Geometrija

Lapas 6. Kampų metodas III: įbrėžtinis keturkampis ir nematomas apskritimas

9 klasė

Apšilimas (5 min.)

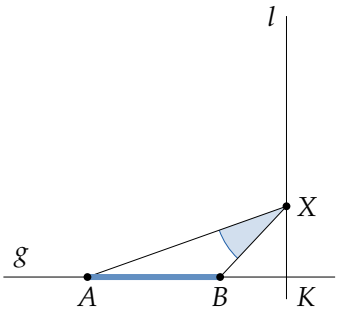
Pratimai 1. Prisiminkite ankstesnius lapus (atsakymai – lapo gale).

a) Taškai A, B, C, D yra apskritime (šia tvarka), $\angle ABD = 40°$. Raskite $\angle ACD$.

b) Iš taško P nubrėžtos apskritimo su centru O liestinės PA ir PB, $\angle AOB = 124°$. Raskite $\angle APB$.

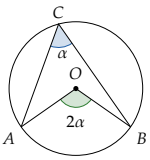
c) Apskritimo styga AB lygi spinduliui, C – didesniojo lanko AB taškas. Raskite $\angle ACB$.

Stadiono vartai. Futbolininkas su kamuoliu bėga tiese l, statmena vartų linijai g, už vartų ribų (žr. brėžinį). Kai X labai arti vartų linijos g, kampas AXB, kuriuo matomi vartai AB, labai mažas; kai labai toli – irgi labai mažas. Iš kurio tiesės l taško X aikštėje vartai matomi didžiausiu kampu?
Atsakymas – 3 pavyzdyje.

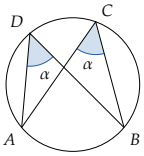


1. Nuo ko pradedame

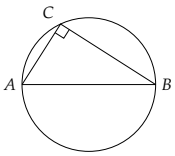
Iš 5 lapo: kampai apskritime (įrankiai 33–36) ir išvada apie lygias stygas.



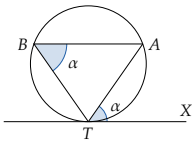
įbrėžtinis kampas lygus pusei lanko



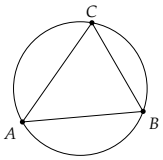
kampai į tą patį lanką lygūs



AB – skersmuo $\Leftrightarrow \angle ACB = 90°$



kampas tarp liestinės ir stygos



per 3 taškus (ne vienoje tiesėje) – vienintelis apskritimas

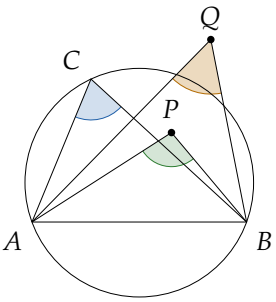
Lygios stygos $\Leftrightarrow$ lygūs mažesnieji lankai; lygūs įbrėžtiniai kampai remiasi į lygias stygas. Iš 3–4 lapų: vidurio statmuo (taškai, vienodai nutolę nuo atkarpos galų), liestinė statmena spinduliui, liestinių atkarpos lygios. Iš 2b–2c lapų: lygiagretainio priešingi kampai lygūs, gretimų suma 180°, įstrižainės dalija viena kitą pusiau (ir požymiai); stačiakampis – lygiagretainis su stačiu kampu; rombas – lygiagretainis lygiomis kraštinėmis; trikampio vidurio linija lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei; trapecija lygiašonė $\Leftrightarrow$ jos kampai prie pagrindo lygūs.

5 lape iš „taškai apskritime“ gavome lygius kampus. Šiame lape – atvirkščiai: iš lygių kampų spręsime, kad taškai yra viename apskritime. Tada apskritimą, kurio sąlygoje nėra, galime nubrėžti patys – **nematomas apskritimas**.

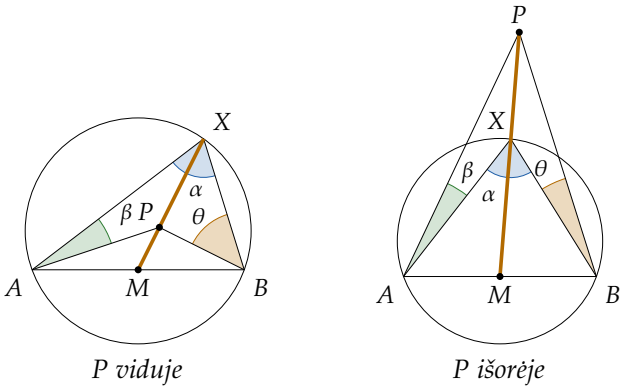
2. Įbrėžtinis keturkampis

Lema (taškas ir apskritimas)

Taškai A, B, C yra apskritime; taškas P yra toje pačioje tiesės AB pusėje kaip C. Jei P yra apskritimo viduje, tai $\angle APB > \angle ACB$; jei išorėje, tai $\angle APB < \angle ACB$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



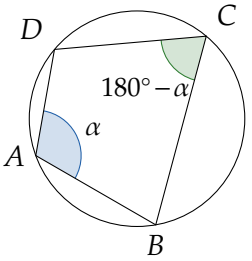
M – atkarpos AB vidurys; spindulys MP kerta lanką ACB taške X. $\angle AXB = \angle ACB = \alpha$ (kampai į tą patį lanką); $\beta = \angle PAX$, $\theta = \angle PBX$.

1. P viduje: tvarka M, P, X. $\angle APM$ ir $\angle BPM$ – trikampių APX ir BPX priekampiai, todėl $\angle APB = \angle APM + \angle BPM = (\beta + \angle AXP) + (\theta + \angle BXP) = \alpha + \beta + \theta > \alpha$.
2. P išorėje: tvarka M, X, P. Taip pat (trikampių AXP ir BXP priekampiai) $\alpha = \angle AXM + \angle BXM = \angle APB + \beta + \theta$, todėl $\angle APB < \alpha$.

■

Įrankis 37 (įbrėžtinis keturkampis)

Keturkampis, kurio visos viršūnės yra viename apskritime, vadinamas **įbrėžtiniu**. Įbrėžtinio keturkampio priešingų kampų suma lygi 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

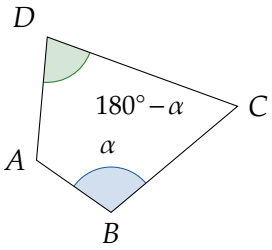


Įrodykite patys (Pratimai 5 a).

Spėk! Ar teisingas atvirkščias teiginys: jei iškilojo keturkampio priešingų kampų suma lygi 180°, tai jo viršūnės yra viename apskritime? Pabandykite nubrėžti kontrpavyzdį arba pagrįsti. (Atsakymas – toliau, požymis „suma 180°“.)

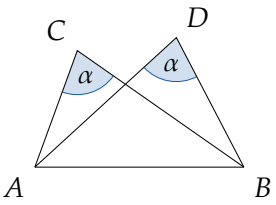
Įrankis 38 (požymis: suma 180°)

Jei iškilojo keturkampio dviejų priešingų kampų suma lygi 180° ($\angle B + \angle D = 180°$), tai jis įbrėžtinis.



Įrankis 39 (požymis: lygūs kampai)

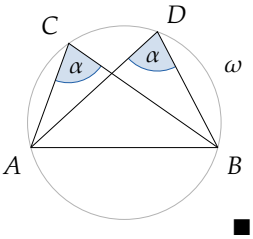
Jei taškai C ir D yra toje pačioje tiesės AB pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB$, tai taškai A, B, C, D yra viename apskritime.



Abu požymius įrodome lema.

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

Požymis (lygūs kampai). Per A, B, C eina vienintelis apskritimas ω. Jei D būtų ω viduje, būtų $\angle ADB > \angle ACB$, jei išorėje – $\angle ADB < \angle ACB$ (lema). Abu atvejai prieštarauja sąlygai $\angle ADB = \angle ACB$, todėl $D \in \omega$.

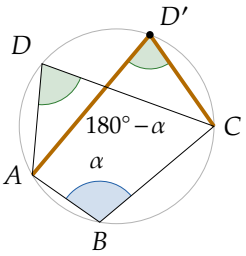


■

Grįžtame *5 lapo 3 skyriaus 2 teiginys: tada jį tik iliustravome pavyzdžiu, dabar įrodėme.*

Įrodymas.

Požymis (suma 180°). Pažymėkime $\alpha = \angle B$. ω – apskritimas per A, B, C; D' – jo lanko AC, kuriame nėra B, taškas: $\angle AD'C = 180° - \alpha$ ($ABCD'$ įbrėžtinis). D ir D' – toje pačioje tiesės AC pusėje (priešingoje nei B). Jei D būtų ω viduje, būtų $\angle ADC > 180° - \alpha$, jei išorėje – $\angle ADC < 180° - \alpha$ (lema). Abu atvejai prieštarauja sąlygai, todėl $D \in \omega$.

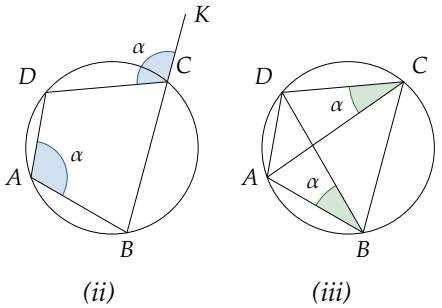


■

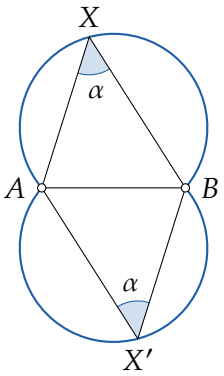
Išvada (kada keturkampis įbrėžtinis). Iškilasis keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis

(i) $\Leftrightarrow$ jo priešingų kampų suma 180°: $\angle A + \angle C = 180°$;
(ii) $\Leftrightarrow$ jo priekampis lygus priešingam vidaus kampui: $\angle DCK = \angle A$ (K – tiesės BC taškas už C);
(iii) $\Leftrightarrow$ kampai, kuriais iš dviejų gretimų viršūnių matoma priešinga kraštinė, lygūs: $\angle ABD = \angle ACD$.

(i) – įbrėžtinio keturkampio savybė ir požymis (suma 180°);
(ii) ir (iii) įrodykite patys (Pratimai 5 b, c).



Taškų aibė. Taškai X, iš kurių atkarpa AB matoma kampu α ($\angle AXB = \alpha$), sudaro du lankus, simetriškus tiesės AB atžvilgiu (be taškų A ir B). Kai $\alpha = 90°$, šie lankai sudaro apskritimą su skersmeniu AB. Įrodykite patys (Pratimai 5 d); kaip tokį lanką nubrėžti – Pratimai 4 f.



Dėmesio. kampų lygybė priklauso nuo taškų tvarkos. Jei keturi taškai yra viename apskritime, tai kampai į tą pačią stygą lygūs, kai jų viršūnės yra *toje pačioje* jos pusėje; kai skirtingose – jų suma lygi 180°. Prieš rašydami lygybę, patikrinkite pusę.

3. Ar teisingas atvirkščias teiginys?

Pratimai 2. Ar teisinga? Jei ne – nurodykite kontrpavyzdį; jei taip – pagrįskite (atsakymai – lapo gale).

a) Taškai C ir D yra skirtingose tiesės AB pusėse, o A, B, C, D – viename apskritime. Tada $\angle ACB = \angle ADB$.
Užuomina: koks keturkampis $ACBD$?

b) Stačiakampis – įbrėžtinis lygiagretainis (požymis: suma 180°). Atvirkščiai: jei lygiagretainis įbrėžtinis, tai jis – stačiakampis.
Užuomina: kokie lygiagretainio priešingi kampai?

c) Kvadratas – įbrėžtinis rombas. Atvirkščiai: jei rombas įbrėžtinis, tai jis – kvadratas.
Užuomina: rombas – lygiagretainis.

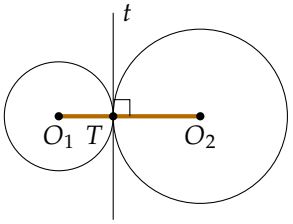
d) Jei keturkampio dvi priešingos kraštinės lygiagrečios, o kitos dvi – lygios, tai jis įbrėžtinis.
Užuomina: o jei ir lygiagrečios kraštinės lygios?

e) Deltoidas $ABCD$ ($AB = AD, CB = CD$), kurio $\angle B = \angle D = 90°$, įbrėžtinis (požymis: suma 180°). Atvirkščiai: jei deltoidas $ABCD$ įbrėžtinis, tai $\angle B = \angle D = 90°$.
Užuomina: palyginkite trikampius ABC ir ADC.

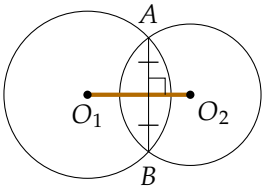
f) Raskite klaidą: „Keturkampis, turintis du stačius kampus, yra įbrėžtinis.“
Užuomina: kur gali būti tie statieji kampai?

4. Du apskritimai

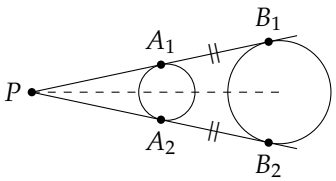
Du apskritimai **liečiasi** taške T, jei T – jų bendras taškas ir jie turi bendrą liestinę t taške T.



(i) liečiasi: T – centrų tiesėje



(ii) kertasi: O_1O_2 – stygos AB vidurio statmuo



(iii) bendrųjų išorinių liestinių atkarpos lygios

Išvada (du apskritimai). Apskritimų centrai O_1 ir O_2, spinduliai r_1 ir r_2.

(i) Jei apskritimai liečiasi taške T, tai T yra tiesėje O_1O_2: $O_1T \perp t$ ir $O_2T \perp t$ (liestinė statmena spinduliui), o per T tiesei t statmena tiesė – viena. Todėl $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (liečiasi iš išorės) arba $O_1O_2 = |r_1 - r_2|$ (iš vidaus).

(ii) Jei apskritimai kertasi taškuose A ir B, tai tiesė O_1O_2 – atkarpos AB vidurio statmuo ($AB \perp O_1O_2$, O_1O_2 dalija AB pusiau): $O_1A = O_1B$ ir $O_2A = O_2B$, todėl abu centrai yra atkarpos AB vidurio statmenyje (vidurio statmuo).

(iii) Jei dvi bendrosios išorinės liestinės liečia apskritimus taškuose A_1, B_1 ir A_2, B_2 (abu apskritimai – toje pačioje kiekvienos liestinės pusėje), tai $A_1B_1 = A_2B_2$. Kai $r_1 \neq r_2$ (tarkime, $r_1 < r_2$, kaip brėžinyje), liestinės kertasi taške P: $PA_1 = PA_2$, $PB_1 = PB_2$ (liestinių atkarpos), todėl $A_1B_1 = PB_1 - PA_1 = PB_2 - PA_2 = A_2B_2$. Kai $r_1 = r_2$, $O_1A_1B_1O_2$ – stačiakampis (O_1A_1 ir O_2B_1 lygūs ir abu statmeni liestinei), todėl $A_1B_1 = O_1O_2 = A_2B_2$.

Pratimai 3. Įrodykite (sprendimai – lapo gale).

a) Apskritimai su centrais O_1 ir O_2 liečiasi iš išorės taške T. Tiesė, einanti per T (ne per centrus), antrą kartą kerta pirmąjį apskritimą taške A, antrąjį – taške B. Įrodykite, kad $O_1A \parallel O_2B$ ir kad apskritimų liestinės taškuose A ir B lygiagrečios.
Užuomina: kur yra taškas T? Palyginkite kampus prie T, A ir B.

b) Apskritimai su centrais O_1 ir O_2 kertasi taškuose A ir B; AC ir AD – jų skersmenys. Įrodykite, kad taškai C, B, D yra vienoje tiesėje ir $CD = 2\,O_1O_2$.
Užuomina: kokie kampai ABC ir ABD? Kokia atkarpa yra O_1O_2 trikampyje ACD?

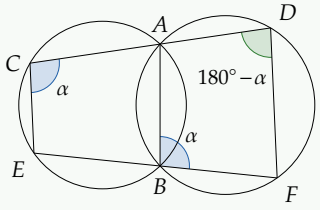
5. Technikos

Technika T20. Nematomas apskritimas

Signalas: du lygūs kampai į tą pačią atkarpą, jų viršūnės – toje pačioje atkarpos pusėje; keturkampio priešingų kampų suma 180°; du statieji kampai į tą pačią atkarpą (T18); klausimas „įrodykite, kad keturi taškai yra viename apskritime“.
Veiksmas: nubrėžk apskritimą (požymis: lygūs kampai arba suma 180°) ir perkelk kampus: kampai į tą patį lanką lygūs.

Technika T21. Grandinė per apskritimus

Signalas: keli įbrėžtiniai keturkampiai su bendrais taškais (pvz., du susikertantys apskritimai).
Veiksmas: kampą perkelk per pirmąjį įbrėžtinį keturkampį, paskui – per antrąjį (lygūs kampai arba suma 180°), kol jis atsiras ten, kur reikia.
Pavyzdys (Reimo teorema). Du apskritimai kertasi taškuose A ir B; tiesė per A juos kerta taškuose C ir D, tiesė per B – taškuose E ir F (C, E – pirmajame apskritime; tvarka C, A, D ir E, B, F; atkarpos CD ir EF nesikerta). Tada $CE \parallel DF$: $\alpha = \angle ACE$, $\angle ABF = 180° - \angle ABE = \alpha$ (gretutiniai kampai; $ACEB$ įbrėžtinis), $\angle ADF = 180° - \alpha$ ($ABFD$ įbrėžtinis), todėl $\angle ACE + \angle CDF = 180°$ ir $CE \parallel DF$ (lygiagretumo požymis).

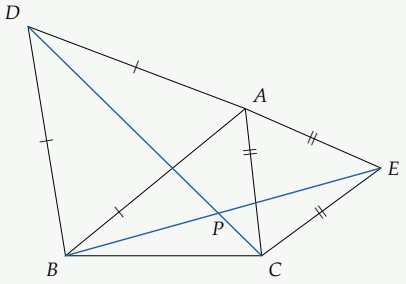


6. Pavyzdžiai

Pavyzdys 1 (lygiakraščiai trikampiai išorėje)

Grįžtame *2 lapo 14 uždavinys*

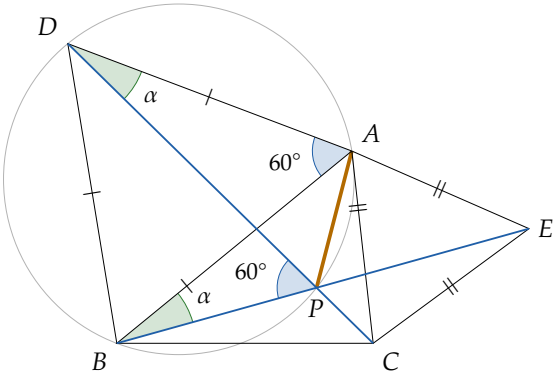
Visi trikampio ABC kampai mažesni už $120°$. Trikampio išorėje nubrėžti lygiakraščiai trikampiai ABD ir ACE; atkarpos BE ir CD kertasi taške P. Įrodykite, kad $BE = CD$, ir raskite kampą BPD.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. du lygūs kampai ADC ir ABE remiasi į atkarpą AP, jų viršūnės D ir B – toje pačioje tiesės AP pusėje.

Idėja (T20). A, D, B, P – vienam apskritime; kampą BPD perkeliame į kampą BAD.



Sprendimas.

1. Pažymėkime $\angle ADC = \alpha$. $\triangle ADC = \triangle ABE$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AD = AB$, $AC = AE$, $\angle DAC = \angle BAE = 60° + \angle BAC$), todėl $CD = BE$ ir $\angle ADP = \angle ABP = \alpha$.
2. D ir B – toje pačioje tiesės AP pusėje (nes $\angle BAC < 120°$); A, D, B, P – vienam apskritime (požymis: lygūs kampai).
3. $\angle BPD = \angle BAD = 60°$ (kampai į tą patį lanką BD).

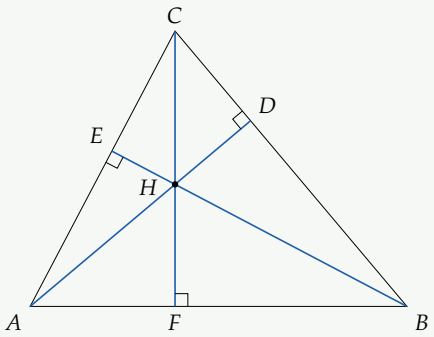
Pamoka. 2 lape kampą radome per trikampius ADQ ir PBQ (Q – tiesių DC ir AB susikirtimo taškas): $\angle ADQ = \angle PBQ$, kampai prie Q kryžminiai, todėl $\angle BPD = \angle DAB = 60°$. Nematomas apskritimas tą patį kampą „atneša“ be papildomo taško.

Pavyzdys 2 (aukštinės smailiajame trikampyje)

Smailiojo trikampio ABC aukštinės AD, BE ir CF kertasi taške H.

a) Nurodykite šešis keturkampius, kurių viršūnės yra viename apskritime.

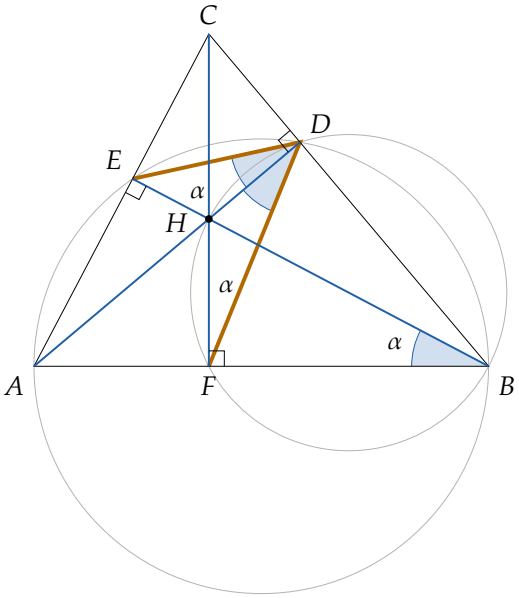
b) Įrodykite, kad AD – kampo EDF pusiaukampinė.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. daug stačiųjų kampų.

Idėja (T20, T18). statieji kampai – nematomi apskritimai; kampus prie D perkeliame į kampą ABE per du iš jų.



Sprendimas.

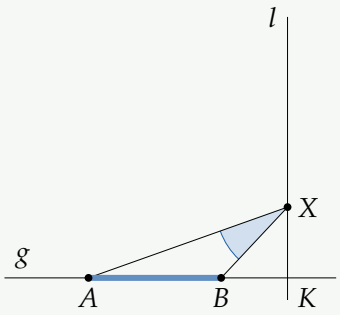
a) Su tašku H: $AFHE$, $BDHF$, $CEHD$ (du priešingi statieji kampai – suma 180°). Su kraštine: $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$ (du statieji kampai į tą pačią kraštinę – apskritimas su skersmeniu AB, BC, CA).

b) Pažymėkime $\angle ABE = \alpha$. $\angle ADE = \alpha$ ($ABDE$ įbrėžtinis; kampai į lanką AE). $\angle ADF = \angle HBF = \alpha$ ($BDHF$ įbrėžtinis; kampai į lanką HF). Taigi $\angle ADE = \angle ADF$.

Pamoka. taip pat BE ir CF – trikampio DEF pusiaukampinės: H – jo pusiaukampinių susikirtimo taškas.

Pavyzdys 3 (stadiono vartai)

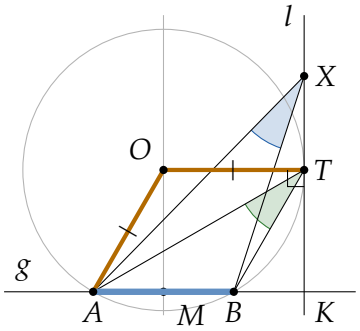
Futbolininkas bėga tiese l, statmena vartų linijai g, už vartų AB ribų. Iš kurio tiesės l taško aikštėje vartai matomi didžiausiu kampu? (Atsakymą rasime be skaičiavimų – nurodysime tašką ir kaip jį nubrėžti.)



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. reikia palyginti kampus, kuriais atkarpa AB matoma iš skirtingų taškų; lema lygina kampus iš taškų apskritimo viduje ir išorėje.

Idėja. apskritimas per A ir B, liečiantis tiesę l.



Sprendimas.

1. ω – apskritimas per A ir B, liečiantis tiesę l taške T (aikštės pusėje).
2. Kiekvienam kitam tiesės l taškui X aikštėje $OX > OT$ (statmuo trumpesnis už pasvirąją), todėl X yra už ω; X ir T – toje pačioje AB pusėje. Todėl $\angle AXB < \angle ATB$ (lema): vartai geriausiai matomi iš taško T.
3. Kaip nubrėžti T. Centras O yra atkarpos AB vidurio statmenyje ($OA = OB$), o jis lygiagretus l (abi tiesės statmenos g). $OT \perp l$, todėl spindulys lygus atstumui tarp šių lygiagrečių tiesių: $OA = OT = MK$ (M – atkarpos AB vidurys, K – tiesių g ir l susikirtimo taškas). Skriestuvu iš A spinduliu MK ($MK > MA$) kertame vidurio statmenį – gauname O; T – statmens iš O į l pagrindas.

Pamoka. didžiausias kampas – ten, kur apskritimas per atkarpos galus liečia tiesę (kai tiesė nekerta atkarpos AB). Kiek metrų KT – suskaičiuoti išmoksime vėliau.

7. Pratimai

Pratimai 4. Apskaičiuokite arba atsakykite.

a) Keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis, $\angle A = 74°$, $\angle B = 95°$. Raskite $\angle C$ ir $\angle D$.

b) Keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis, jo priekampis prie viršūnės C lygus $68°$. Raskite $\angle A$.

c) Ar įbrėžtinis keturkampis $ABCD$, kurio kampai A, B, C, D lygūs $70°$, $130°$, $110°$, $50°$? O kai jie lygūs $80°$, $100°$, $90°$, $90°$?

d) Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $\angle ACB = \angle ADB = 50°$, $\angle CAD = 20°$. Raskite $\angle CBD$.

e) Trapecijoje $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $\angle A = \angle B = 65°$. Raskite $\angle C$ ir $\angle D$. Ar ši trapecija įbrėžtinė? Įrodykite: trapecija, kurios kampai prie pagrindo lygūs, įbrėžtinė, ir atvirkščiai.

f) Nubrėžkite atkarpą $AB = 4$ cm ir lanką, iš kurio taškų ji matoma $30°$ kampu.
Užuomina: per A nubrėžkite tiesę t, su AB sudarančią $30°$ kampą; apskritimas, liečiantis t taške A ir einantis per B, – ieškomasis.

g) Futbolininkas bėga tiese, lygiagrečia vartų linijai AB (prieš vartus). Iš kurio šios tiesės taško vartai matomi didžiausiu kampu?

Pratimai 5. Įrodykite (teiginiai, kurių teorijoje neįrodėme; sprendimai – lapo gale).

a) Įbrėžtinio keturkampio priešingų kampų suma lygi 180°.
Užuomina: kiekvieną kampą išreikškite lanku, į kurį jis remiasi.

b) Iškilasis keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis tada ir tik tada, kai jo priekampis prie viršūnės C lygus $\angle A$.
Užuomina: kam lygus priekampis prie C?

c) Iškilasis keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis tada ir tik tada, kai $\angle ABD = \angle ACD$.
Užuomina: kurioje tiesės AD pusėje yra B ir C?

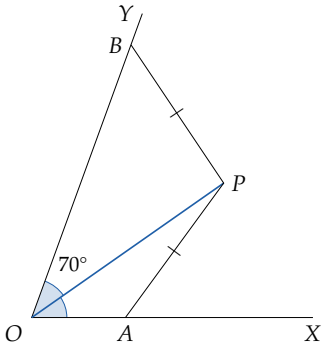
d) Taškai X, esantys vienoje tiesės AB pusėje, iš kurių atkarpa AB matoma duotu kampu, sudaro apskritimo lanką su galais A ir B (be A ir B).
Užuomina: raskite vieną tokį tašką X_0 (kokio trikampio viršūnė?), tada taikykite požymį.

8. Grįžtame

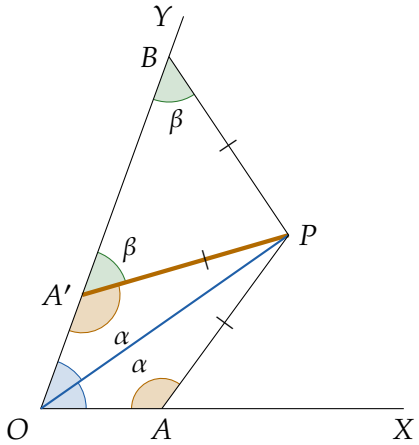
Kai kuriuos ankstesnių lapų uždavinius nematomas apskritimas išsprendžia kitaip arba trumpiau. Palyginkite sprendimus; paskui išspręskite patys. Ženkliukas „Grįžtame“ žymi ankstesnio lapo uždavinį ar teiginį, prie kurio grįžtame su naujais įrankiais.

Grįžtame *3 lapo 13 uždavinys*

$\angle XOY = 70°$. Taškas P yra šio kampo pusiaukampinėje ($P \neq O$). Taškas A yra spindulyje OX, taškas B – spindulyje OY, $PA = PB$ ir $OA < OB$. Raskite $\angle APB$.

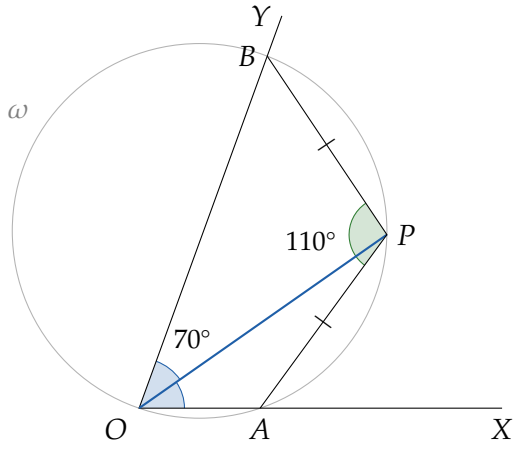


Anksčiau (3 lapas, T10).



1. $OA' = OA$ ($A' \in OY$): $\triangle OAP = \triangle OA'P$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $PA' = PA$, $\angle OAP = \angle OA'P$; pažymėkime juos α.
2. $PA' = PB$, todėl $\angle PA'B = \angle PBA'$ (kampai prie pagrindo); pažymėkime juos β.
3. $\alpha + \beta = 180°$ (gretutiniai), $\angle APB = 360° - 70° - 180° = 110°$ (keturkampio kampų suma).

Dabar (T20).



1. ω – apskritimas per O, A, B; tiesė OP jį antrą kartą kerta taške W. $\angle AOW = \angle WOB$, todėl $WA = WB$ (lygūs įbrėžtiniai kampai – lygios stygos).
2. P ir W – pusiaukampinėje ir atkarpos AB vidurio statmenyje. Šios tiesės skirtingos ($OA \neq OB$), todėl turi vieną bendrą tašką: $P = W \in \omega$.
3. $\angle APB = 180° - 70° = 110°$ (įbrėžtinio keturkampio $OAPB$ kampai).

Pamoka. taškas kampo pusiaukampinėje, vienodai nutolęs nuo A ir B (kai $OA \neq OB$), – trikampio OAB apibrėžtinio apskritimo taškas; nebereikia papildomo taško A'.

Pratimai 6. Išspręskite patys naujais įrankiais (nurodytas lapas ir uždavinio numeris; sprendimai – lapo gale).

a) *(2 lapas, 21 uždavinys.)* Trikampyje ABC $AB = AC$, $\angle A = 100°$, BL – pusiaukampinė. Įrodykite, kad $BC = BL + AL$.
Užuomina: 1) kraštinėje BC atidėkite $BK = BL$; kam lygi kampų A ir BKL suma? 2) kokios stygos remiasi į lygius kampus prie B?

b) *(2 lapas, 22 uždavinys.)* Trikampyje ABC $\angle A = 60°$, pusiaukampinės BE ir CF ($E \in AC$, $F \in AB$) kertasi taške I. Įrodykite, kad $IE = IF$ ir $BC = BF + CE$.
Užuomina: 1) raskite $\angle FIE$; koks keturkampis $AFIE$? 2) AI – irgi pusiaukampinė. Antrai daliai atidėkite $BK = BF$.

c) *(3 lapas, 15 uždavinys.)* Iškilajame keturkampyje $ABCD$ įstrižainė BD yra kampo ABC pusiaukampinė, $AD = CD$, $\angle BAD = 110°$, o kampai ABC ir BCD smailieji. Raskite $\angle BCD$.
Užuomina: 1) apibrėžkite apie trikampį ABC apskritimą; kur jį antrą kartą kerta tiesė BD? 2) palyginkite

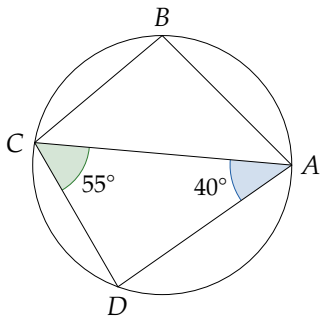
su 3 lapo 13 uždaviniu (aukščiau).

Uždaviniai

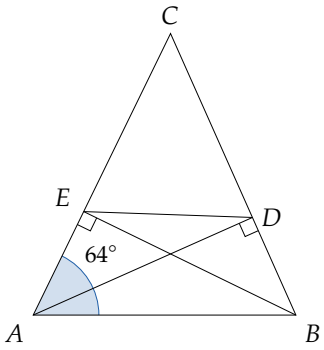
Jei brėžinio nėra, nusibraižykite patys.

I. Įgūdžiai

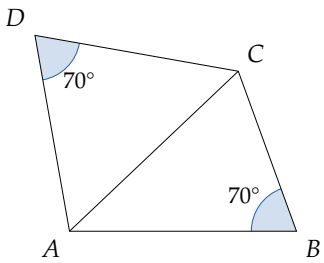
1. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, $\angle CAD = 40°$, $\angle ACD = 55°$. Raskite $\angle ABC$.



2. Smailiojo trikampio ABC aukštinės AD ir BE, $\angle BAC = 64°$. Raskite: a) $\angle EDA$; b) $\angle CDE$.



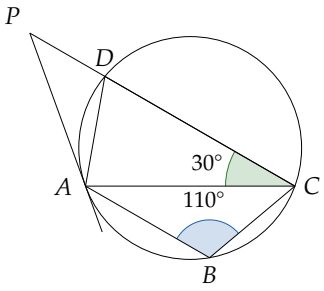
3. Raskite klaidą. Mokinys rašė: „Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $\angle ABC = \angle ADC = 70°$. Atkarpa AC iš taškų B ir D matoma vienodu kampu, todėl A, B, C, D – viename apskritime.“



II. Tilteliai

Šiuose uždaviniuose apskritimas jau duotas arba signalas jį nubrėžti matyti pačioje sąlygoje.

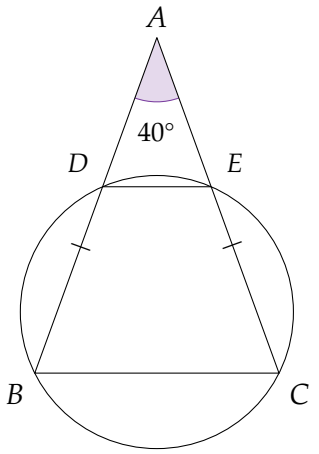
4. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, $\angle ABC = 110°$, $\angle ACD = 30°$. Apskritimo liestinė taške A kerta tiesę CD taške P (D – tarp C ir P). Raskite $\angle APD$.



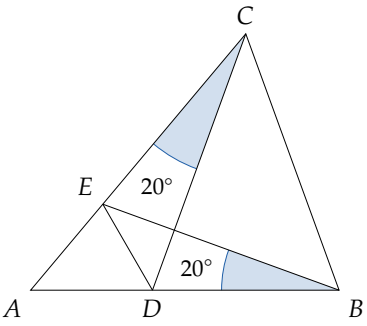
5. Trikampyje ABC $AB = AC$. Apskritimas, einantis per B ir C, kerta kraštines AB ir AC vidiniuose taškuose D ir E.

a) Įrodykite, kad $DE \parallel BC$.

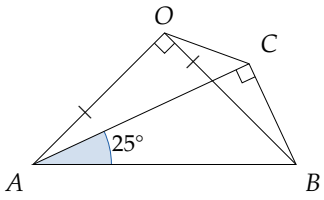
b) Raskite $\angle BDE$, jei $\angle A = 40°$.



6. Trikampyje ABC $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$. Kraštinėse AB ir AC pažymėti taškai D ir E, kad $\angle ABE = \angle ACD = 20°$. Raskite $\angle BED$ ir $\angle AED$.



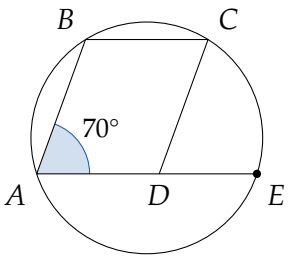
7. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) $\angle CAB = 25°$. Taškas O yra toje pačioje tiesės AB pusėje kaip C, $OA = OB$ ir $\angle AOB = 90°$ (O – kvadrato su kraštine AB centras). 5 lapo 12 uždavinyje toks taškas (ten – D) buvo *kitoje* AB pusėje, ir įrodėme, kad tada jį ir C jungianti tiesė – kampo ACB pusiaukampinė. Ar CO ir dabar kampo ACB pusiaukampinė? Raskite $\angle ACO$ ir $\angle OCB$.



8. Lygiagretainio $ABCD$ kampas A lygus $70°$. Apskritimas, einantis per A, B ir C, antrą kartą kerta tiesę AD taške E (D – tarp A ir E).

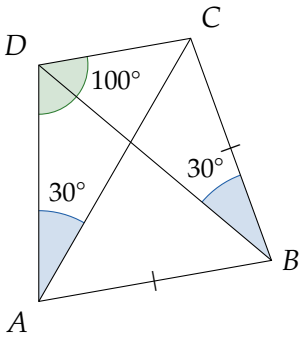
a) Įrodykite, kad $CE = CD$.

b) Raskite $\angle DCE$.



III. Technikos

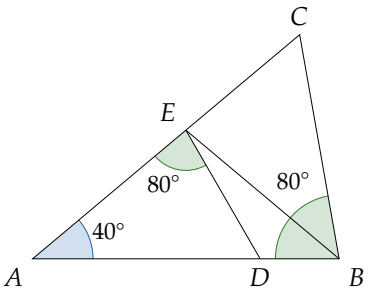
9. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = BC$, $\angle CAD = \angle CBD = 30°$, $\angle ADC = 100°$. Raskite $\angle BAD$ ir įrodykite, kad $AD = AB$.



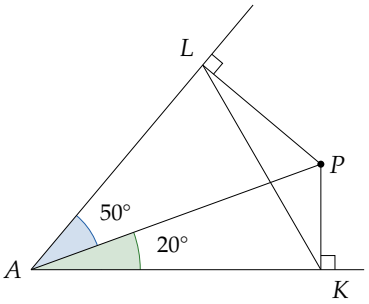
10. Trikampyje ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 80°$; BE – pusiaukampinė ($E \in AC$). Kraštinėje AB pažymėtas taškas D, kad $\angle AED = \angle ABC$.

a) Įrodykite, kad $DE = EC$.

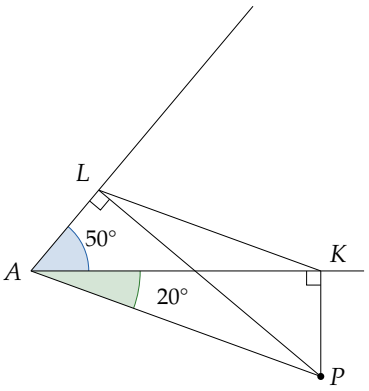
b) Įrodykite, kad $CB = CD$.



11. Kampas su viršūne A lygus $50°$. Iš taško P nuleisti statmenys PK ir PL į kampo kraštines (K ir L – skirtingose kraštinėse), $\angle PAK = 20°$. Raskite $\angle KPL$ ir $\angle AKL$, jei: a) P yra kampo viduje; b) P yra kampo išorėje.



a)

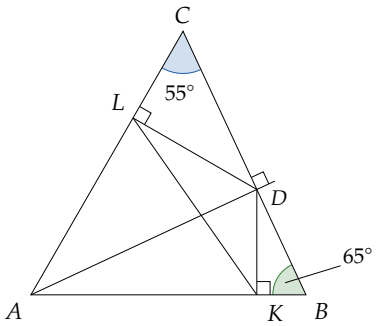


b)

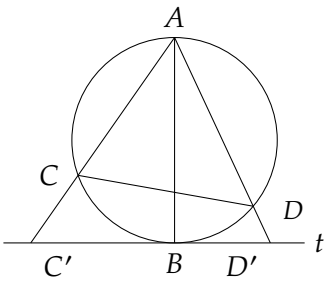
12. Smailiojo trikampio ABC $\angle B = 65°$, $\angle C = 55°$, AD – aukštinė. Iš D nuleisti statmenys DK ir DL į kraštines AB ir AC.

a) Raskite $\angle AKL$ ir $\angle ALK$.

b) Įrodykite, kad B, K, L, C yra viename apskritime.



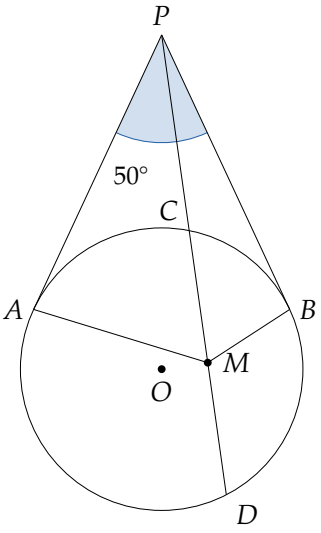
13. AB – apskritimo skersmuo, t – apskritimo liestinė taške B. Taškai C ir D yra apskritime, skirtingose AB pusėse. Tiesės AC ir AD kerta liestinę t taškuose C' ir D'. Įrodykite, kad C, D, D', C' yra viename apskritime.



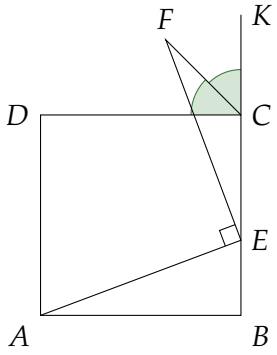
14. Iš taško P nubrėžtos apskritimo (centras O) liestinės PA ir PB, $\angle APB = 50°$. Per P nubrėžta tiesė, neinanti per O, kerta apskritimą taškuose C ir D; M – stygos CD vidurys.

a) Įrodykite, kad taškai O, A, P, B, M yra viename apskritime.

b) Įrodykite, kad MP – kampo AMB pusiaukampinė, ir raskite $\angle AMB$.



15. $ABCD$ – kvadratas, E – kraštinės BC vidinis taškas, K – tiesės BC taškas už C. Tiesė, einanti per E statmenai AE, kerta kampo DCK pusiaukampinę taške F. Įrodykite, kad $AE = EF$.



16. Smailusis trikampis ABC ($\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$) įbrėžtas į apskritimą. Apskritimo liestinės taškuose B ir C kertasi taške P. Per P nubrėžta tiesė, lygiagreti AB, kerta kraštinę AC taške Q.

a) Įrodykite, kad P, B, Q, C yra viename apskritime.

b) Įrodykite, kad $QA = QB$, ir raskite $\angle AQB$.

17. Apskritimai ω_1 (centras O) ir ω_2 kertasi taškuose A ir B. Apskritimo ω_1 taškas C yra už ω_2. Tiesės CA ir CB antrą kartą kerta ω_2 taškuose D ir E (A – tarp C ir D, B – tarp C ir E). Įrodykite, kad $DE \perp OC$.

Grįžtame *5 lapo 14 uždavinys*

18. Apskritimai ω_1 ir ω_2 kertasi taškuose A ir B. Tiesė, einanti per A, antrą kartą kerta ω_1 taške C, o ω_2 – taške D (A – tarp C ir D). Apskritimo ω_1 liestinė taške C ir ω_2 liestinė taške D kertasi taške P (P ir B – skirtingose tiesės CD pusėse).

a) Įrodykite, kad P, C, B, D yra viename apskritime.
b) Raskite $\angle CBD$, jei $\angle CPD = 70°$.

19. Apskritimai ω_1 ir ω_2 kertasi taškuose A ir B. Bendra jų liestinė liečia ω_1 taške P, o ω_2 – taške Q; taškas A yra arčiau tiesės PQ nei B.

a) Įrodykite, kad $\angle PAQ + \angle PBQ = 180°$, ir raskite $\angle PBQ$, jei $\angle PAQ = 110°$.
b) Ar, kai $\angle PAQ = 110°$, taškai P, A, Q, B yra viename apskritime?
c) A' – taško A atspindys tiesės PQ atžvilgiu. Įrodykite, kad P, B, Q, A' yra viename apskritime.

IV. Sunkesni

20. Iš taško P nubrėžtos apskritimo liestinės PA ir PB, $\angle APB = 70°$. Taškas C yra mažesniajame lanke AB. Iš C nuleisti statmenys CK, CM, CN į tieses AB, PA, PB.

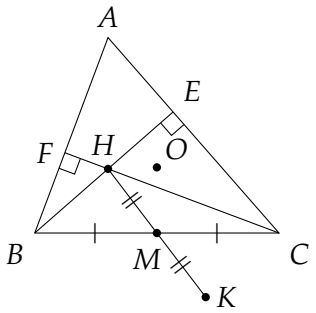
a) Įrodykite, kad $\angle CKM = \angle CNK$ ir $\angle CMK = \angle CKN$.
b) Raskite $\angle MKN$. Ar jis priklauso nuo taško C padėties?

21. Trikampyje ABC $\angle A = 60°$, $\angle B = 80°$. Įbrėžtinis apskritimas (centras I) liečia kraštines AC ir AB taškuose E ir F. Tiesė BI kerta tiesę EF taške K (E – tarp F ir K, I – tarp B ir K).

a) Įrodykite, kad $\angle BKC = 90°$.
b) Raskite $\angle KCB$.

22. Smailiojo trikampio ABC ($AB \neq AC$) aukštinės BE ir CF kertasi taške H, M – kraštinės BC vidurys, O – apibrėžtinio apskritimo centras. Atkarpos HM tęsinyje už M atidėta $MK = HM$.

a) Įrodykite, kad K yra trikampio ABC apibrėžtiniame apskritime.
b) Įrodykite, kad AK – šio apskritimo skersmuo.
c) Įrodykite, kad $AH = 2\,OM$.



23. Apskritimas ω_2 eina per apskritimo ω_1 centrą O ir kerta ω_1 taškuose A ir B. Apskritimo ω_2 taškas C yra už ω_1. Tiesė CA antrą kartą kerta ω_1 taške D (A – tarp C ir D).

a) Raskite $\angle ADB$, jei $\angle ACB = 40°$.
b) Įrodykite, kad $CD = CB$ (kad ir koks būtų $\angle ACB$).
c) Įrodykite, kad $CO \perp BD$.

24. $ABCD$ – kvadratas. Kraštinėse BC ir CD pažymėti vidiniai taškai E ir F, kad $\angle EAF = 45°$. Įstrižainė BD kerta AE taške P, o AF – taške Q.

a) Įrodykite, kad $FP \perp AE$ ir $AP = PF$.
b) Įrodykite, kad E, F, C, P, Q yra viename apskritime.
c) Įrodykite, kad EA – kampo BEF pusiaukampinė.

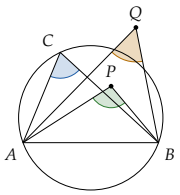
Papildomi uždaviniai (norintiems)

25. Smailusis trikampis ABC įbrėžtas į apskritimą. Taškas P yra lanke BC, kuriame nėra A. Iš P nuleisti statmenys PD, PE, PF į tieses BC, CA, AB. Taškas P parinktas taip, kad D, E būtų kraštinių viduje, o F – kraštinės AB tęsinyje už B. Įrodykite, kad D, E, F yra vienoje tiesėje (*Simsono tiesė*).

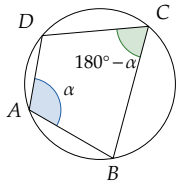
Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

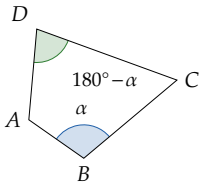
Lema *(taškas ir apskritimas)* A, B, C – apskritime, P ir C – toje pačioje AB pusėje: P viduje $\Rightarrow \angle APB > \angle ACB$, išorėje $\Rightarrow \angle APB < \angle ACB$



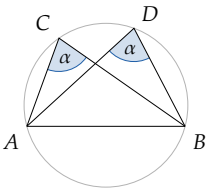
Įrankis 37 *(įbrėžtinis keturkampis)* įbrėžtinio keturkampio priešingų kampų suma 180°: $\angle A + \angle C = 180°$



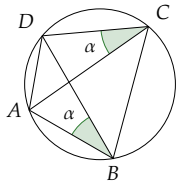
Įrankis 38 *(požymis: suma 180°)* iškilojo keturkampio priešingų kampų suma 180° $\Rightarrow$ jis įbrėžtinis



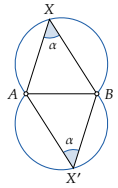
Įrankis 39 *(požymis: lygūs kampai)* C, D toje pačioje AB pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow A, B, C, D$ viename apskritime



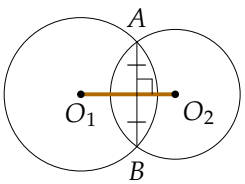
Išvada *(kada keturkampis įbrėžtinis)* iškilasis $ABCD$ įbrėžtinis $\Leftrightarrow \angle A + \angle C = 180° \Leftrightarrow$ priekampis = priešingam vidaus kampui $\Leftrightarrow \angle ABD = \angle ACD$



Taškų aibė *(atkarpa matoma kampu α)* taškai X, kuriems $\angle AXB = \alpha$, – du simetriški lankai per A ir B (be A, B); $\alpha = 90°$ – apskritimas su skersmeniu AB



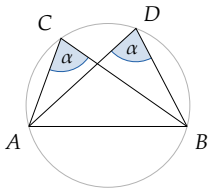
Išvada *(du apskritimai)* liečiasi taške $T \Rightarrow T$ tiesėje O_1O_2; kertasi taškuose $A, B \Rightarrow O_1O_2$ – atkarpos AB vidurio statmuo; bendrųjų išorinių liestinių atkarpos lygios



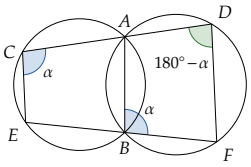
Technikų santrauka

Signalas → veiksmas. Šios technikos padeda rasti sprendimą.

T20 *(Nematomas apskritimas)* du lygūs kampai į tą pačią atkarpą (toje pačioje pusėje) arba priešingų kampų suma 180° → nubrėžk apskritimą ir perkelk kampus.



T21 *(Grandinė per apskritimus)* keli įbrėžtiniai keturkampiai su bendrais taškais → kampą perkelk iš vieno į kitą.



Pratimų atsakymai

Pratimai 1. a) 40°; b) 56°; c) 30°;

Pratimai 4. a) $\angle C = 106°$, $\angle D = 85°$; b) 68°; c) pirmasis – taip; antrasis – ne ($80° + 90° \neq 180°$); d) 20°; e) $\angle C = \angle D = 115°$; taip; f) spindulys 4 cm (trikampis OAB lygiakraštis); g) iš taško, esančio atkarpos AB vidurio statmenyje;

Pratimai 6. c) 70°;

Uždavinių atsakymai

1. 95°.
2. a) 26°; b) 64°.
3. B ir D – skirtingose AC pusėse; $\angle B + \angle D = 140° \neq 180°$, todėl keturkampis neįbrėžtinis.
4. 40°.
5. a) įrodymas; b) 110°.
6. $\angle BED = 40°$, $\angle AED = 70°$.
7. Ne: $\angle ACO = 45°$, $\angle OCB = 135°$.
8. a) įrodymas – lapo gale; b) 40°.
9. $\angle BAD = 80°$; įrodymas – lapo gale.
10. a), b) įrodymai – lapo gale.
11. a) $\angle KPL = 130°$, $\angle AKL = 60°$; b) $\angle KPL = 50°$, $\angle AKL = 20°$.
12. a) $\angle AKL = 55°$, $\angle ALK = 65°$; b) įrodymas – lapo gale.
13. Įrodymas – lapo gale.
14. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle AMB = 130°$ (nepriklauso nuo tiesės).
15. Įrodymas – lapo gale.
16. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle AQB = 80°$.
17. Įrodymas – lapo gale.
18. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle CBD = 110°$.
19. a) $\angle PBQ = 70°$; b) ne; c) įrodymas – lapo gale.
20. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle MKN = 55°$, nepriklauso.
21. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle KCB = 50°$.
22. Įrodymai – lapo gale.

23. a) $\angle ADB = 70^\circ$; b), c) įrodymai – lapo gale.

24. Įrodymai – lapo gale.

25. Įrodymas – lapo gale.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) $\angle ABC$ ir $\angle ADC$ – priešingi įbrėžtinio keturkampio kampai. 2) $\angle ADC$ raskite iš trikampio ACD.

2. 1) Atkarpa AB iš taškų D ir E matoma stačiu kampu (kaip 2 pavyzdyje). 2) A, B, D, E – apskritime su skersmeniu AB: a) $\angle EDA$ perkelkite į $\angle EBA$; b) $\angle CDE$ – keturkampio $ABDE$ priekampis.

3. 1) Kurioje tiesės AC pusėje yra B, o kurioje – D? 2) Požymis „lygūs kampai“ reikalauja, kad viršūnės būtų toje pačioje pusėje; skirtingoms pusėms tikrinama suma $\angle B + \angle D$.

4. 1) Trikampyje APD vienas kampas – tarp liestinės ir stygos, kitas – keturkampio $ABCD$ priekampis. 2) $\angle PAD = \angle ACD$, $\angle ADP = \angle ABC$.

5. 1) Kuris keturkampis įbrėžtinis? Ieškokite jo priekampio prie D. 2) $\angle ADE$ – įbrėžtinio keturkampio $BCED$ priekampis, todėl $\angle ADE = \angle ACB$; palyginkite su $\angle ABC$.

6. 1) Iš B ir iš C atkarpa DE matoma tuo pačiu kampu 20° (T20). 2) Nubrėžkite apskritimą per B, C, E, D; $\angle BED$ perkelkite į $\angle BCD$, o $\angle AED$ – keturkampio $BCED$ priekampis.

7. 1) Atkarpa AB iš C ir iš O matoma stačiu kampu (T18). 2) C ir O – apskritime su skersmeniu AB. Kurioje vietoje lanko yra C ($\angle CAB = 25^\circ < 45^\circ = \angle OAB$)? $\angle ACO$ perkelkite į $\angle ABO$.

8. 1) Keturkampis $ABCE$ įbrėžtinis. Kurie kampai prie D ir prie E lygūs kampui A? 2) $\angle CED = 180^\circ - \angle ABC$ (įbrėžtinis keturkampis), o $\angle CDE = \angle BAD$ ($AB \parallel DC$).

9. 1) Iš A ir iš B atkarpa CD matoma vienodu kampu (T20). 2) $ABCD$ įbrėžtinis: raskite $\angle ABC$, tada kampus prie AC; $\angle ADB$ perkelkite į $\angle ACB$.

10. 1) Kampas prie E lygus kampui prie B – kurio keturkampio priekampis yra $\angle AED$? 2) $DBCE$ įbrėžtinis; BE dalija kampą DBC pusiau – ką tai sako apie stygas DE ir EC? b) dalyje $\angle BDC$ perkelkite į $\angle BEC$.

11. 1) Abiem atvejais atkarpa AP iš K ir iš L matoma stačiu kampu (T18). 2) K ir L – apskritime su skersmeniu AP. Kuriose tiesės AP pusėse jie yra a) ir b) atveju? Nuo to priklauso, ar $\angle KPL = \angle KAL$, ar $\angle KPL + \angle KAL = 180^\circ$. $\angle AKL$ perkelkite į $\angle APL$.

12. 1) Atkarpa AD iš K ir iš L matoma stačiu kampu (T18). 2) $\angle AKL$ perkelkite į $\angle ADL$ ir palyginkite su $\angle C$; b) dalyje $\angle AKL$ – keturkampio $BKLC$ priekampis.

13. 1) Kurie kampai prie C ir prie B statūs? 2) Įrodykite, kad $\angle AC'B = \angle ADC$, ir pasinaudokite priekampiu prie D.

14. 1) Atkarpa OP iš A ir iš B matoma stačiu kampu (T18). O iš M? 2) Apskritime su skersmeniu OP: $PA = PB$ – lygios stygos; $\angle AMB$ ir $\angle APB$ – priešingi keturkampio $AMBP$ kampai.

15. 1) Prie E – statusis kampas į atkarpą AF. Ar yra dar vienas statusis kampas į AF – su viršūne C? 2) Nubrėžkite AC: $\angle ACF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, todėl A, E, C, F – apskritime su skersmeniu AF; perkelkite $\angle AFE$ į $\angle ACE$.

16. 1) Kampas A „atsiranda“ dar dviejose vietose: prie liestinės PB ir prie lygiagrečios tiesės PQ. 2) Atkarpa PC iš taškų B ir Q matoma tuo pačiu kampu; tada $\angle PQB$ perkelkite į $\angle PCB$.

17. 1) Kuri žinoma tiesė statmena spinduliui OC? 2) Nubrėžkite ω_1 liestinę t taške C ir

įrodykite, kad $t \parallel DE$: kampą tarp t ir CA perkelkite į ω_1, o paskui – per keturkampį $ABED$.

18. 1) Dvi liestinės ir dvi stygos CA, DA – kokie kampai „atsiranda“ prie B? 2) Įrodykite, kad $\angle CPD + \angle CBD = 180^\circ$.

19. 1) Palyginkite su 18 uždaviniu: liestinė PQ ir stygos PA, QA – du kampai tarp liestinės ir stygos. 2) b) 18 uždavinyje P ir B buvo skirtingose tiesės CD pusėse. Kuriose tiesės PQ pusėse yra A ir B? c) Atspindys išsaugo kampą: $\angle PA'Q = \angle PAQ$.

20. 1) Atkarpa AC matoma stačiu kampu iš K ir M, atkarpa BC – iš K ir N. 2) Grandinė: $\angle CKM \to$ apskritimas su skersmeniu $AC \to$ liestinė $PA \to$ apskritimas su skersmeniu BC $\to \angle CNK$.

21. 1) Statusis kampas IEC jau yra. Jei K, I, E, C būtų viename apskritime, $\angle IKC$ jam irgi būtų lygus. 2) Palyginkite $\angle KIC$ ir $\angle KEC$: pirmasis – trikampio BIC priekampis, antrasis – kryžminis su $\angle AEF$.

22. 1) Koks keturkampis $BHCK$? Kam lygus $\angle BHC$? 2) a) $\angle BKC = \angle BHC = \angle EHF$, o keturkampyje $AFHE$ du kampai statūs. b) $BK \parallel CH$, o $CH \perp AB$. c) O – skersmens AK vidurys; kokia atkarpa OM trikampyje AHK?

23. 1) O – vieno apskritimo centras, bet kito apskritimo taškas: kampas AOB dalyvauja abiejuose apskritimuose. 2) a) $\angle AOB$ – ir centrinis kampas (ω_1), ir įbrėžtinio keturkampio $OACB$ kampas (ω_2). b) Trikampyje CDB išreikškite du kampus per $\alpha = \angle ACB$. c) Kurie du taškai vienodai nutolę nuo B ir D?

24. 1) Kampas 45° yra ne tik prie A: $\angle BDC = \angle DBC = 45^\circ$. Iš kurių dviejų taškų atkarpa PF matoma 45° kampu? 2) a) A, P, F, D – viename apskritime; taip pat A, B, E, Q. c) $\angle AEB \to \angle AQB$ (apskritimas $ABEQ$) $\to$ keturkampis $EPQF$ (apskritimas su skersmeniu EF).

25. 1) Prie kiekvieno statmens pagrindo – statieji kampai: PC matoma stačiu kampu iš D ir E, PB – iš D ir F. 2) Įrodykite, kad $\angle PDE + \angle PDF = 180^\circ$; jungiamoji grandis – įbrėžtinio keturkampio $ABPC$ priekampis prie B.

Pratimų ir sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

Pratimai 2 a)

Ne. $ACBD$ – įbrėžtinis keturkampis, todėl $\angle ACB + \angle ADB = 180°$ (įbrėžtinio keturkampio kampai); kampai lygūs tik tada, kai abu jie statieji (AB – skersmuo). Teisingas teiginys: C, D skirtingose AB pusėse; A, B, C, D viename apskritime $\Leftrightarrow$ $\angle ACB + \angle ADB = 180°$ ($\Leftarrow$ – kaip požymio „suma 180°“ įrodyme).

Pratimai 2 b)

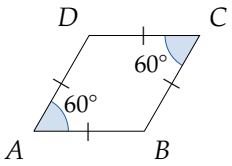
Taip. $\angle A = \angle C$ (lygiagretainio priešingi kampai), $\angle A + \angle C = 180°$ (įbrėžtinio keturkampio kampai), todėl $\angle A = 90°$: lygiagretainis su stačiu kampu – stačiakampis.

Pratimai 2 c)

Taip. Rombas – lygiagretainis, todėl įbrėžtinis rombas – stačiakampis (b teiginys); rombas, kuris yra stačiakampis, – kvadratas.

Pratimai 2 d)

Ne. Lygiagretainis, kuris nėra stačiakampis (pvz., rombas su 60° kampu): $AB \parallel CD$, $AD = BC$, bet jis neįbrėžtinis (b teiginys). Teisingas teiginys: lygiašonė trapecija (kampai prie pagrindo lygūs) įbrėžtinė (Pratimai 4 e).



Pratimai 2 e)

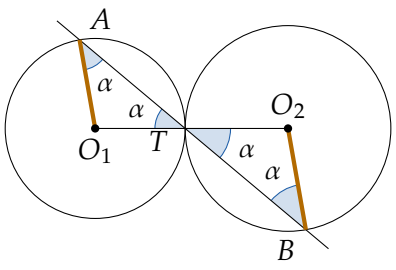
Taip. $\triangle ABC = \triangle ADC$ (trys kraštinės), todėl $\angle B = \angle D$; $\angle B + \angle D = 180°$ (įbrėžtinio keturkampio kampai), todėl $\angle B = \angle D = 90°$.

Pratimai 2 f)

Jei du statieji kampai *priešingi*, keturkampis įbrėžtinis (požymis: suma 180°); du gretimi – ne (tada įbrėžtinis tik stačiakampis). Pvz. stačioji trapecija su kampais $\angle A = \angle D = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 120°$: $\angle A + \angle C = 210° \neq 180°$ – neįbrėžtinė. Pastaba: neiškilasis keturkampis niekada nėra įbrėžtinis (keturi apskritimo taškai sudaro iškilą keturkampį).

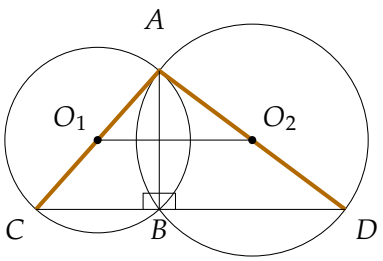
Pratimai 3 a)

1. O_1, T, O_2 – vienoje tiesėje (du apskritimai: (i)), todėl $\angle ATO_1 = \angle BTO_2$ (kryžminiai kampai); pažymėkime juos α.
2. $\angle O_1AT = \alpha$, $\angle O_2BT = \alpha$ (kampai prie pagrindo, $O_1A = O_1T$, $O_2B = O_2T$), todėl $O_1A \parallel O_2B$ (lygiagretumo požymis: vidaus priešiniai kampai).
3. Liestinės taškuose A ir B statmenos lygiagretiems spinduliams O_1A ir O_2B (liestinė statmena spinduliui), todėl lygiagrečios.



Pratimai 3 b)

1. $\angle ABC = \angle ABD = 90°$ (kampas į skersmenį), o per B tiesei AB statmena tiesė – viena, todėl C, B, D – vienoje tiesėje.
2. O_1 ir O_2 – skersmenų AC ir AD viduriai, todėl O_1O_2 – trikampio ACD vidurio linija: $CD = 2\,O_1O_2$ ir $CD \parallel O_1O_2$ (dera su (ii): $AB \perp O_1O_2$).



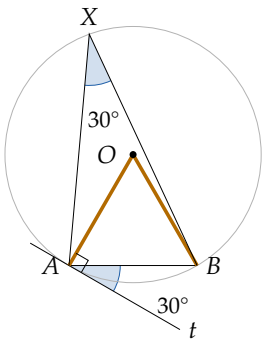
Pratimai 4 e)

1. $\angle D = 180° - \angle A$, $\angle C = 180° - \angle B$ (vidaus vienašaliai kampai, $AB \parallel CD$): $\angle C = \angle D = 115°$.
2. Jei $\angle A = \angle B$, tai $\angle A + \angle C = \angle A + 180° - \angle B = 180°$ – trapecija įbrėžtinė (požymis: suma 180°).
3. Atvirkščiai: jei trapecija įbrėžtinė, $\angle A + \angle C = 180° = \angle B + \angle C$, todėl $\angle A = \angle B$.

Taigi trapecija įbrėžtinė ⇔ ji lygiašonė (lygiašonės trapecijos savybė ir požymis).

Pratimai 4 f)

1. Per A brėžiame tiesę t (jos spindulys AT su spinduliu AB sudaro $\angle TAB = 30°$) ir statmenį jai taške A; jis kerta AB vidurio statmenį taške O.
2. Apskritimas su centru O ir spinduliu $OA = OB$ liečia t (tiesė, statmena spinduliui jo gale, – liestinė), todėl kiekvienam lanko (kitoje AB pusėje nei spindulys AT) taškui X $\angle AXB = 30°$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
3. $\angle OAB = 90° - 30° = 60°$, $OA = OB$, todėl OAB lygiakraštis: spindulys 4 cm.

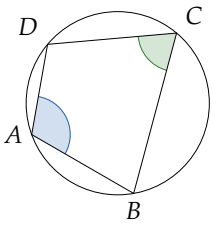


Kitas būdas. Įbrėžtinis kampas 30°, todėl centrinis $\angle AOB = 60°$; $OA = OB$, todėl OAB lygiakraštis. Nubrėžiame lygiakraštį trikampį OAB ir apskritimą su centru O, spinduliu 4 cm; ieškomasis – jo lankas toje pačioje AB pusėje kaip O (didesnysis).

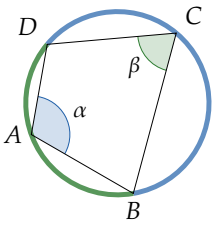
Pratimai 4 g)

1. T – atkarpos AB vidurio statmens ir bėgimo tiesės susikirtimo taškas; ω – apskritimas per A, B, T, O – jo centras. O yra vidurio statmenyje ($OA = OB$), todėl $OT \perp$ bėgimo tiesei, ir ji liečia ω taške T (tiesė, statmena spinduliui jo gale, – liestinė).
2. Kitiems bėgimo tiesės taškams X: $OX > OT$ (statmuo trumpesnis už pasvirąją), todėl X – už ω, toje pačioje AB pusėje kaip T, ir $\angle AXB < \angle ATB$ (lema).

Pratimai 5 a)



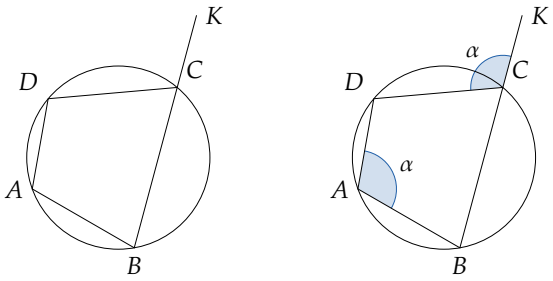
sąlyga



sprendimas

1. Pažymėkime $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$. Tada $\alpha = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$, $\beta = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$ (įbrėžtinis kampas).
2. Lankai BCD ir BAD sudaro visą apskritimą, todėl $\alpha + \beta = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$. Taip pat $\angle B + \angle D = 360° - 180° = 180°$.

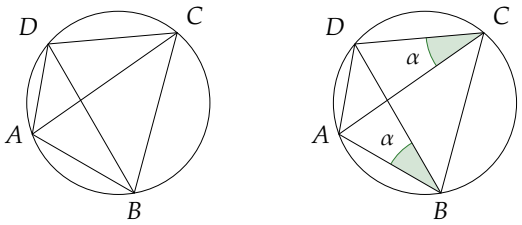
Pratimai 5 b)



sąlyga *sprendimas*

1. $\angle DCK = 180° - \angle C$ (gretutiniai kampai).
2. $\angle DCK = \angle A \Leftrightarrow \angle A + \angle C = 180° \Leftrightarrow ABCD$ įbrėžtinis (įbrėžtinio keturkampio kampai; požymis: suma 180°).

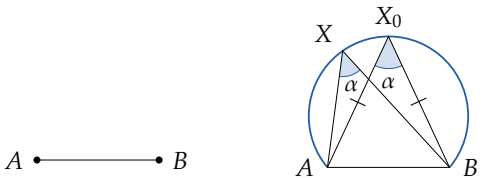
Pratimai 5 c)



sąlyga *sprendimas*

1. Jei $ABCD$ įbrėžtinis, tai $\angle ABD = \angle ACD$ (kampai į tą patį lanką AD).
2. Jei $\angle ABD = \angle ACD$: B ir C – toje pačioje tiesės AD pusėje (keturkampis iškilas), todėl A, D, B, C – viename apskritime (požymis: lygūs kampai).

Pratimai 5 d)

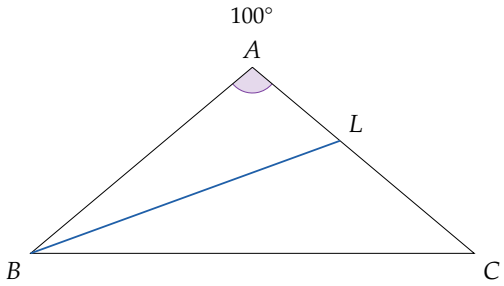


sąlyga *sprendimas*

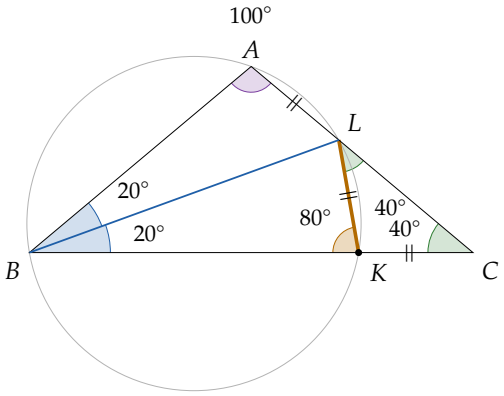
1. Pažymėkime duotąjį kampą α ($0° < \alpha < 180°$). X_0 – toje pačioje AB pusėje esanti lygiašonio trikampio AX_0B su kampu α viršūnėje ($\angle X_0AB = \angle X_0BA = 90° - \frac{\alpha}{2}$) viršūnė.
2. Jei $\angle AXB = \alpha = \angle AX_0B$, tai X – apskritime per A, B, X_0 (požymis: lygūs kampai), t. y. lanke AX_0B.
3. Atvirkščiai, kiekvieno lanko AX_0B taško X kampas $\angle AXB = \angle AX_0B = \alpha$ (kampai į tą patį lanką).

Kitoje tiesės AB pusėje – simetriškas lankas (simetrija AB atžvilgiu kampų nekeičia). Kai $\alpha = 90°$, abu lankai sudaro apskritimą su skersmeniu AB (kampas į skersmenį).

Pratimai 6 a)



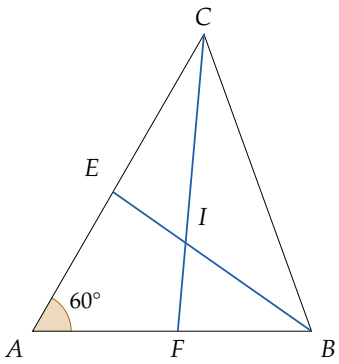
sąlyga



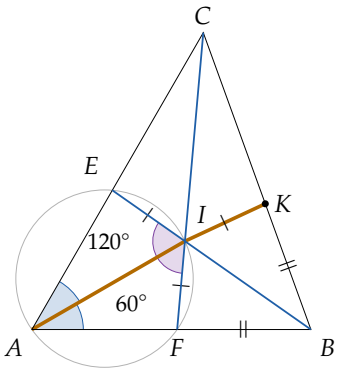
sprendimas

1. $\angle B = \angle C = 40°$, $\angle LBK = 20°$, $BK = BL$, todėl $\angle BKL = 80°$ (kampai prie pagrindo). $\angle A + \angle BKL = 180°$, todėl $ABKL$ įbrėžtinis (požymis: suma 180°).
2. $\angle ABL = \angle LBK$, todėl $AL = LK$ (lygūs įbrėžtiniai kampai – lygios stygos).
3. $\angle LKC = 100°$ (gretutiniai), $\angle KLC = 40° = \angle C$, todėl $KC = KL$ (lygiašonio požymis). $BC = BK + KC = BL + AL$.

Pratimai 6 b)



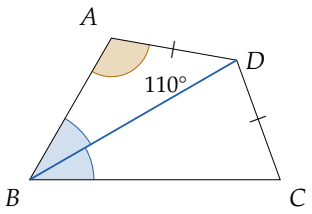
sąlyga



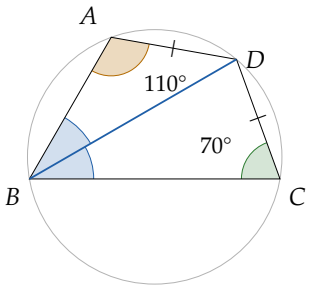
sprendimas

1. Pažymėkime $\angle IBC = \alpha$, $\angle ICB = \beta$. Tada $2\alpha + 2\beta = 120°$, $\angle FIE = \angle BIC = 180° - (\alpha + \beta) = 120°$ (kryžminiai kampai; trikampio kampų suma). $\angle A + \angle FIE = 180°$, todėl $AFIE$ įbrėžtinis (požymis: suma 180°).
2. AI – pusiaukampinė (pusiaukampinės kertasi viename taške), $\angle FAI = \angle IAE$, todėl $IF = IE$ (lygūs įbrėžtiniai kampai – lygios stygos).
3. $BK = BF$ ($K \in BC$): $\triangle BFI = \triangle BKI$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $IK = IF = IE$, $\angle BIK = \angle BIF = 60°$ (gretutiniai su $\angle BIC$).
4. $\angle KIC = 120° - 60° = 60° = \angle EIC$, todėl $\triangle CKI = \triangle CEI$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų): $CK = CE$, $BC = BF + CE$.

Pratimai 6 c)



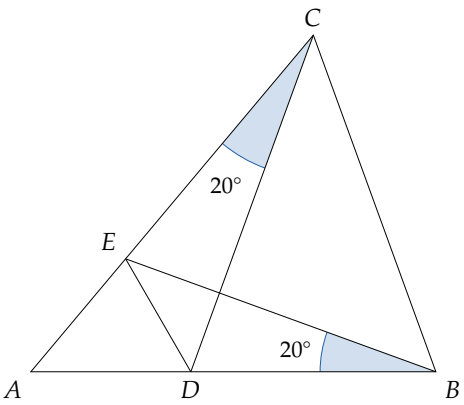
sąlyga



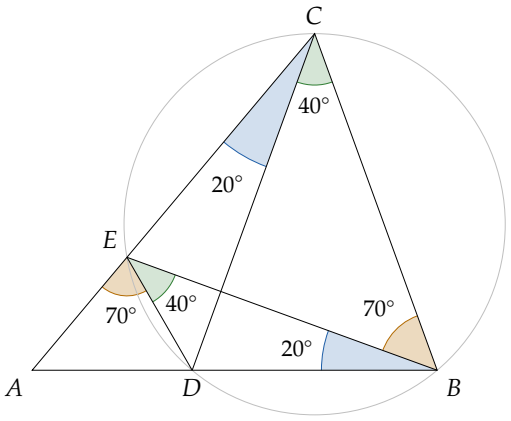
sprendimas

1. ω – apskritimas per A, B, C; tiesė BD jį antrą kartą kerta taške W. $\angle ABW = \angle WBC$, todėl $WA = WC$ (lygūs įbrėžtiniai kampai – lygios stygos).
2. $BA \neq BC$ (kitaip $\triangle ABD = \triangle CBD$ ir $\angle BCD = 110°$ – ne smailusis). Todėl pusiaukampinė ir atkarpos AC vidurio statmuo – skirtingos tiesės; abu taškai D ir W yra jose abiejose: $D = W \in \omega$.
3. $\angle BCD = 180° - 110° = 70°$ (įbrėžtinio keturkampio $ABCD$ kampai).

6 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

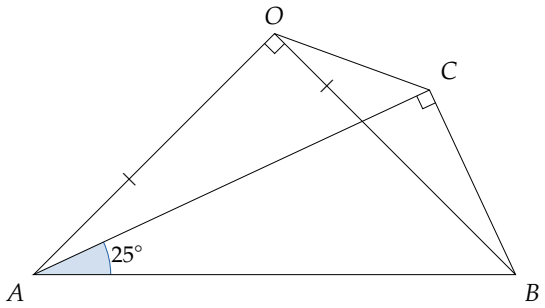
Ką matau. du lygūs kampai į tą pačią atkarpą DE, viršūnės B ir C – toje pačioje jos pusėje.

Idėja (T20). B, C, E, D – viename apskritime; kampus perkeliame per jį.

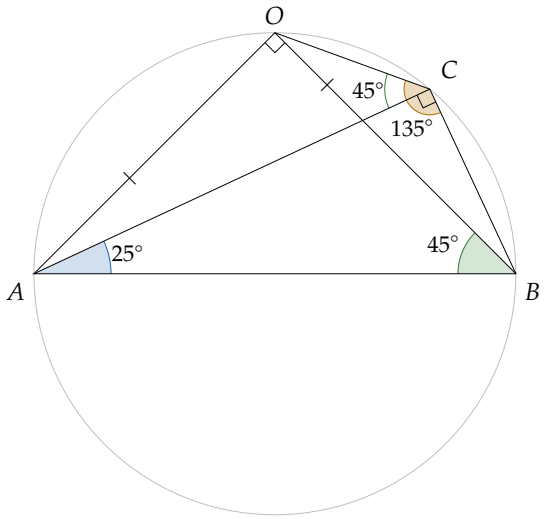
1. $\angle DBE = \angle DCE = 20°$, todėl B, C, E, D – viename apskritime (požymis: lygūs kampai).
2. $\angle BED = \angle BCD = 60° - 20° = 40°$ (kampai į tą patį lanką BD).
3. $\angle AED = \angle ABC = 70°$ (įbrėžtinio keturkampio $BCED$ priekampis).

Pamoka. du lygūs kampai į tą pačią atkarpą – signalas nubrėžti apskritimą, kurio sąlygoje nėra.

7 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

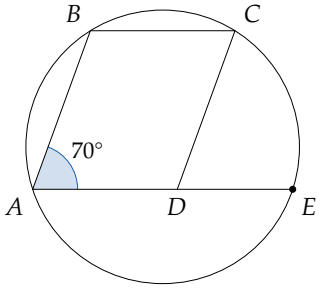
Ką matau. du statieji kampai į atkarpą AB; taškai C ir O – toje pačioje AB pusėje.

Idėja (T18, T20). apskritimas su skersmeniu AB; kampų lygybė priklauso nuo taškų tvarkos jame.

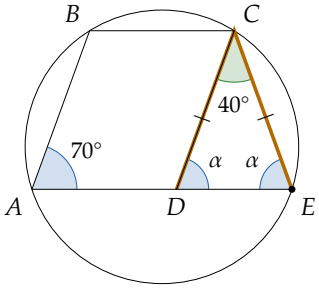
1. $\angle ACB = \angle AOB = 90°$, todėl C ir O – apskritime su skersmeniu AB (kampas į skersmenį).
2. $\angle OAB = \angle OBA = 45°$ (kampai prie pagrindo, $OA = OB$). $\angle CAB = 25° < 45°$, todėl C – lanke OB, $AOCB$ – įbrėžtinis keturkampis.
3. $\angle ACO = \angle ABO = 45°$ (kampai į tą patį lanką AO); $\angle OCB = 180° - \angle OAB = 135°$ (įbrėžtinio keturkampio kampai).
4. $\angle ACO \neq \angle OCB$: CO – ne pusiaukampinė (spindulys CA eina tarp CO ir CB: $45° + 90° = 135°$).

Pamoka. keturi taškai tie patys, bet pasikeitė tvarka – ir lygūs kampai virto kampais, kurių suma 180°. Prieš rašydami lygybę, patikrinkite pusę.

8 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. lygiagretainis ir apskritimas per tris jo viršūnes – įbrėžtinis keturkampis $ABCE$.

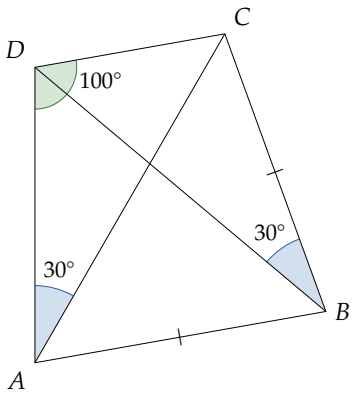
Idėja. kampą A „atnešame“ prie D (lygiagrečios tiesės) ir prie E (įbrėžtinis keturkampis).

1. a) Pažymėkime $\angle BAD = \alpha$; $\alpha = 70°$. $\angle CDE = \alpha$ (atitinkamieji kampai, $AB \parallel DC$).
2. $\angle ABC = 180° - \alpha$ (lygiagretainio gretimų kampų suma), $\angle CED = 180° - \angle ABC = \alpha$ (įbrėžtinio keturkampio $ABCE$ kampai).
3. $\angle CED = \angle CDE$, todėl $CE = CD$ (lygiašonio trikampio požymis).
4. b) $\angle DCE = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$ (trikampio kampų suma).

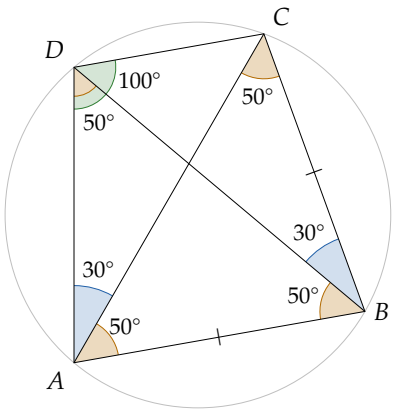
Kitas būdas. $ABCE$ – įbrėžtinė trapecija ($AE \parallel BC$), todėl lygiašonė (Pratimai 4 e): $CE = AB = CD$ (lygiagretainio priešingos kraštinės).

Pamoka. apskritimas per tris lygiagretainio viršūnes tiesėje AD „atkerta“ lygiašonę trapeciją.

9 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

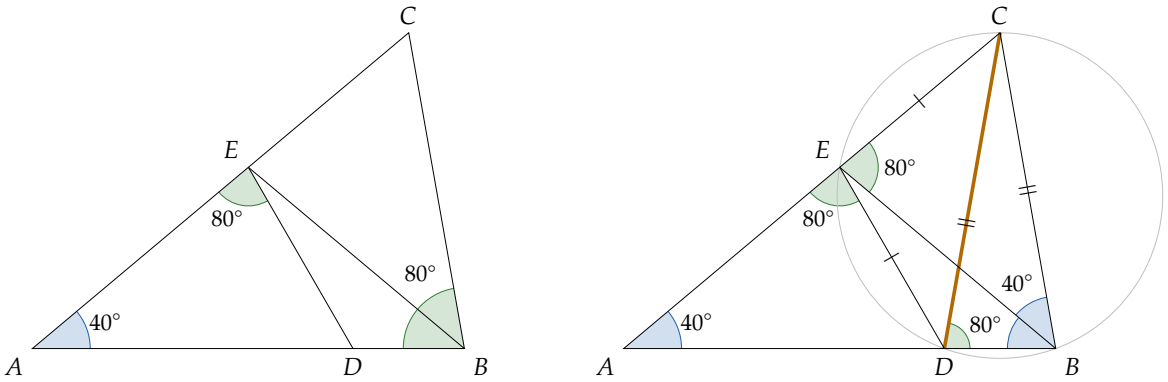
Ką matau. du lygūs kampai į atkarpą CD, viršūnės A ir B – toje pačioje jos pusėje.

Idėja (T20). $ABCD$ įbrėžtinis; kampus perkeliame per apskritimą.

1. $\angle CAD = \angle CBD$, todėl $ABCD$ įbrėžtinis (požymis: lygūs kampai).
2. $\angle ABC = 180° - 100° = 80°$ (įbrėžtinio keturkampio kampai); $\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$ (kampai prie pagrindo, $AB = BC$).
3. $\angle BAD = 50° + 30° = 80°$.
4. $\angle ADB = \angle ACB = 50°$ (kampai į tą patį lanką AB), $\angle ABD = 80° - 30° = 50°$, todėl $AD = AB$ (lygiašonio trikampio požymis).

Pamoka. lygūs kampai į tą pačią atkarpą → įbrėžtinis keturkampis → visi kampai „susijungia“.

10 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

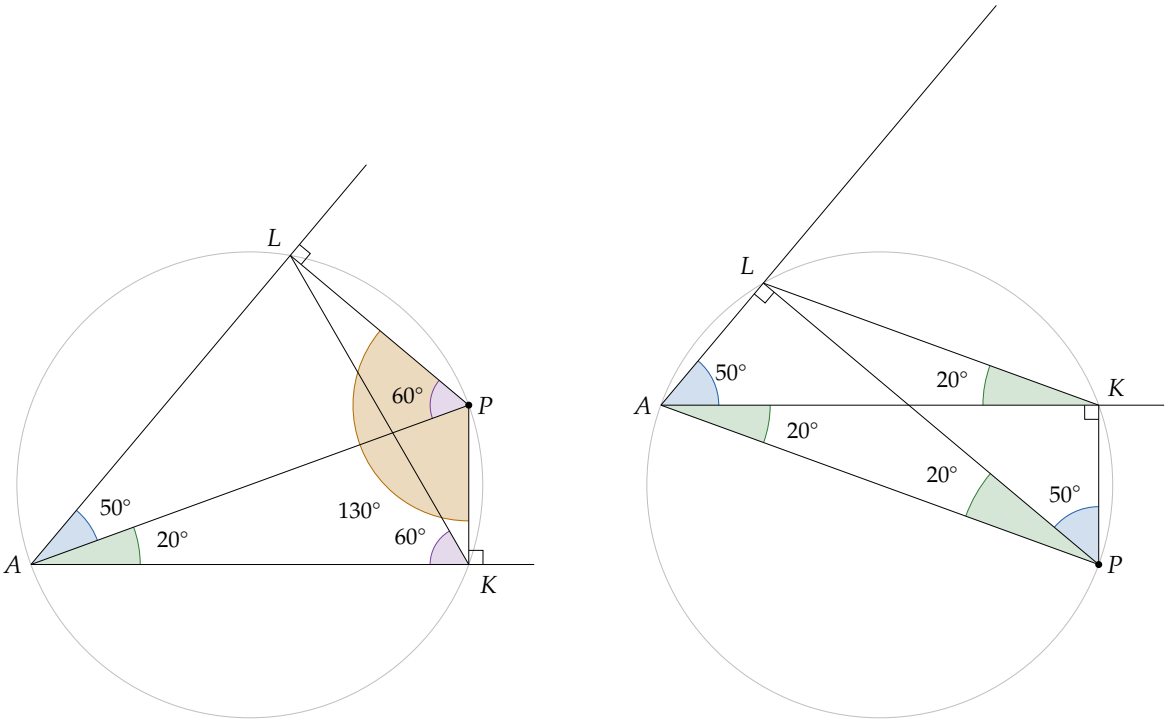
Ką matau. priekampis $\angle AED$ lygus kampui B; pusiaukampinė iš B.

Idėja (T20). $DBCE$ įbrėžtinis; pusiaukampinė iš B duoda lygias stygas.

1. a) Keturkampio $DBCE$ priekampis $\angle AED$ lygus priešingam vidaus kampui $\angle DBC$, todėl $DBCE$ įbrėžtinis (požymis: priekampis).
2. $\angle DBE = \angle EBC = 40°$ (pusiaukampinė), todėl $DE = EC$ (lygūs įbrėžtiniai kampai – lygios stygos).
3. b) $\angle BEC = 40° + 40° = 80°$ (trikampio ABE priekampis).
4. $\angle BDC = \angle BEC = 80° = \angle DBC$ (kampai į tą patį lanką BC), todėl $CB = CD$ (lygiašonio trikampio požymis).

Pamoka. priekampis, lygus priešingam vidaus kampui, – signalas nematomam apskritimui; pusiaukampinė jame duoda lygias stygas.

11 uždavinys.



a) sprendimas *b) sprendimas*

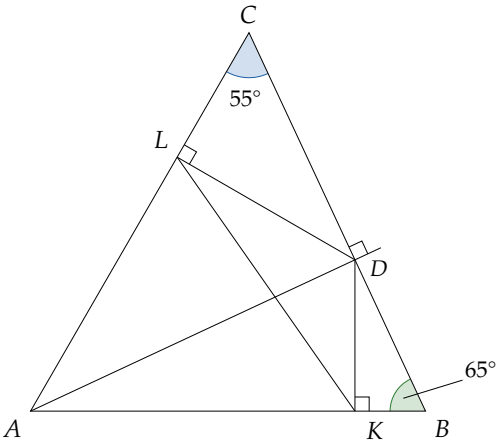
Ką matau. du statieji kampai į atkarpą AP; klausiama apie du taško P atvejus.

Idėja (T18). apskritimas su skersmeniu AP; tikriname, kuriose AP pusėse yra K ir L.

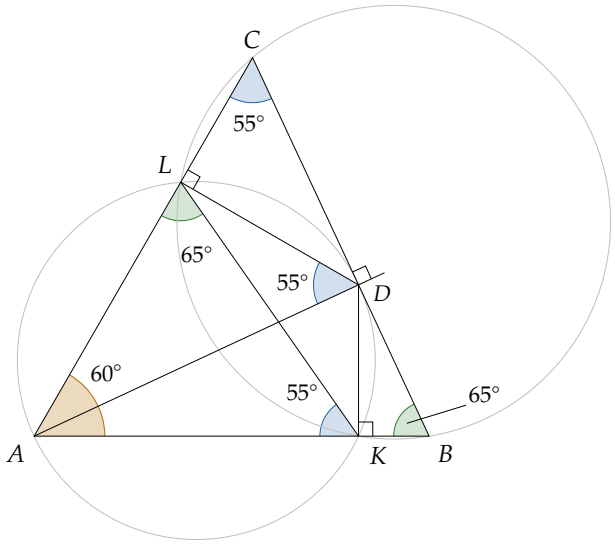
1. $\angle AKP = \angle ALP = 90°$, todėl K ir L – apskritime su skersmeniu AP (kampas į skersmenį).
2. a) K ir L – skirtingose AP pusėse, $AKPL$ – įbrėžtinis keturkampis: $\angle KPL = 180° - 50° = 130°$ (įbrėžtinio keturkampio kampai).
3. $\angle PAL = 50° - 20° = 30°$; $\angle AKL = \angle APL = 90° - 30° = 60°$ (kampai į tą patį lanką AL; stačiojo trikampio APL smailieji kampai).
4. b) K ir L – toje pačioje AP pusėje, o A ir P – toje pačioje KL pusėje: $\angle KPL = \angle KAL = 50°$ (kampai į tą patį lanką KL).
5. $\angle PAL = 20° + 50° = 70°$; $\angle AKL = \angle APL = 90° - 70° = 20°$ (kampai į tą patį lanką AL; stačiojo trikampio APL smailieji kampai).

Pamoka. tas pats apskritimas, kita taškų tvarka: viršūnės toje pačioje pusėje – kampai lygūs, skirtingose – suma 180°.

12 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

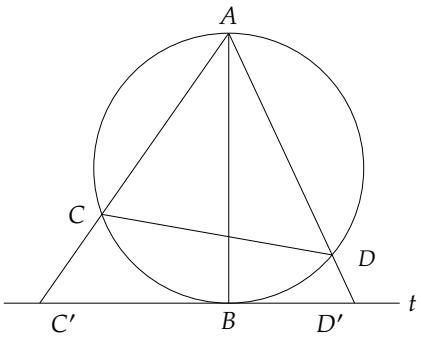
Ką matau. statieji kampai prie K ir L remiasi į atkarpą AD.

Idėja (T20, T21). du apskritimai: kampą C per apskritimą $AKDL$ atnešame į K, o tada jis rodo antrąjį apskritimą $BKLC$.

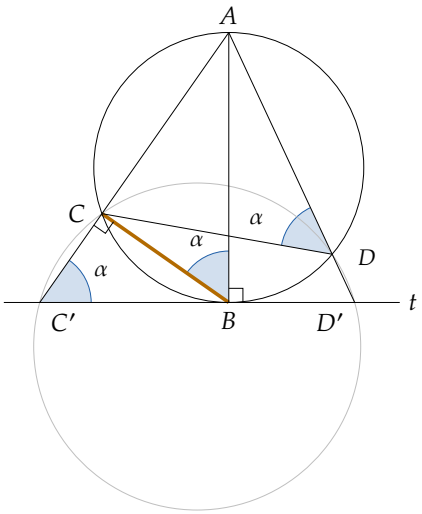
1. $\angle AKD = \angle ALD = 90°$, todėl K ir L – apskritime su skersmeniu AD (kampas į skersmenį).
2. a) $\angle AKL = \angle ADL = 90° - \angle DAC = \angle C = 55°$ (kampai į tą patį lanką AL; stačiųjų trikampių ADL ir ADC smailieji kampai).
3. $\angle A = 180° - 65° - 55° = 60°$, $\angle ALK = 180° - 60° - 55° = 65°$ (trikampio kampų suma).
4. b) Keturkampio $BKLC$ priekampis $\angle AKL$ lygus priešingam vidaus kampui $\angle C$, todėl $BKLC$ įbrėžtinis (požymis: priekampis).

Pamoka. kampas, atneštas per vieną nematomą apskritimą, gali parodyti kitą (T21).

13 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

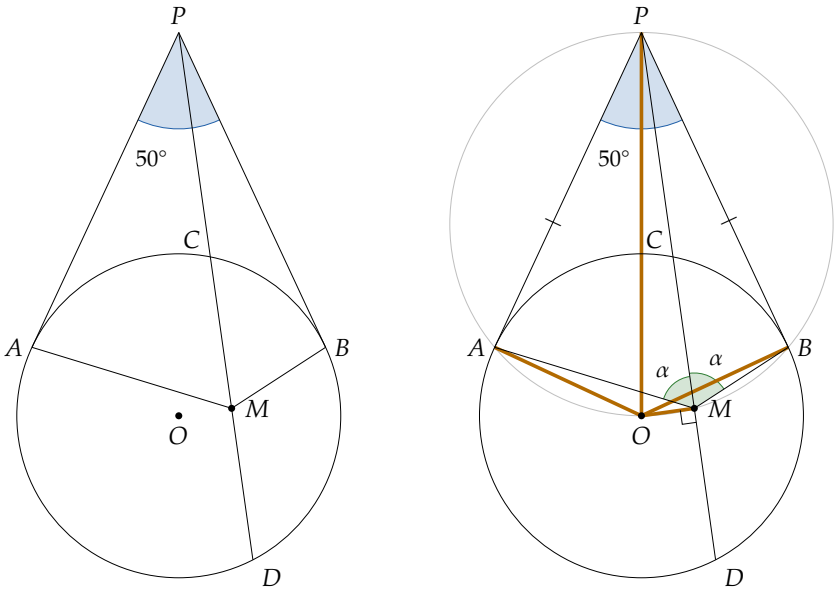
Ką matau. skersmuo ir liestinė jo gale – du statieji kampai; reikia įrodyti, kad keturi taškai viename apskritime.

Idėja (T20). kampą prie C' per stačiuosius trikampius ir lanką AC atnešame į D; tada tinka požymis „priekampis“.

1. $\angle ACB = 90°$ (kampas į skersmenį), $\angle ABC' = 90°$ (liestinė statmena spinduliui).
2. Pažymėkime $\angle AC'B = \alpha$; $\alpha = 90° - \angle BAC = \angle ABC$ (stačiųjų trikampių ABC' ir ACB smailieji kampai).
3. $\angle ADC = \angle ABC = \alpha$ (kampai į tą patį lanką AC).
4. Keturkampio $CDD'C'$ priekampis $\angle ADC$ lygus priešingam vidaus kampui $\angle CC'D' = \alpha$, todėl $CDD'C'$ įbrėžtinis (požymis: priekampis).

Pamoka. skersmuo + liestinė jo gale duoda du stačiuosius trikampius su bendru smailiuoju kampu – iš jų lengva „atnešti“ kampą.

14 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

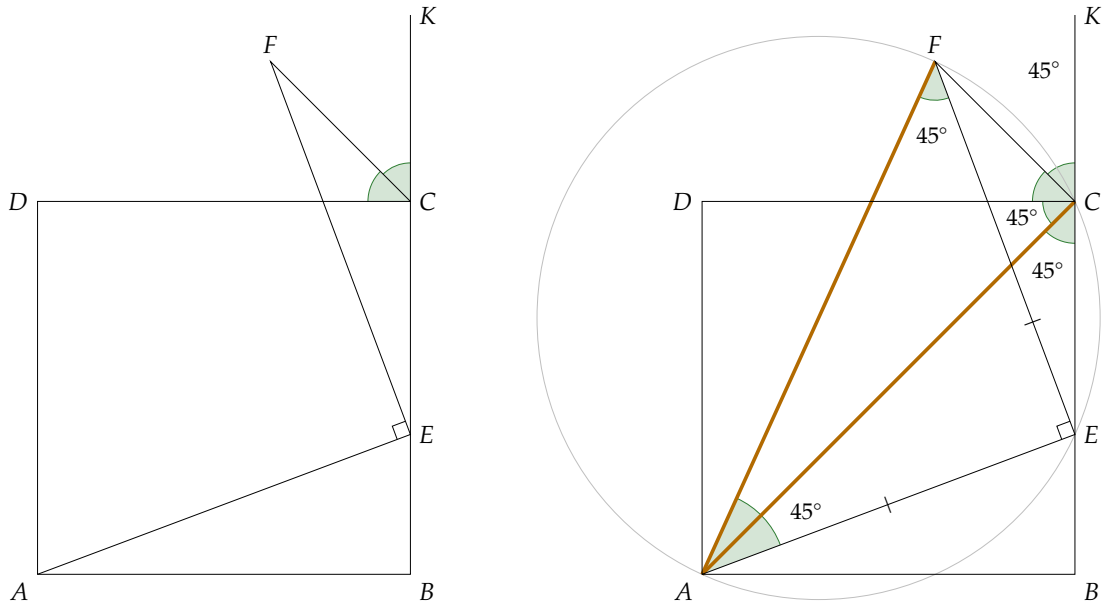
Ką matau. trys statieji kampai į atkarpą OP: prie A, B ir M.

Idėja (T18). penki taškai apskritime su skersmeniu OP; jame PA ir PB – lygios stygos.

1. a) $\angle OAP = \angle OBP = 90°$ (liestinė statmena spinduliui), $\angle OMP = 90°$ (atkarpa iš centro į stygos vidurį statmena stygai), todėl A, B, M – apskritime su skersmeniu OP (kampas į skersmenį).
2. b) $PA = PB$ (liestinių atkarpos) – lygios apskritimo su skersmeniu OP stygos, todėl $\angle AMP = \angle BMP$ (lygios stygos – lygūs įbrėžtiniai kampai); pažymėkime juos α. MP – pusiaukampinė.
3. $\angle AMB = 180° - 50° = 130°$ (įbrėžtinio keturkampio $AMBP$ kampai).

Pamoka. atkarpa iš centro į stygos vidurį – dar vienas statusis kampas; keli statieji kampai į tą pačią atkarpą sudeda taškus į vieną apskritimą.

15 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

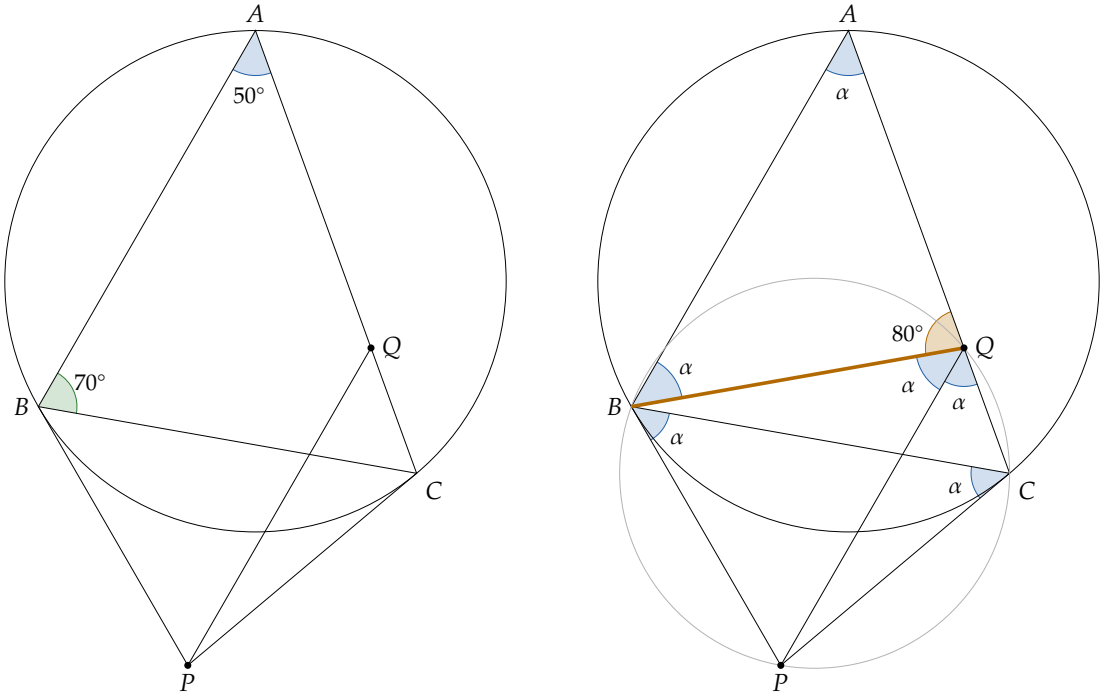
Ką matau. statusis kampas prie E; kvadrato įstrižainė ir pusiaukampinė duoda 45° kampus prie C.

Idėja (T18). dar vienas statusis kampas į atkarpą AF – prie C; kampą prie F perkeliame į C.

1. $\angle ACD = \angle ACB = 45°$ (ABC ir ADC – statieji lygiašoniai trikampiai), $\angle DCF = 45°$ (pusiaukampinė), todėl $\angle ACF = 90°$.
2. $\angle AEF = \angle ACF = 90°$, todėl E ir C – apskritime su skersmeniu AF (kampas į skersmenį).
3. $\angle AFE = \angle ACE = 45°$ (kampai į tą patį lanką AE), todėl $\angle EAF = 90° - 45° = 45° = \angle AFE$ ir $AE = EF$ (lygiašonio trikampio požymis).

Pamoka. lygias atkarpas įrodome per lygius kampus, o kampus „atneša“ nematomas apskritimas.

16 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

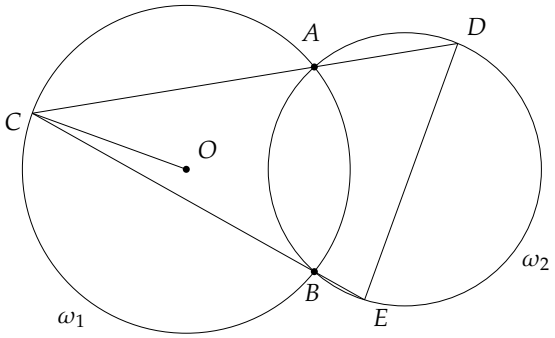
Ką matau. liestinės iš taško P ir tiesė, lygiagreti AB: kampas A kartojasi.

Idėja (T20). $\angle PBC = \angle PQC$ – taškai P, B, Q, C viename apskritime; jame kampą PQB perkeliame į PCB.

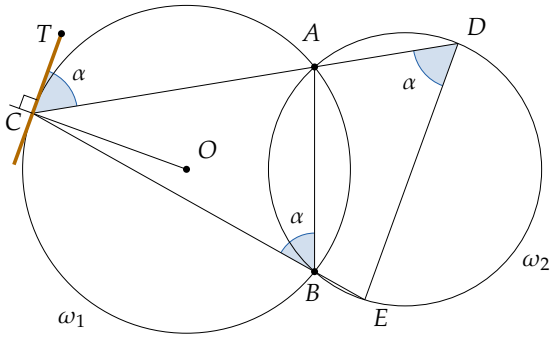
1. a) Pažymėkime $\angle BAC = \alpha$; $\alpha = 50°$. $\angle PBC = \angle PCB = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
2. $\angle PQC = \alpha$ (atitinkamieji kampai, $PQ \parallel AB$), todėl P, B, Q, C – viename apskritime (požymis: lygūs kampai).
3. b) $\angle PQB = \angle PCB = \alpha$ (kampai į tą patį lanką PB); $\angle QBA = \angle PQB = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai, $PQ \parallel AB$). $\angle QBA = \angle QAB$, todėl $QA = QB$ (lygiašonio trikampio požymis).
4. $\angle AQB = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. lygiagreti tiesė perkelia kampą, o nematomas apskritimas – jį „atneša“ ten, kur reikia.

17 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

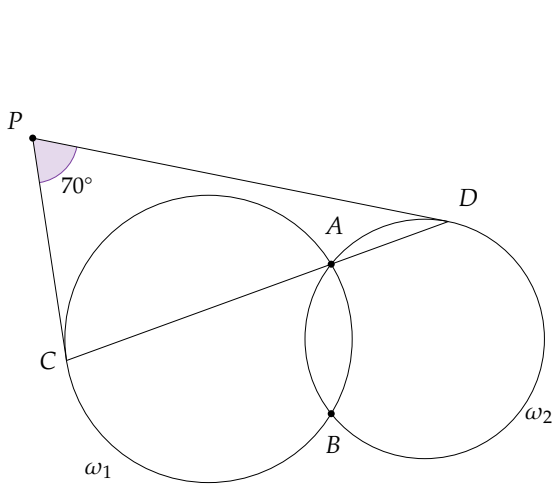
Ką matau. reikia statmenumo spinduliui OC – toks yra liestinė taške C.

Idėja (T19, T20). liestinė t taške C; kampą tarp t ir CA perkeliame į $\angle CBA$, paskui – per įbrėžtinį keturkampį $ABED$ į $\angle ADE$.

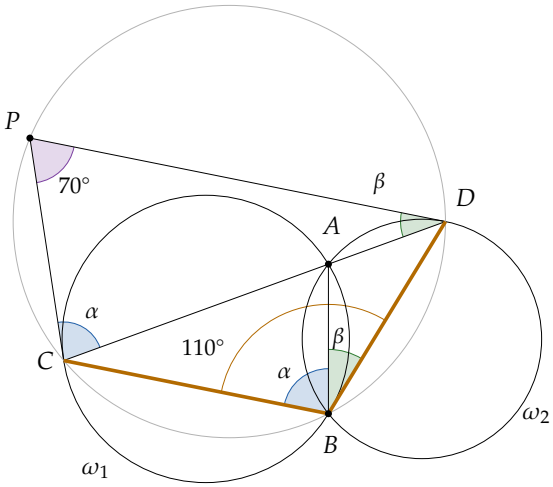
1. $t - \omega_1$ liestinė taške C, $T \in t$ – kitoje tiesės CD pusėje nei E. Pažymėkime $\angle ACT = \alpha$; $\angle CBA = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
2. $\angle CBA$ – įbrėžtinio keturkampio $ABED$ priekampis, todėl $\angle ADE = \alpha$ (priekampis lygus priešingam vidaus kampui).
3. $\angle TCD = \angle CDE = \alpha$, todėl $t \parallel DE$ (lygiagretumo požymis: vidaus priešiniai kampai).
4. $t \perp OC$ (liestinė statmena spinduliui), todėl $DE \perp OC$.

Pamoka. statmenumą spinduliui gauname per liestinę: įrodome, kad tiesė lygiagreti liestinei. 5 lapo 14 uždavinys – panašus atvejis (ten antrasis apskritimas buvo su skersmeniu BC).

18 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

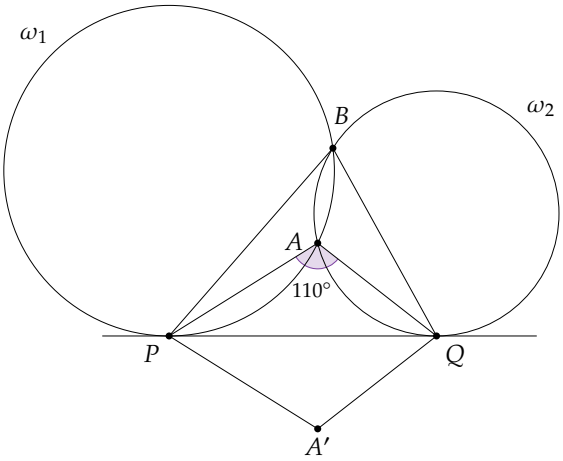
Ką matau. dvi liestinės ir dvi stygos iš taško A.

Idėja (T19, T20). kampai tarp liestinių ir stygų „susirenka“ prie B; priešingų kampų suma 180°.

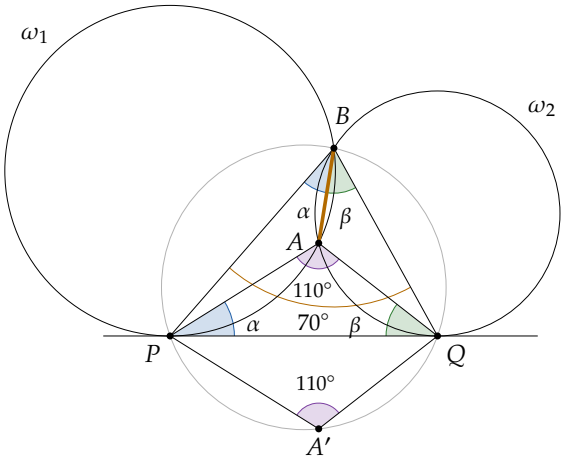
1. a) Pažymėkime $\angle PCA = \alpha$, $\angle PDA = \beta$. Tada $\angle CBA = \alpha$, $\angle DBA = \beta$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
2. $\angle CBD = \alpha + \beta$, $\angle CPD = 180° - \alpha - \beta$ (trikampio PCD kampų suma).
3. $\angle CPD + \angle CBD = 180°$, P ir B – skirtingose CD pusėse, todėl $PCBD$ įbrėžtinis (požymis: suma 180°).
4. b) $\angle CBD = 180° - 70° = 110°$.

Pamoka. du kampai tarp liestinės ir stygos – jų suma ir trikampio kampų suma duoda priešingų kampų sumą 180°.

19 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

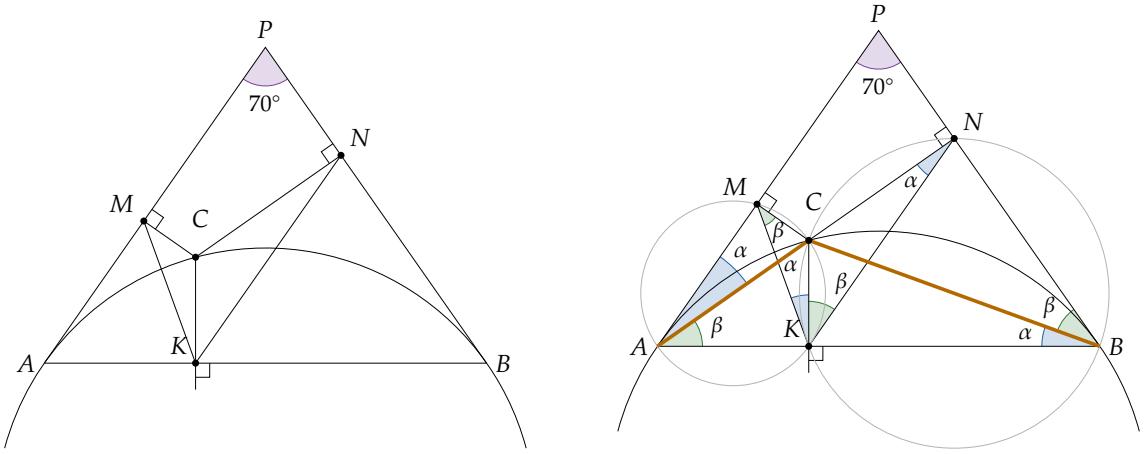
Ką matau. bendra liestinė ir stygos iš jos lietimosi taškų – kaip 18 uždavinyje, bet A ir B – toje pačioje tiesės PQ pusėje.

Idėja (T19). du kampai tarp liestinės ir stygos; prieš rašydami „įbrėžtinis“ patikriname pusę.

1. a) Pažymėkime $\angle QPA = \alpha$, $\angle PQA = \beta$. Tada $\angle PBA = \alpha$, $\angle QBA = \beta$ (kampas tarp liestinės ir stygos, ω_1 ir ω_2).
2. $\angle PBQ = \alpha + \beta$, $\angle PAQ = 180° - \alpha - \beta$ (trikampio PAQ kampų suma), todėl suma 180°; $\angle PBQ = 180° - 110° = 70°$.
3. b) Ne: A ir B – toje pačioje tiesės PQ pusėje; jei jie būtų viename apskritime su P, Q, kampai PAQ ir PBQ būtų lygūs (kampai į tą patį lanką), o $110° \neq 70°$.
4. c) $\angle PA'Q = \angle PAQ$ (atspindys), todėl $\angle PA'Q + \angle PBQ = 180°$; A' ir B – skirtingose PQ pusėse, todėl $PBQA'$ įbrėžtinis (požymis: suma 180°).

Pamoka. suma 180° reiškia įbrėžtinį keturkampį tik tada, kai viršūnės yra skirtingose atkarpos pusėse (kaip 18 uždavinyje); toje pačioje pusėje reikia lygių kampų.

20 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

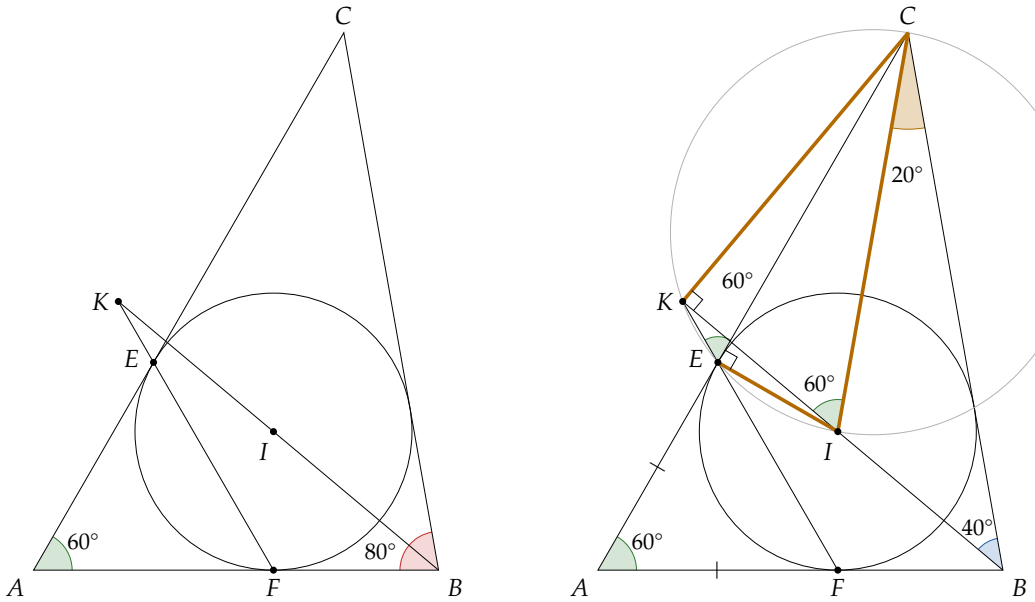
Ką matau. trys statmenys iš C – daug stačiųjų kampų; liestinės PA ir PB.

Idėja (T21). du nematomi apskritimai (skersmenys AC ir BC), juos jungia kampas tarp liestinės ir stygos.

1. a) $\angle AKC = \angle AMC = 90°$, todėl K, M – apskritime su skersmeniu AC; taip pat K, N – apskritime su skersmeniu BC (kampas į skersmenį).
2. Pažymėkime $\angle CKM = \alpha$. Tada $\angle CAM = \alpha$ (kampai į lanką CM), $\angle CBA = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos) $= \angle CNK$ (kampai į lanką CK).
3. Pažymėkime $\angle CMK = \beta$. Tada $\angle CAB = \beta$ (kampai į lanką CK), $\angle CBN = \beta$ (kampas tarp liestinės ir stygos) $= \angle CKN$ (kampai į lanką CN).
4. b) $\angle MKN = \alpha + \beta = \angle CAM + \angle CAB = \angle PAB = \frac{1}{2}(180° - 70°) = 55°$ ($PA = PB$ – liestinių atkarpos; kampai prie pagrindo). Taško C padėtis nenaudota – atsakymas nuo jos nepriklauso.

Pamoka. kampas keliauja grandine: apskritimas → liestinė → kitas apskritimas (T21).

21 uždavinys.



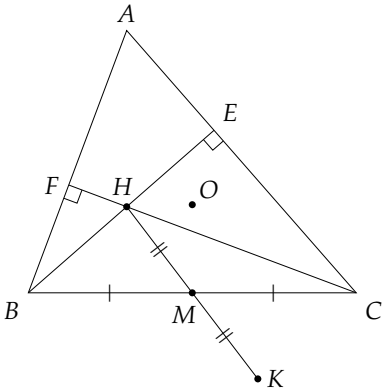
Ką matau. statusis kampas IEC (liestinė ir spindulys) ir du 60° kampai prie E ir I.

Idėja (T20). $\angle KIC = \angle KEC$ – taškai K, I, E, C viename apskritime; statųjį kampą IEC perkeliame į IKC.

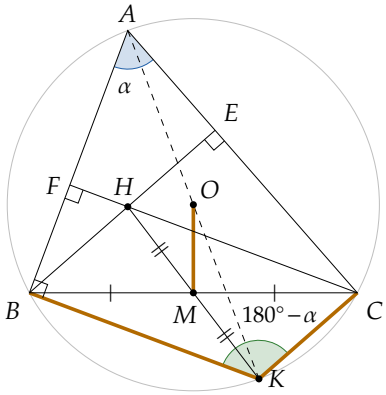
1. a) $AE = AF$ (liestinių atkarpos), $\angle A = 60°$, todėl $\angle AEF = 60°$ (kampai prie pagrindo); $\angle KEC = \angle AEF = 60°$ (kryžminiai kampai).
2. $\angle KIC = \angle IBC + \angle ICB = 40° + 20° = 60°$ (trikampio BIC priekampis; BI, CI – pusiaukampinės).
3. $\angle KIC = \angle KEC$, I ir E – toje pačioje tiesės KC pusėje, todėl K, I, E, C – viename apskritime (požymis: lygūs kampai).
4. $\angle IKC = \angle IEC = 90°$ (kampai į tą patį lanką IC; liestinė statmena spinduliui), t. y. $\angle BKC = 90°$.
5. b) $\angle KCB = 90° - 40° = 50°$ (stačiojo trikampio BKC smailiųjų kampų suma).

Pamoka. statusis kampas, kurio sąlygoje „nematyti“, atkeliauja nematomu apskritimu. $\angle BKC = 90°$ bet kuriame trikampyje, bet jei taškai išsidėstytų kita tvarka, kampų lygybė būtų kita.

22 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

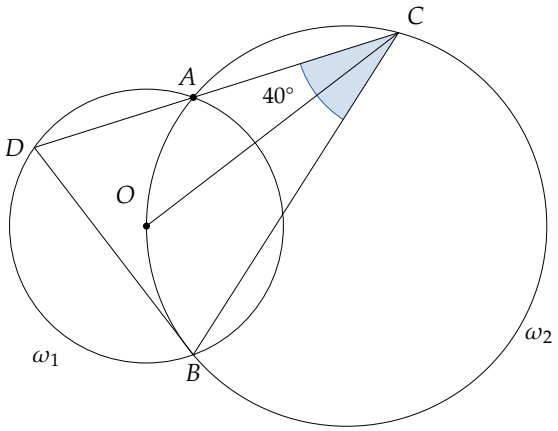
Ką matau. kraštinės vidurys M ir atkarpa, pratęsta dvigubai (T6); aukštinės – statieji kampai.

Idėja (T6, T20, T8). $BHCK$ – lygiagretainis; jo kampas K papildo $\angle A$ iki 180°.

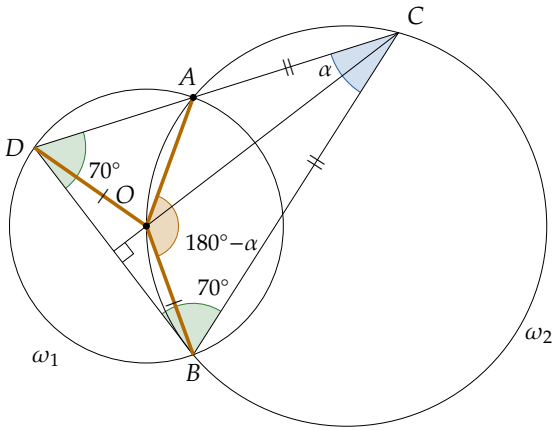
1. a) $BM = MC$, $HM = MK$, todėl $BHCK$ – lygiagretainis (požymis: įstrižainės dalija viena kitą pusiau).
2. Pažymėkime $\angle BAC = \alpha$. $\angle EHF = 360° - 90° - 90° - \alpha = 180° - \alpha$ (keturkampio $AFHE$ kampų suma); $\angle BKC = \angle BHC = \angle EHF$ (lygiagretainio priešingi kampai; kryžminiai kampai).
3. $\angle BAC + \angle BKC = 180°$, A ir K – skirtingose BC pusėse, todėl $ABKC$ įbrėžtinis (požymis: suma 180°): K – apibrėžtiniame apskritime.
4. b) $BK \parallel CH$ (lygiagretainis), $CH \perp AB$, todėl $\angle ABK = 90°$ ir AK – skersmuo (kampas į skersmenį).
5. c) O – skersmens AK vidurys, M – atkarpos HK vidurys, todėl OM – trikampio AHK vidurio linija: $AH = 2\,OM$.

Pamoka. taško H atspindys kraštinės BC vidurio atžvilgiu – kitas skersmens, einančio per A, galas; todėl $OM = \frac{1}{2}AH$.

23 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

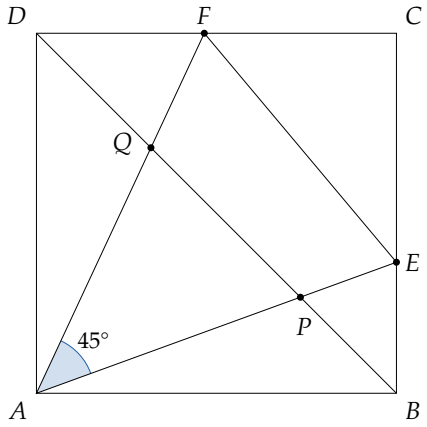
Ką matau. O – ω_1 centras ir kartu ω_2 taškas.

Idėja (T21). $\angle AOB$ – grandis tarp dviejų apskritimų: įbrėžtinio keturkampio $OACB$ kampas ir centrinis ω_1 kampas.

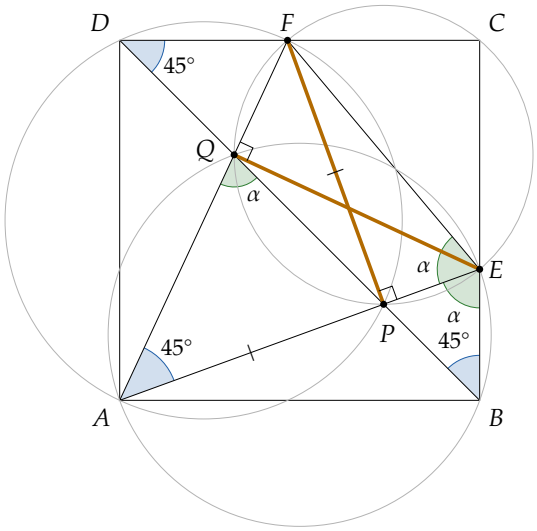
1. a) Pažymėkime $\angle ACB = \alpha$. $\angle AOB = 180° - \alpha$ (įbrėžtinio keturkampio $OACB$ kampai, ω_2).
2. $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - \frac{\alpha}{2} = 70°$ (įbrėžtinis kampas, ω_1).
3. b) $\angle CBD = 180° - \alpha - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha}{2} = \angle CDB$ (trikampio CDB kampų suma), todėl $CD = CB$ (lygiašonio trikampio požymis).
4. c) $CD = CB$ ir $OD = OB$ (ω_1 spinduliai): C ir O – atkarpos BD vidurio statmenyje, todėl $CO \perp BD$.

Pamoka. taškas, kuris vieno apskritimo centras, o kito – taškas, sujungia centrinį kampą su įbrėžtinio keturkampio kampu.

24 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

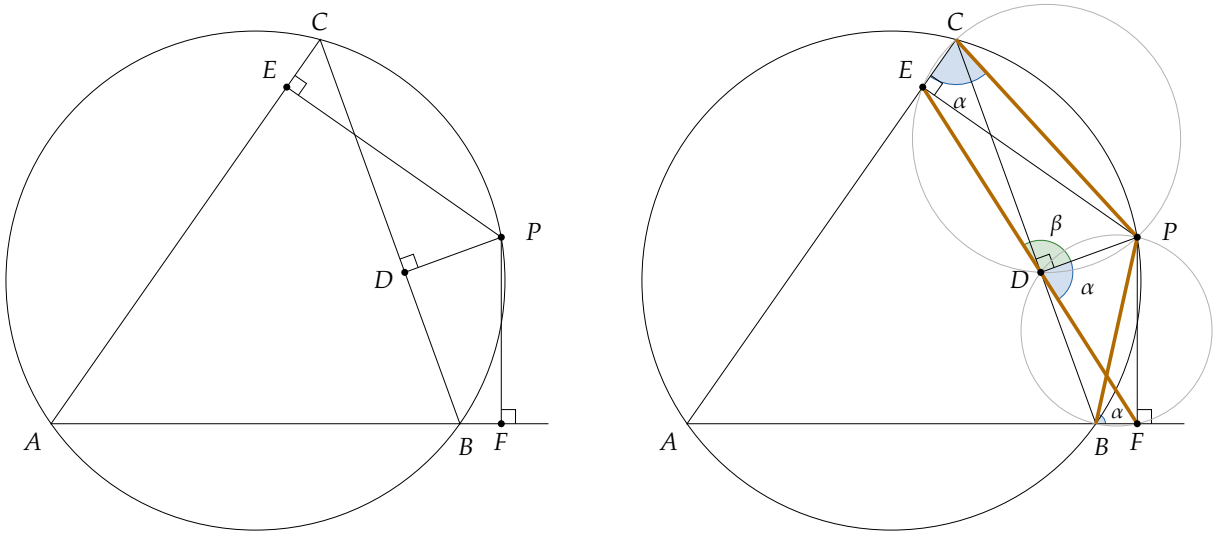
Ką matau. kampas 45° prie A ir tokie pat kampai, kuriuos įstrižainė BD sudaro su kraštinėmis.

Idėja (T20, T21). du nematomi apskritimai ($APFD$ ir $ABEQ$), paskui trečiasis – su skersmeniu EF.

1. a) $\angle PDF = 45° = \angle PAF$ (statusis lygiašonis trikampis BCD), todėl A, P, F, D – viename apskritime (požymis: lygūs kampai).
2. $\angle APF = 180° - \angle ADF = 90°$ (įbrėžtinio keturkampio kampai); $\angle AFP = 90° - 45° = 45° = \angle PAF$, todėl $AP = PF$ (lygiašonio trikampio požymis).
3. Taip pat $\angle QAE = \angle QBE = 45°$: A, B, E, Q – viename apskritime, $\angle AQE = 180° - \angle ABE = 90°$.
4. b) $\angle EPF = \angle EQF = \angle ECF = 90°$, todėl P, Q, C – apskritime su skersmeniu EF (kampas į skersmenį).
5. c) Pažymėkime $\angle AEB = \alpha$; $\angle AQB = \alpha$ (kampai į lanką AB, apskritimas $ABEQ$); Q – atkarpoje AF, P – atkarpoje BQ, todėl $\angle PEF = \angle AQP = \alpha$ (įbrėžtinio keturkampio $EPQF$ priekampis), t. y. $\angle AEF = \angle AEB$.

Pamoka. kampas 45° kvadrate kartojasi prie įstrižainės – iš to trys nematomi apskritimai ir grandinė per du iš jų.

25 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

Ką matau. trys statmenys iš P – statieji kampai; įbrėžtinis keturkampis $ABPC$.

Idėja (T20, T21). du nematomi apskritimai (skersmenys PC ir PB) ir pradinis apskritimas: įrodome, kad kampai prie D sudaro $180°$.

1. $\angle PDC = \angle PEC = 90°$, todėl D, E – apskritime su skersmeniu PC (kampas į skersmenį); pažymėkime $\angle PCA = \alpha$ ir $\angle PDE = \beta$; $\beta = 180° - \angle PCE = 180° - \alpha$ (įbrėžtinio keturkampio $PDEC$ kampai).
2. $\angle PDB = \angle PFB = 90°$, todėl D, F – apskritime su skersmeniu PB: $\angle PDF = \angle PBF$ (kampai į lanką PF).
3. $\angle PBF = \angle PCA = \alpha$ (įbrėžtinio keturkampio $ABPC$ priekampis lygus priešingam vidaus kampui).
4. $\angle PDE + \angle PDF = (180° - \alpha) + \alpha = 180°$, todėl D, E, F – vienoje tiesėje.

Pamoka. trys taškai vienoje tiesėje $\Leftrightarrow$ kampai prie vidurinio taško sudaro $180°$; kampus „atneša“ du nematomi apskritimai.