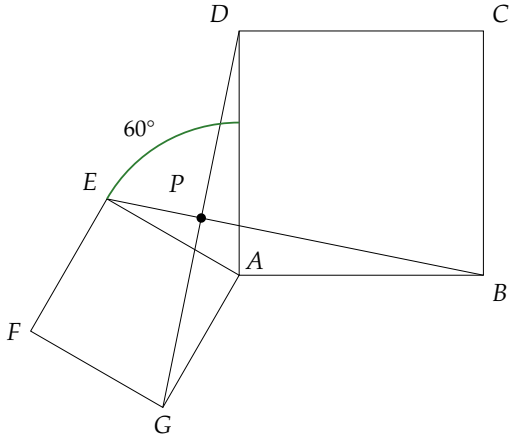
sąlyga



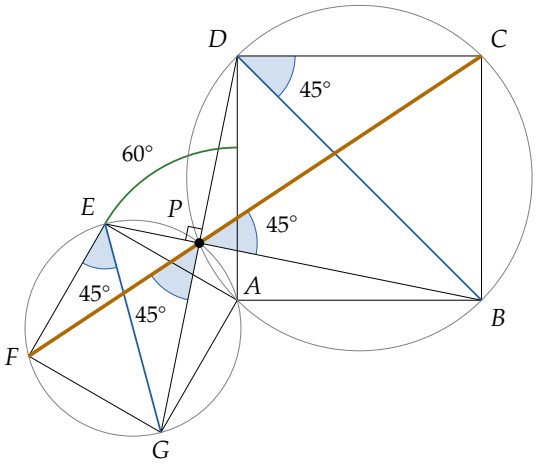
sprendimas

1. a) $AK = AN$ (liestinių atkarpos), todėl $\angle AKN = 90° - \frac{1}{2}\angle A$ (lygiašonio kampai prie pagrindo, trikampio kampų suma). $\angle PLK = \angle NLK = \angle AKN = 90° - \frac{1}{2}\angle A$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
2. Taip pat $CL = CM$, $\angle PKL = \angle MKL = \angle CLM = 90° - \frac{1}{2}\angle C$.
3. $\angle KPL = 180° - \angle PKL - \angle PLK = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$ (trikampio kampų suma).
4. b) $KM \perp LN \Leftrightarrow \angle A + \angle C = 180° \Leftrightarrow$ apie $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą (įbrėžtinio keturkampio kampų suma ir požymis).
5. c) $\angle C = 180° - 70° = 110°$ (b dalis). $\angle KMN = \angle AKN = 90° - 35° = 55°$, $\angle LNM = \angle CLM = 90° - 55° = 35°$ (kampas tarp liestinės ir stygos).

24 uždavinys.



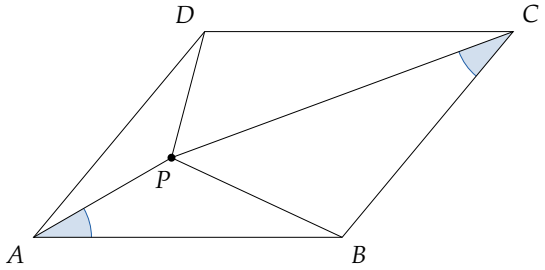
sąlyga



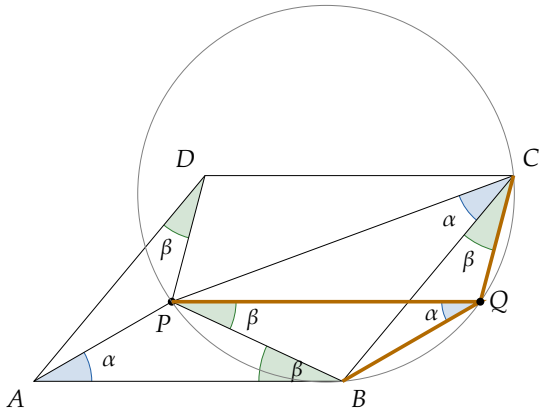
sprendimas

1. a) $\angle BAE = 90° + 60° = \angle DAG$, $AB = AD$, $AE = AG$, todėl $\triangle ABE = \triangle ADG$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų): $BE = DG$, $\angle ABP = \angle ADP$.
2. Taigi A, P, B, D – vienam apskritime (įbrėžtinio keturkampio požymis: lygūs kampai į atkarpą AP), t. y. kvadrato $ABCD$ apibrėžtiniame apskritime.
3. $\angle BPD = \angle BAD = 90°$ (kampai į tą patį lanką), todėl $\angle EPG = 90°$ (kryžminiai kampai) ir P yra apskritime su skersmeniu EG (kampas į skersmenį) – kvadrato $AEFG$ apibrėžtiniame apskritime.
4. b) $\angle BPC = \angle BDC = 45°$, $\angle FPG = \angle FEG = 45°$ (kampai į tą patį lanką); $\angle BPG = 180° - \angle BPD = 90°$ (gretutiniai kampai).
5. $\angle CPB + \angle BPG + \angle GPF = 45° + 90° + 45° = 180°$, todėl C, P, F – vienoje tiesėje.

25 uždavinys.



sąlyga



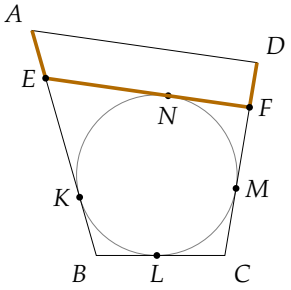
sprendimas

Pažymėkime $\angle PAB = \angle PCB = \alpha$.

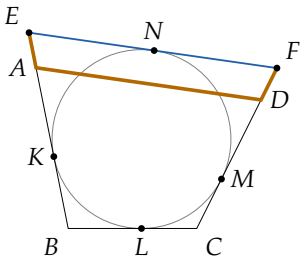
1. Užbaikime $ABQP$ iki lygiagretainio. $PQ \parallel AB \parallel DC$, $PQ = AB = DC$, todėl $DPQC$ – lygiagretainis (viena pora kraštinių lygi ir lygiagreti) ir $DP = CQ$.
2. $\triangle ADP = \triangle BCQ$ (trys kraštinės: $AD = BC$, $AP = BQ$, $DP = CQ$), todėl $\angle PDA = \angle QCB$.
3. $\angle BQP = \angle PAB = \alpha$ (priešingi lygiagretainio kampai) $= \angle PCB$, todėl P, B, Q, C – viename apskritime (įbrėžtinio keturkampio požymis: lygūs kampai į atkarpą PB).
4. $\angle PBA = \angle BPQ$ (vidaus priešiniai, $AB \parallel PQ$) $= \angle BCQ$ (kampai į tą patį lanką) $= \angle PDA$; pažymėkime juos β.
5. b) $\angle PDA = \angle PBA = 180° - 30° - 125° = 25°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. Lygius kampus skirtingose vietose perkelkite lygiagrečiai, kad jie remtųsi į tą pačią atkarpą – tada atsiranda „nematomas“ apskritimas.

27 uždavinys.



(i) E, F – atkarpose BA, CD



(ii) E, F – už A ir D

Brėžiniuose – prielaida, kad $E \neq A$ (lygybė $AB + CD = BC + AD$ juose netenkinama).

1. a) O vienodai nutolęs nuo tiesių BA, BC, CD (taškas pusiaukampinėje), todėl ω jas liečia (liestinė ir spindulys).
2. $BK = BL$, $CM = CL$ (liestinių atkarpos), L – kraštinėje BC, todėl $BK < BC \leq AB$ ir $CM < BC \leq CD$: K ir M – kraštinėse AB ir CD.
3. b) ω liečia visas keturkampio $EBCF$ kraštines, todėl $EB + CF = BC + EF$ (apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių sumos lygios).
4. c) $AD \parallel EF$, todėl A ir D – vienoje EF pusėje: arba (i) E, F – atkarpose BA, CD, arba (ii) E, F – už A ir D.
5. (i) $AB + CD = AE + FD + (EB + CF) = AE + FD + BC + EF$; kartu $AB + CD = BC + AD$, todėl $AE + EF + FD = AD$. Bet laužtė $AEFD$ ilgesnė už atkarpą AD (trikampio nelygybė) – prieštara.
6. (ii) $BC + EF = EB + CF = EA + DF + (AB + CD) = EA + DF + BC + AD$, todėl $EA + AD + DF = EF$ – laužtė $EADF$ lygi atkarpai EF, prieštara.
7. Lieka $E = A$, $F = D$: ω liečia visas keturias $ABCD$ kraštines. ■

Pastaba smalsiems. E ir F tikrai yra spinduliuose BA ir CD, o ω – keturkampio $EBCF$ viduje (jis yra tiesių AB, BC, CD, EF toje pačioje pusėje kaip keturkampis), todėl liečia kraštines, ne jų tęsinius. Iš dviejų AD lygiagrečių liestinių imame tą, kurios atžvilgiu ω ir BC – vienoje pusėje (kita „nukerta“ B arba C). Sąlygos „BC – trumpiausia“ reikia tik a) daliai: be jos K ar M gali atsidurti kraštinės tęsinyje.