Geometrija

Lapas 5. Kampų metodas II: kampai apskritime

9 klasė

Apšilimas (5 min.)

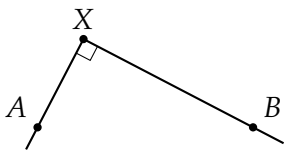
Pratimai 1. Prisiminkite ankstesnius lapus (atsakymai – lapo gale).

a) Statusis trikampis ABC: $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 9$ cm. Raskite AB.

b) Iš taško P nubrėžtos apskritimo su centru O liestinės PA ir PB, $\angle APB = 70°$. Raskite $\angle APO$.

c) Dvi trikampio kraštinės lygios 4 cm ir 9 cm. Kuri iš reikšmių 4, 5, 9, 13 cm gali būti trečioji kraštinė?

Klausimas pradžiai. Į lentą įkaltos dvi vinutės A ir B. Stačiakampio lapo kampą stumdome taip, kad viena jo kraštinė visada liestų vinutę A, o kita – vinutę B. Kokią liniją brėžia lapo kampo viršūnė X (čia $\angle AXB = 90°$)?
Atsakymas – po 35 įrankio.



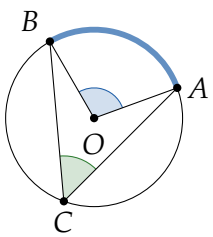
1. Nuo ko pradedame

Iš 1–4 lapų (ir 2b, 2c lapų) turime įrankius 1–32 ir trikampių lygumo požymius (dvi kraštinės ir kampas tarp jų; kraštinė ir du kampai prie jos; trys kraštinės).

1. Kryžminiai kampai lygūs.
2. Lygiagrečios tiesės $\Leftrightarrow$ vidaus priešiniai (atitinkamieji) kampai lygūs, vidaus vienašalių suma $180°$.
3. Trikampio kampų suma $180°$.
4. Priekampis lygus dviejų jam negretimų kampų sumai.
5. n-kampio kampų suma $(n-2)\cdot 180°$.
6. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs.
7. Du lygūs kampai $\Rightarrow$ trikampis lygiašonis.
8. Lygiašonio pusiaukampinė, pusiaukraštinė ir aukštinė iš viršūnės – ta pati atkarpa.
9. Lygiakraščio kampai po $60°$; lygiašonis su $60°$ kampu – lygiakraštis.
10. Lygiagretainio priešingos kraštinės ir kampai lygūs, įstrižainės dalija viena kitą pusiau.
11. Lygiagretainio požymiai: priešingos kraštinės poromis lygios; viena pora lygi ir lygiagreti; įstrižainės dalija viena kitą pusiau; priešingi kampai poromis lygūs.
12. Stačiakampis – lygiagretainis su lygiomis įstrižainėmis (požymiai: statusis kampas; lygios įstrižainės).
13. Rombas – lygiagretainis, kurio įstrižainės statmenos ir dalija kampus pusiau (požymiai: gretimos kraštinės lygios; įstrižainės statmenos).
14. Trikampio vidurio linija lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei; tiesė per kraštinės vidurį, lygiagreti antrajai kraštinei, kerta trečiąją jos viduryje.
15. Pusiaukraštinės kertasi taške G, kuris dalija kiekvieną santykiu $2:1$ nuo viršūnės.
16. Trapecijos vidurio linija lygiagreti pagrindams ir lygi $\frac{a+b}{2}$.
17. Lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo lygūs, įstrižainės lygios (ir atvirkščiai).
18. Stačiųjų trikampių lygumo požymiai.
19. $\angle C = 90° \Leftrightarrow$ pusiaukraštinė $CM = \frac{1}{2}AB$.
20. Stačiajame trikampyje: smailusis kampas $30° \Leftrightarrow$ statinis prieš jį lygus pusei įžambinės.
21. $PA = PB \Leftrightarrow P$ – atkarpos AB vidurio statmenyje.
22. Taškas kampo viduje vienodai nutolęs nuo kraštinių tiesių $\Leftrightarrow$ jis pusiaukampinėje.
23. Trikampio vidurio statmenys kertasi taške O ($OA = OB = OC$, apibrėžtinio apskritimo centras), pusiaukampinės – taške I.
24. Trikampio aukštinių tiesės kertasi viename taške.
25. Prieš didesnę kraštinę – didesnis kampas (ir atvirkščiai).
26. Statmuo trumpesnis už pasvirąją.
27. Trikampio nelygybė: $AC < AB + BC$.
28. Centras – stygos vidurio statmenyje: statmuo iš centro dalija stygą pusiau.
29. Liestinė statmena spinduliui į lietimosi tašką (ir atvirkščiai).
30. Liestinių atkarpos lygios: $PA = PB$; PO – pusiaukampinė.
31. Įbrėžtinio apskritimo centras – pusiaukampinių susikirtimo taškas I.
32. Atkarpa nuo viršūnės iki lietimosi taško lygi $p - a$; stačiajame trikampyje $r = p - c$.

Dar žinome lygių atkarpų teoremą ir Varinjono teoremą (keturkampio kraštinių viduriai – lygiagretainio viršūnės). Technikos T1–T16: kampų gaudymas, papildoma lygiagreti tiesė, lygūs trikampiai, pusiaukraštinė dvigubai, atidėk lygią atkarpą, užbaik iki lygiagretainio, centras O, du viduriai $\rightarrow$ vidurio linija, perkelk lygiagrečiai, atspindys per pusiaukampinę, statusis + vidurys, taškas pusiaukampinėje arba vidurio statmenyje, ištiesink laužtę, liestinė $\rightarrow$ spindulys, styga $\rightarrow$ statmuo iš centro, liestinių atkarpos x, y, z. Šiame lape kampus apskritime susiesime su lankais: tada lygius kampus matysime iš karto, be papildomų trikampių.

Primename (žodynas, IV dalis). Du apskritimo taškai A ir B padalija apskritimą į du **lankus**. **Centrinio kampo** AOB viršūnė – centras O; **įbrėžtinio kampo** ACB viršūnė C – apskritime, o kraštinės kerta apskritimą. Abu kampai **remiasi į lanką** AB, esantį kampo viduje (mėlynas).

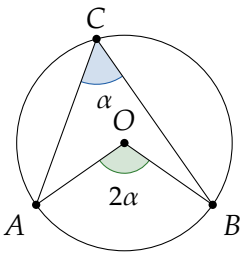


Lanko didumas. Mažesniojo lanko didumas lygus jo centrinio kampo didumui, o didesniojo – $360°$ minus tiek; skersmuo dalija apskritimą į du lankus po $180°$. Lanko didumą žymime taip pat kaip lanką: $\overset{\frown}{AB} = 100°$.

2. Kampai apskritime

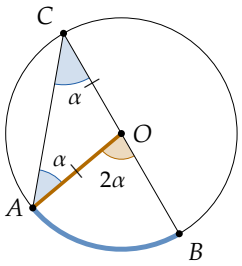
Įrankis 33 (įbrėžtinis kampas)

Įbrėžtinis kampas lygus pusei lanko, į kurį jis remiasi: $\angle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$. Kai tas lankas mažesnis už $180°$ – pusei centrinio kampo, besiremiančio į tą patį lanką: $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

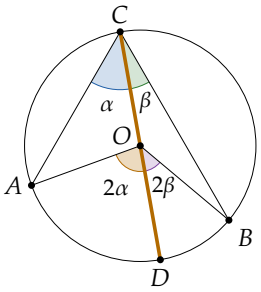


Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

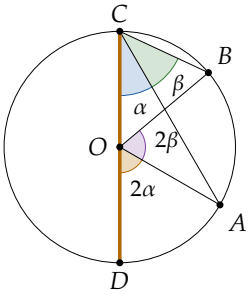
Centras O gali būti kampo kraštinėje, viduje arba išorėje – įrodysime visus tris atvejus.



1 atvejis: O kraštinėje



2 atvejis: O kampo viduje



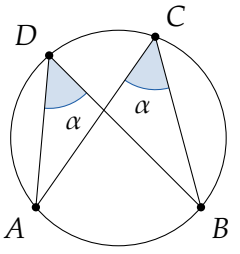
3 atvejis: O kampo išorėje

1. $O \in CB$, $\angle ACB = \alpha$: $OA = OC$, todėl $\angle OAC = \alpha$ (kampai prie pagrindo); $\overset{\frown}{AB} = \angle AOB = \alpha + \alpha = 2\alpha$ (trikampio AOC priekampis).
2. O kampo viduje (čia patenka ir statusis bei bukasis įbrėžtinis kampas). Skersmuo CD: $\angle ACD = \alpha$, $\angle DCB = \beta$, $\overset{\frown}{AD} = 2\alpha$, $\overset{\frown}{DB} = 2\beta$ (1 atvejis), todėl $\overset{\frown}{ADB} = 2\alpha + 2\beta = 2\angle ACB$.
3. O kampo išorėje. Skersmuo CD: $\angle DCA = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\angle DOA = 2\alpha$, $\angle DOB = 2(\alpha + \beta)$ (1 atvejis), todėl $\overset{\frown}{AB} = \angle AOB = 2\beta = 2\angle ACB$.

■

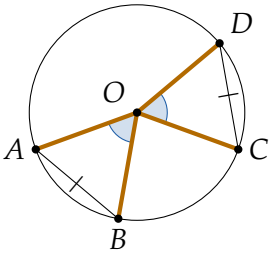
Įrankis 34 (kampai į tą patį lanką)

Įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką, lygūs: $\angle ACB = \angle ADB$. Įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į lygius lankus, taip pat lygūs.

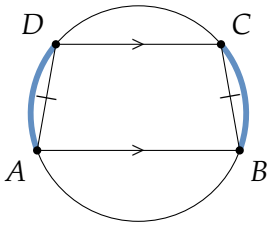


Įrodykite patys (Pratimai 4 a).

Išvada (lygios stygos). Viename apskritime lygios stygos ⇔ lygūs centriniai kampai (lygūs mažesnieji lankai): $AB = CD \Leftrightarrow \angle AOB = \angle COD$. Įrodykite patys (Pratimai 4 b). Todėl lygūs įbrėžtiniai kampai remiasi į lygias stygas (jų lankai lygūs).

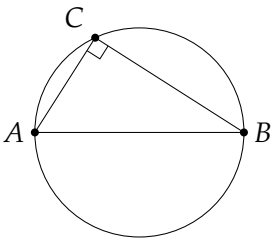


Išvada (lygiagrečios stygos). Lygiagrečios stygos $AB \parallel CD$ atkerta lygius lankus BC ir AD, todėl $AD = BC$. Taigi **į apskritimą įbrėžta trapecija – lygiašonė**. Įrodykite patys (Pratimai 4 c).



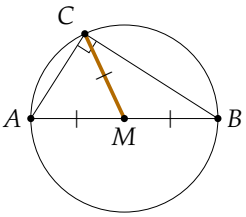
Įrankis 35 (kampas į skersmenį)

Įbrėžtinis kampas, besiremiantis į skersmenį, statusis: jei AB – skersmuo, tai $\angle ACB = 90°$. Ir atvirkščiai: jei $\angle ACB = 90°$, tai C yra apskritime, kurio skersmuo AB.



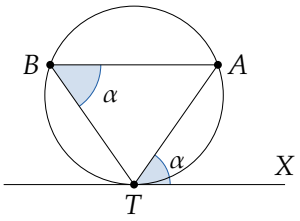
Tiesioginį teiginį įrodykite patys (Pratimai 4 d).

Atvirkščio teiginio įrodymas. M – atkarpos AB vidurys: $MC = \frac{1}{2}AB = MA = MB$ (pusiaukraštinė į įžambinę), todėl C – apskritime su centru M ir skersmeniu AB.
Atsakymas į klausimą pradžiai. Pusapskritimį (lanką) su skersmeniu AB (kampas į skersmenį ir atvirkščiai).

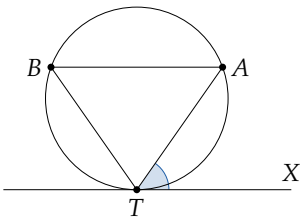


Įrankis 36 (kampas tarp liestinės ir stygos)

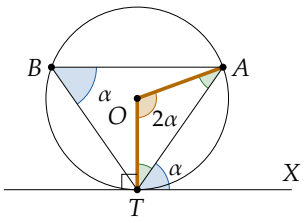
Kampas tarp liestinės TX ir stygos TA lygus įbrėžtiniam kampui, besiremiančiam į lanką TA, esantį kampo XTA viduje: $\angle XTA = \angle TBA \left(= \frac{1}{2}\overset{\frown}{TA}\right)$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



sąlyga



sprendimas

Tegu $\angle XTA = \alpha$ smailusis.

1. $\angle OTA = 90° - \alpha$ (liestinė statmena spinduliui), $\angle OAT = 90° - \alpha$ (kampai prie pagrindo, $OT = OA$), todėl $\overset{\frown}{TA} = \angle TOA = 2\alpha$ (trikampio kampų suma).
2. $\angle TBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{TA} = \alpha$ (įbrėžtinis kampas).

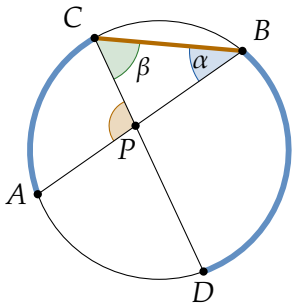
Bukajam kampui $180° - \alpha$ (gretutiniam) atitinka didesnysis lankas $360° - 2\alpha$: į jį besiremiantis įbrėžtinis kampas lygus $\frac{1}{2}(360° - 2\alpha) = 180° - \alpha$ (įbrėžtinis kampas). Kai TA – skersmuo, abu kampai statieji (liestinė statmena spinduliui; kampas į skersmenį).

■

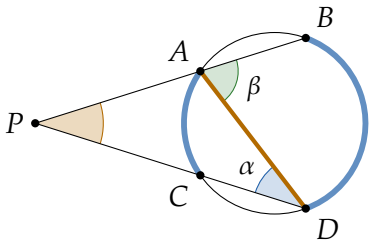
Išvada (kampas tarp stygų ir tarp kirstinių).

- Stygos AB ir CD kertasi apskritimo **viduje**, taške P: kampas tarp jų lygus **pusei lankų sumos**, $\angle APC = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}\right)$ (lankai AC ir BD – kampo APC ir jo kryžminio kampo viduje).
- Tiesės AB ir CD kertasi apskritimo **išorėje**, taške P (A – tarp P ir B, C – tarp P ir D): $\angle P = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}\right)$ – **pusė lankų skirtumo** (lankai BD ir AC – kampo P viduje).

Įrodymas.



viduje

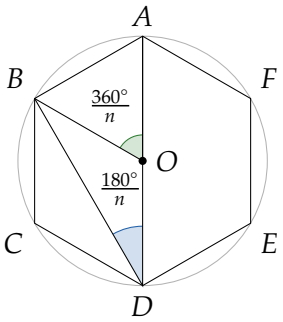


išorėje

1. Viduje: $\alpha = \angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$, $\beta = \angle BCD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ (įbrėžtinis kampas); $\angle APC = \alpha + \beta$ (trikampio PBC priekampis).
2. Išorėje: $\alpha = \angle ADC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$, $\beta = \angle BAD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ (įbrėžtinis kampas); $\beta = \angle P + \alpha$ (trikampio PAD priekampis), todėl $\angle P = \beta - \alpha$.

■

Išvada (taisyklingasis daugiakampis). Taisyklingojo n-kampio (visos kraštinės ir visi kampai lygūs) viršūnės yra viename apskritime (kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške O, $OA = OB$; trikampiai OBA ir OBC lygūs – dvi kraštinės ir kampas tarp jų, todėl $OC = OA$, OC – kampo C pusiaukampinė, ir t. t.). Kraštinės – lygios stygos, todėl kiekviena atkerta lanką $\frac{360^\circ}{n}$: **centrinis kampas** $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, įbrėžtinis kampas, besiremiantis į k kraštinių lanką, lygus $k \cdot \frac{180^\circ}{n}$; **vidaus kampas** $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.



3. Ar teisingas atvirkščias teiginys?

Teiginį „apvertę“ (sukeitę sąlygą ir išvadą), gauname **atvirkščią teiginį**. Jis kartais teisingas (kaip kampo į skersmenį), kartais – ne. Kad atvirkščias teiginys klaidingas, pakanka vieno **kontrpavyzdžio**.

Pratimai 2. Ar teisinga? Jei ne – nurodykite kontrpavyzdį; jei taip – pagrįskite, kai turimų įrankių pakanka (atsakymai – lapo gale).

a) A, B – apskritimo su centru O taškai, AB – ne skersmuo. Jei $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$, tai C yra apskritime.
Užuomina: atspindėkite tašką C tiesės AB atžvilgiu.

b) Taškai C ir D yra toje pačioje tiesės AB pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB$. Tada A, B, C, D yra viename apskritime.
Užuomina: nusibraižykite kelis atvejus; ar pavyko rasti kontrpavyzdį?

c) Taškai C ir D yra skirtingose tiesės AB pusėse ir $\angle ACB = \angle ADB \neq 90^\circ$. Tada A, B, C, D yra viename apskritime.
Užuomina: atspindėkite tašką C tiesės AB atžvilgiu.

d) Viename apskritime $AB = CD$, o X ir Y – kiti apskritimo taškai. Tada $\angle AXB = \angle CYD$.
Užuomina: kur gali būti taškas X?

e) TA – apskritimo styga, B – kitas apskritimo taškas, tiesė $t = TP$ eina per T, o P ir B yra skirtingose tiesės TA pusėse. Jei $\angle PTA = \angle TBA$, tai t – liestinė.
Užuomina: palyginkite su tikrąja liestine taške T.

f) Tas pats, bet P ir B – toje pačioje tiesės TA pusėje: jei $\angle PTA = \angle TBA$, tai t – liestinė.
Užuomina: ieškokite pavyzdžio su skersmeniu.

g) Jei trikampio ABC pusiaukraštinė CM lygi pusei kraštinės AB, tai $\angle C = 90°$.
Užuomina: kokie trikampiai AMC ir BMC?

h) Raskite klaidą: „Styga AB dvigubai ilgesnė už stygą CD, todėl lankas AB dvigubai didesnis už lanką CD.“
Užuomina: tegu AB – skersmuo.

4. Technikos

Technika T17. Lankai → kampai

Signalas: apskritimas ir keli jo taškai, sujungti stygomis.
Veiksmas: rask įbrėžtinius kampus, besiremiančius į tą patį lanką, ir pažymėk juos ta pačia raide α (jų lankas – 2α; kai $\alpha < 90°$, ir centrinis kampas – 2α). Lankus skaičiuok tik prireikus: visų lankų suma $360°$.

Technika T18. Statusis kampas → apskritimas

Signalas: du statieji kampai, besiremiantys į tą pačią atkarpą: $\angle AXB = \angle AYB = 90°$.
Veiksmas: taškai X, Y – apskritime su skersmeniu AB (kampas į skersmenį; centras – vidurys M); tada ieškok lygių įbrėžtinių kampų. Ir atvirkščiai: statusis įbrėžtinis kampas → jo „įžambinė“ – skersmuo (eina per centrą).

Technika T19. Liestinė + styga → įbrėžtinis kampas

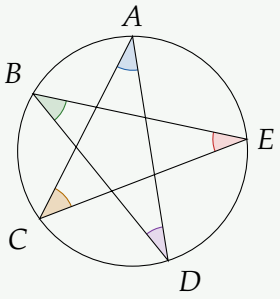
Signalas: liestinė ir styga iš lietimosi taško.
Veiksmas: ieškok įbrėžtinio kampo, besiremiančio į tą patį lanką (jis lygus kampui tarp liestinės ir stygos); jei jo nėra – nubrėžk.

5. Pavyzdžiai

Pavyzdys 1 (žvaigždė apskritime)

Grįžtame *1 lapo 3 pavyzdys. Šis ženkliukas žymi ankstesnio lapo uždavinį, kurį nauji įrankiai išsprendžia trumpiau.*

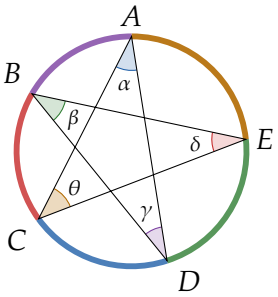
Penkiakampės žvaigždės $ACEBD$ viršūnės yra apskritime. Įrodykite, kad jos smaigalių kampų suma lygi 180°.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. penki įbrėžtiniai kampai; kiekvienas remiasi į lanką tarp dviejų gretimų viršūnių.

Idėja (T17). kampus keičiame lankais: lankų suma žinoma (360°).



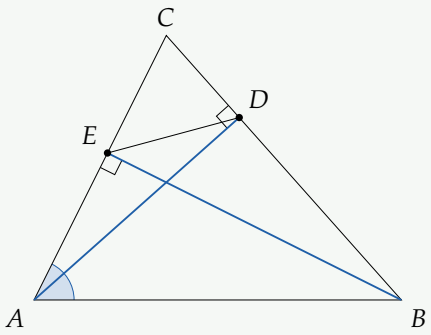
Sprendimas.

1. Pažymėkime $\alpha = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$, $\beta = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$, $\theta = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EA}$, $\gamma = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$, $\delta = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ (įbrėžtinis kampas).
2. Šie penki lankai sudaro visą apskritimą, todėl $\alpha + \beta + \theta + \gamma + \delta = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

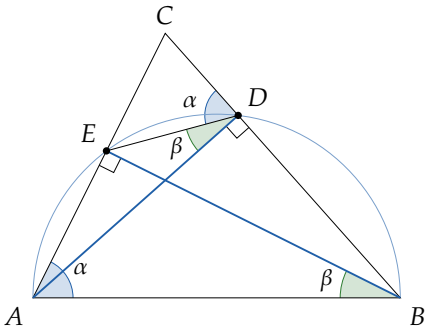
Pamoka. 1 lape kampus rinkome priekampiais į vieną trikampį – tas būdas tinka bet kuriai žvaigždei. Kai viršūnės apskritime, kampai virsta lankais, o lankų suma iš karto žinoma.

Pavyzdys 2 (dvi aukštinės)

Smailiajame trikampyje ABC nubrėžtos aukštinės AD ir BE, Įrodykite, kad $\angle CDE = \angle CAB$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Ką matau. du statieji kampai ADB ir AEB, besiremiantys į tą pačią atkarpą AB.

Idėja (T18). D ir E – apskritime su skersmeniu AB; ieškome lygių įbrėžtinių kampų.

Sprendimas.

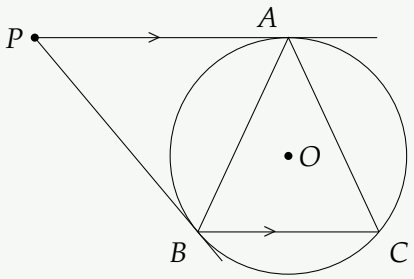
1. $\angle ADB = \angle AEB = 90°$, todėl D, E – apskritime su skersmeniu AB (kampas į skersmenį).
2. Pažymėkime $\angle CAB = \alpha$ ir $\angle ABE = \beta$. Tada $\beta = 90° - \alpha$ (stačiojo trikampio ABE smailiųjų kampų suma).
3. $\angle ADE = \beta$ (įbrėžtiniai kampai, remiasi į lanką AE).
4. $\angle CDE = 90° - \beta = \alpha$ ($AD \perp BC$).

Pamoka. du statieji kampai į tą pačią atkarpą – „nematomas“ apskritimas; jį nubrėžę, lygius kampus matome iš karto. Taip pat $\angle CED = \angle CBA$.

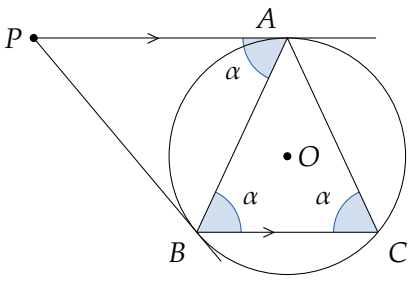
Pavyzdys 3 (liestinė ir lygiagreti styga)

Grįžtame *4 lapo 16 a uždavinys*

Iš taško P nubrėžtos apskritimo liestinės PA ir PB (A, B – lietimosi taškai), styga $BC \parallel PA$. Įrodykite, kad $AB = AC$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Ką matau. liestinė PA ir styga AB iš lietimosi taško.

Idėja (T19). kampas tarp jų lygus įbrėžtiniam kampui ACB.

Sprendimas.

1. Pažymėkime $\angle PAB = \alpha$. Tada $\angle ACB = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
2. $\angle ABC = \angle PAB = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai, $BC \parallel PA$).
3. $\angle ABC = \angle ACB$, todėl $AB = AC$ (lygiašonio požymis).

Pamoka. 4 lape reikėjo spindulio OA ir vidurio statmens; kampas tarp liestinės ir stygos tą patį duoda iš karto. Liestinės PB net neprireikė.

6. Pratimai

Pratimai 3. Apskaičiuokite (O – apskritimo centras).

a) Apskritimo lankas AB lygus 70°, C – apskritimo taškas, nesantis šiame lanke. Raskite $\angle ACB$.
b) Taškai A, B, C, D yra apskritime, C ir D – toje pačioje tiesės AB pusėje, $\angle ACB = 48°$. Raskite $\angle ADB$.
c) $\angle AOB = 140°$, taškas C yra mažesniajame lanke AB. Raskite $\angle ACB$.
d) AB – apskritimo skersmuo, C – apskritimo taškas, $AC = BC$. Raskite $\angle CAB$.
e) Stygos AB ir CD lygios, $\angle AOB = 50°$, E – taškas didesniajame lanke CD. Raskite $\angle CED$.
f) Tiesė PT liečia apskritimą taške T, TA – styga, $\angle PTA = 62°$. Raskite $\angle TOA$.
g) Viename apskritime $\angle ACB = \angle DEF = 30°$ (visi šeši taškai – apskritime), $AB = 7$ cm. Raskite DF.
h) Stygos AB ir CD kertasi taške P, lankai AC ir BD (kampų APC ir BPD viduje) lygūs 80° ir 130°. Raskite $\angle APC$ ir $\angle APD$.
i) Iš taško P nubrėžtos dvi kirstinės: viena kerta apskritimą taškuose A ir B, kita – taškuose C ir D (A – tarp P ir B, C – tarp P ir D). Lankas BD lygus 150°, lankas AC – 50° (abu – kampo P viduje). Raskite $\angle P$.
j) $ABCDEF$ – taisyklingasis šešiakampis, O – jo centras. Raskite $\angle AOB$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ ir $\angle ACD$.
k) $ABCDEFGH$ – taisyklingasis aštuonkampis. Raskite jo vidaus kampą ir smailųjį kampą tarp įstrižainių AC ir BE.

Pratimai 4. Įrodykite (įrankių teiginiai, kurių neįrodėme; sprendimai – lapo gale).

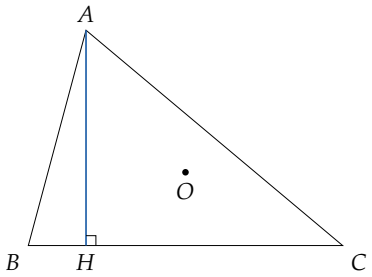
a) Įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką, lygūs; besiremiantys į lygius lankus – taip pat lygūs.
Užuomina: kiekvieną kampą išreikškite lanku, į kurį jis remiasi.
b) Viename apskritime $AB = CD \Leftrightarrow \angle AOB = \angle COD$ (O – centras).
Užuomina: kokie trikampiai AOB ir COD?
c) Lygiagrečios stygos $AB \parallel CD$ (taškai A, B, C, D apskritime iš eilės) atkerta lygius lankus BC ir AD; todėl $AD = BC$.
Užuomina: nubrėžkite įstrižainę AC; kokie kampai BAC ir ACD?
d) Įbrėžtinis kampas, besiremiantis į skersmenį, statusis.
Užuomina: kokio didumo lankas, į kurį jis remiasi?

7. Grįžtame

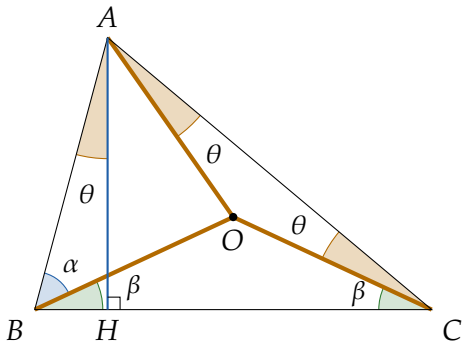
Kai kuriuos ankstesnių lapų uždavinius nauji įrankiai išsprendžia trumpiau. Palyginkite sprendimus; paskui išspręskite patys.

Grįžtame *3 lapo 22 uždavinys (a dalis)*

Smailiajame trikampyje ABC taškas O – kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas, AH – aukštinė. Įrodykite, kad $\angle BAH = \angle CAO$.

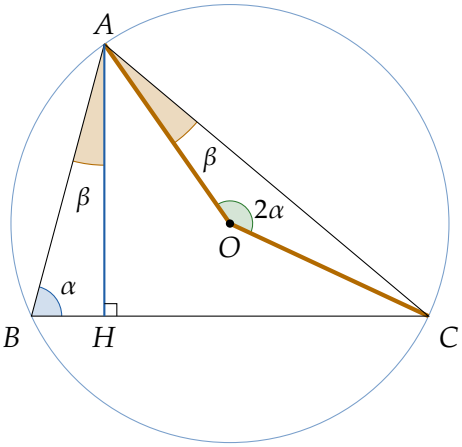


Anksčiau (3 lapas, T12).



1. Pažymėkime $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \beta$, $\angle OCA = \theta$. Kadangi $OA = OB = OC$, tai $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$, $\angle OBC = \angle OCB = \beta$, $\angle OCA = \angle OAC = \theta$ (kampai prie pagrindo).
2. $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 180°$ (trikampio kampų suma), $\alpha + \beta + \theta = 90°$.
3. $\angle CAO = \theta = 90° - (\alpha + \beta) = 90° - \angle B$, o $\angle BAH = 90° - \angle B$ (trikampio ABH kampų suma).

Dabar (T17).



1. Pažymėkime $\angle ABC = \alpha$. Tada $\angle AOC = 2\alpha$ (O – apibrėžtinio apskritimo centras; centrinis ir įbrėžtinis kampai, remiasi į lanką AC).
2. $\angle CAO = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha = \angle BAH$ (kampai prie pagrindo, $OA = OC$; trikampių AOC ir ABH kampų suma).

Pamoka. vietoj trijų lygiašonių trikampių – vienas centrinis kampas.

Pratimai 5. Išspręskite patys trumpiau – naujais įrankiais (nurodytas lapas ir uždavinio numeris; sprendimai – lapo gale).

a) *(Mišinys 1, 13 uždavinys.)* Trikampyje ABC $AB = AC$, $\angle BAC < 120°$. Kitoje tiesės AB pusėje nei taškas C nubrėžtas lygiakraštis trikampis ABD. Įrodykite, kad $\angle BCD = 30°$.
Užuomina: 1) kuris naujas įrankis? 2) kokio apskritimo centras yra A?

b) *(3 lapas, 29 b uždavinys.)* Statieji lygiašoniai trikampiai OAB ir OCD turi bendrą stačiojo kampo viršūnę O ($OA = OB$, $OC = OD$, $OA \neq OC$); spinduliai OA, OB, OC, OD eina šia tvarka pagal laikrodžio rodyklę, $\angle BOC < 90°$. Atkarpos AC ir BD kertasi jų vidiniame taške P, O – kampo APD viduje. Žinoma (a dalis), kad $AC \perp BD$. Įrodykite, kad PO – kampo APD pusiaukampinė, ir raskite $\angle APO$.
Užuomina: 1) kuris naujas įrankis? 2) kurie du statieji kampai remiasi į atkarpą AB?

c) *(3 lapas, 24 b uždavinys.)* Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle BAD = 30°$. Įrodykite, kad $AC = 2BD$.
Užuomina: 1) kuris naujas įrankis? 2) kokiame apskritime yra B ir D?

d) *(4 lapas, 31 b uždavinys.)* Stačiajame trikampyje ABC ($\angle C = 90°$) I – įbrėžtinio apskritimo centras, r – spindulys; įžambinėje AB taškai P ir Q tokie, kad $AP = AC$, $BQ = BC$. Žinoma (a dalis), kad $\angle PCQ = 45°$. Įrodykite, kad $IP = IQ = IC$, $\angle PIQ = 90°$ ir $PQ = 2r$.
Užuomina: 1) kuris naujas įrankis? 2) kurio trikampio apibrėžtinio apskritimo centras yra I?

Uždaviniai

Jei brėžinio nėra, nusibraižykite patys.

I. Įgūdžiai

1. Apskritimo centras O, taškai A, B, C yra apskritime, C – didesniajame lanke AB, $\angle ACB = 37°$. Raskite $\angle AOB$.

2. A, B, C – apskritimo (centras O) taškai, C yra mažesniajame lanke AB, $\angle ACB = 125°$. Raskite lanką AB, kuriame nėra C, ir $\angle AOB$ (mažesnįjį).

3. AB – apskritimo skersmuo, C – apskritimo taškas, $\angle CAB = 24°$. Raskite $\angle ACB$ ir $\angle ABC$.

4. Tiesė PT liečia apskritimą (centras O) taške T, A – apskritimo taškas, $\angle PTA = 38°$. Taškas B yra apskritime kitoje tiesės TA pusėje nei P. Raskite $\angle TBA$ ir $\angle TOA$.

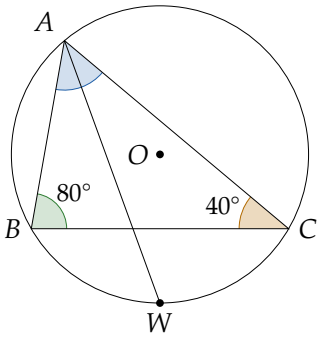
5. Trikampio ABC viršūnės yra apskritime, o lankai AB, BC, CA (kiekvienas lankas – be trečiosios viršūnės) santykiu $2 : 3 : 4$. Raskite trikampio kampus.

II. Technikos

6. Trikampis ABC įbrėžtas į apskritimą su centru O; $\angle B = 80°$, $\angle C = 40°$. Kampo A pusiaukampinė antrą kartą kerta apskritimą taške W.

a) Raskite trikampio BWC kampus.

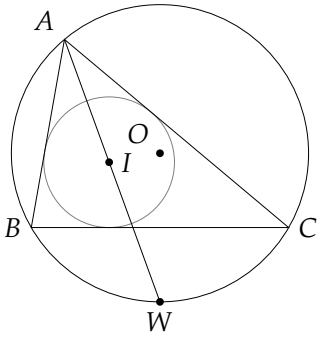
b) Įrodykite, kad bet kuriame trikampyje (ne tik šiame) $WB = WC$ ir $OW \perp BC$.



7. Trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo centras – I. Tiesė AI antrą kartą kerta trikampio apibrėžtinį apskritimą (centras O) taške W.

a) Įrodykite, kad $WB = WI = WC$.

b) Žinoma, kad $\angle BAC = 60°$, o apibrėžtinio apskritimo spindulys lygus 5. Raskite WI.

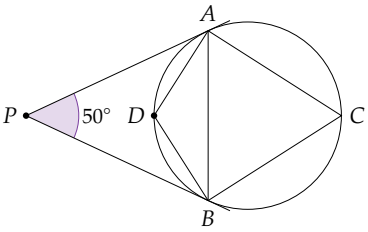


8. Iš taško P nubrėžtos apskritimo liestinės PA ir PB (A, B – lietimosi taškai), $\angle APB = 50°$. C – didžiojo lanko AB taškas, D – mažojo lanko AB vidurio taškas.

a) Raskite $\angle ACB$.

b) Raskite $\angle ADB$.

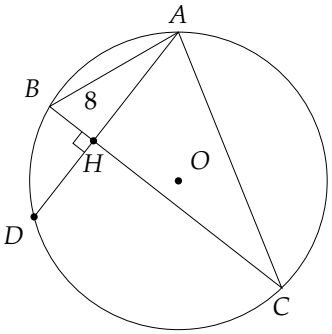
c) Įrodykite, kad D – trikampio PAB įbrėžtinio apskritimo centras.



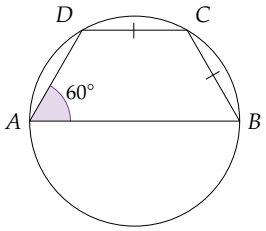
9. Smailusis trikampis ABC įbrėžtas į apskritimą su centru O ir spinduliu $R = 8$ cm, o kraštinė $AB = 8$ cm. Aukštinė AH ($H \in BC$) pratęsta antrą kartą kerta apskritimą taške D.

a) Raskite kampus $\angle ACB$, $\angle CAD$ ir $\angle CBD$.

b) Įrodykite, kad $AC = 2AH$ bei $BD = 2BH$, ir raskite atstumą nuo apskritimo centro O iki stygos CD.



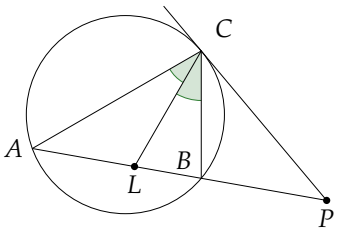
10. Į apskritimą įbrėžta trapecija $ABCD$ ($AB \parallel CD$), kurios $BC = CD$ ir $\angle BAD = 60°$.



a) Raskite kitus trapecijos kampus ir įrodykite, kad $AD = DC = CB$.

b) Įrodykite, kad AB – šio apskritimo skersmuo ir $AB = 2BC$.

11. Trikampis ABC ($CA > CB$) įbrėžtas į apskritimą. Apskritimo liestinė taške C kerta tiesę AB taške P (B – tarp A ir P). CL – trikampio pusiaukampinė ($L \in AB$).



a) Įrodykite, kad $PC = PL$.

b) Raskite $\angle CPA$, jei $\angle A = 40°$, $\angle ACB = 60°$.

12. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) įžambinės AB kitoje pusėje nei C pažymėtas taškas D, kad $DA = DB$ ir $\angle ADB = 90°$.

a) Įrodykite, kad CD – kampo ACB pusiaukampinė.

b) Tegu $\angle CAB = 20°$, o CD kerta AB taške K. Raskite $\angle CDA$ ir $\angle CKB$.

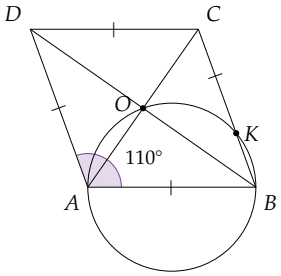
13. Smailusis trikampis ABC įbrėžtas į apskritimą. Trikampio aukštinės AD ($D \in BC$) ir BE ($E \in AC$) kertasi taške H, o tiesė AD antrą kartą kerta apskritimą taške P ($P \neq A$).

a) Įrodykite, kad $HD = DP$ ir $BH = BP$.

b) Raskite kampus $\angle BHC$ ir $\angle BPC$, jei $\angle BAC = 55°$.

14. Smailiojo trikampio ABC aukštinės BB_1 ir CC_1 ($B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$); O – trikampio apibrėžtinio apskritimo centras, t – šio apskritimo liestinė taške A. Įrodykite, kad $t \parallel B_1C_1$ ir $OA \perp B_1C_1$.

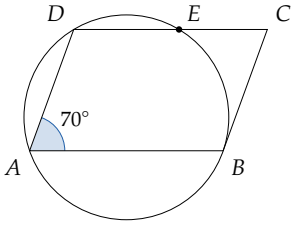
15. Rombo $ABCD$ $\angle BAD = 110°$, jo įstrižainės kertasi taške O. Apskritimas, kurio skersmuo AB, antrą kartą kerta kraštinę BC taške K.



a) Įrodykite, kad šis apskritimas eina per O, ir raskite $\angle AKB$.

b) Raskite $\angle KOB$ ir $\angle AKO$. Įrodykite, kad $OK = OA$.

16. Apskritimas eina per lygiagretainio $ABCD$ viršūnes A, B, D ir antrą kartą kerta kraštinę CD taške E.



a) Įrodykite, kad $BE = BC$.

b) Raskite $\angle EBC$, jei $\angle BAD = 70°$.

17. Apskritime su centru O nubrėžtos dvi statmenos stygos AB ir CD, kurios kertasi vidiniame taške P ($AB \perp CD$; taškai apskritime išsidėstę tvarka A, C, B, D).

a) Įrodykite, kad $\angle AOD + \angle BOC = 180°$.

b) Raskite kampus $\angle BOC$, $\angle CDB$ ir $\angle OAC$, jei $\angle AOD = 110°$ ir $\angle ADC = 70°$.

18. Trikampyje ABC $\angle C = 150°$, $AB = 7$. Raskite trikampio apibrėžtinio apskritimo spindulį. Kodėl atsakymas būtų toks pat, jei $\angle C = 30°$?

III. Sunkesni

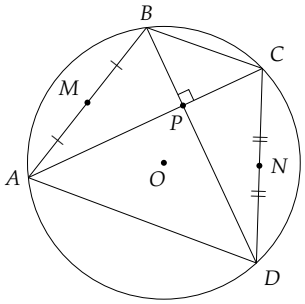
19. AB – apskritimo (centras O) skersmuo. Taškai C ir D yra tame pačiame pusapskritimyje (tvarka A, C, D, B), $\angle COD = 60°$. Tiesės AC ir BD kertasi taške P, o stygos AD ir BC – taške Q.

a) Raskite $\angle APB$. b) Įrodykite, kad $PQ \perp AB$. c) Raskite $\angle AQB$.

20. Į apskritimą su centru O įbrėžto keturkampio $ABCD$ (kraštinės AB ir CD nelygiagrečios) įstrižainės AC ir BD statmenos ir kertasi taške P; M ir N – kraštinių AB ir CD viduriai.

a) Įrodykite, kad tiesė MP statmena CD.

b) Įrodykite, kad $OMPN$ – lygiagretainis ir kad atstumas nuo centro O iki AB lygus pusei CD.



21. Apskritime su centru O ir skersmeniu AB pažymėtas taškas C ($C \neq A$, $C \neq B$). Per tašką C nubrėžta apskritimo liestinė, o iš taško A į šią liestinę nuleistas statmuo AD (D – statmens pagrindas liestinėje). Iš taško C į skersmenį AB nuleistas statmuo CH ($H \in AB$).

a) Įrodykite, kad AC – kampo DAB pusiaukampinė ir kad $CD = CH$ bei $AD = AH$.

b) Tiesės AD ir BC susikerta taške E. Įrodykite, kad $AE = AB$ ir $BC = CE$, ir raskite kampą $\angle DHC$ bei atkarpų HB, AD ir DE ilgius, jei $AB = 16$ cm ir $\angle CBA = 60°$.

22. Du apskritimai ω_1 ir ω_2 kertasi taškuose A ir B. Apskritimo ω_1 liestinė taške A antrą kartą kerta ω_2 taške C, o apskritimo ω_2 liestinė taške A antrą kartą kerta ω_1 taške D.

a) Įrodykite, kad $\angle ABC = \angle ABD$.

b) $\angle ADB = 50°$, $\angle ACB = 30°$. Raskite $\angle ABC$, $\angle CAD$ ir $\angle CBD$.

23. Du apskritimai išoriškai liečiasi taške T. Per tašką T nubrėžtos dvi tiesės: pirmoji kerta pirmąjį apskritimą taške A, o antrąjį – taške B; antroji kerta pirmąjį apskritimą taške C, o antrąjį – taške D (A, B, C, $D \neq T$).

a) Įrodykite, kad stygos AC ir BD yra lygiagrečios ($AC \parallel BD$).

b) Per tašką A nubrėžta pirmojo apskritimo liestinė kerta tiesę CD taške P (C yra tarp P ir T). Raskite kampus $\angle BDT$ ir $\angle TBD$, jei $\angle PAC = 35°$ ir $\angle APC = 25°$.

Papildomi uždaviniai (norintiems)

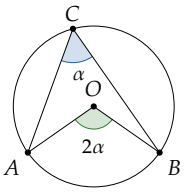
24. Apskritimas ω_1 liečia apskritimą ω iš vidaus taške T. Apskritimo ω styga AB liečia ω_1 taške K (tiesės TK ir AB nėra statmenos).

a) Įrodykite, kad TK – kampo ATB pusiaukampinė.
b) Raskite $\angle TKB$, jei $\angle TAB = 70°$, $\angle TBA = 40°$.

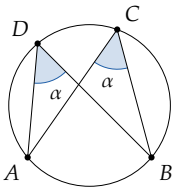
Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

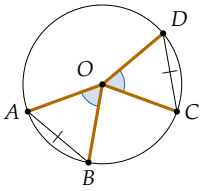
Įrankis 33 *(įbrėžtinis kampas)* įbrėžtinis kampas lygus pusei lanko, į kurį remiasi: $\angle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ (kai $\overset{\frown}{AB} < 180°$, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$)



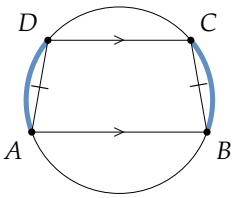
Įrankis 34 *(kampai į tą patį lanką)* įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį (ar lygius) lankus, lygūs



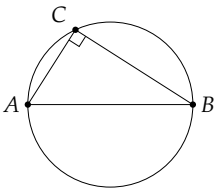
Išvada *(lygios stygos)* viename apskritime $AB = CD \Leftrightarrow \angle AOB = \angle COD$ (lygūs mažesnieji lankai); lygūs įbrėžtiniai kampai remiasi į lygias stygas



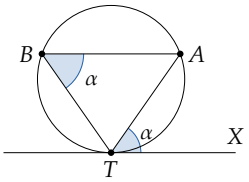
Išvada *(lygiagrečios stygos)* $AB \parallel CD \Rightarrow$ lankai BC ir AD lygūs, $AD = BC$; įbrėžtinė trapecija – lygiašonė



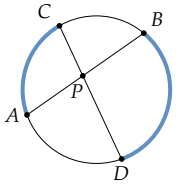
Įrankis 35 *(kampas į skersmenį)* AB – skersmuo $\Leftrightarrow \angle ACB = 90°$ (kampas į skersmenį); statusis kampas $\rightarrow$ jo „įžambinė“ – skersmuo



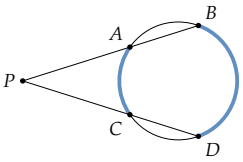
Įrankis 36 *(kampas tarp liestinės ir stygos)* kampas tarp liestinės ir stygos lygus įbrėžtiniam kampui į lanką tarp jų: $\angle XTA = \angle TBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{TA}$



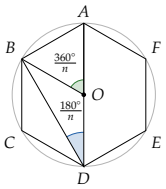
Išvada *(kampas tarp stygų)* stygos kertasi viduje: $\angle APC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$ – pusė lankų sumos



Išvada *(kampas tarp kirstinių)* tiesės kertasi išorėje: $\angle P = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$ – pusė lankų skirtumo



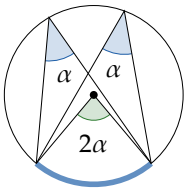
Išvada *(taisyklingasis daugiakampis)* viršūnės – apskritime; centrinis kampas $\frac{360^\circ}{n}$; įbrėžtinis kampas į k kraštinių lanką $k \cdot \frac{180^\circ}{n}$; vidaus kampas $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$



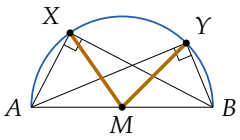
Technikų santrauka

Signalas → veiksmas. Šios technikos padeda rasti sprendimą.

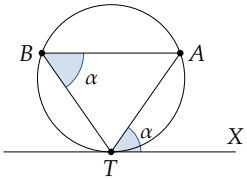
T17 *(Lankai → kampai)* apskritimas ir taškai jame → kampai į tą patį lanką lygūs (α), lankas 2α; lankų suma 360°.



T18 *(Statusis kampas → apskritimas)* du statieji kampai į tą pačią atkarpą AB → apskritimas su skersmeniu AB (centras – vidurys M); statusis įbrėžtinis kampas → skersmuo.



T19 *(Liestinė + styga → įbrėžtinis kampas)* liestinė + styga iš lietimosi taško → įbrėžtinis kampas į tą patį lanką (lygus kampui tarp jų).



Pratimų atsakymai

Pratimai 1. a) 18 cm; b) 35°; c) tik 9 cm;

Pratimai 3. a) 35°; b) 48°; c) 110°; d) 45°; e) 25°; f) 124°; g) 7 cm; h) 105°, 75°; i) 50°; j) 60°, 120°, 30°, 90°; k) 135°, 67,5°;

Uždavinių atsakymai

1. 74°.
2. Lankas 250°, $\angle AOB = 110^\circ$.
3. $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 66^\circ$.
4. $\angle TBA = 38^\circ$, $\angle TOA = 76^\circ$.
5. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 40^\circ$.

6. a) $\angle WBC = \angle WCB = 30°$, $\angle BWC = 120°$; b) įrodymas – lapo gale.
7. a) įrodymas – lapo gale; b) $WI = 5$.
8. a) 65°; b) 115°; c) įrodymas – lapo gale.
9. a) $\angle ACB = 30°$, $\angle CAD = 60°$, $\angle CBD = 60°$; b) įrodymas – lapo gale, 4 cm.
10. a) $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = \angle ADC = 120°$, įrodymas – lapo gale; b) įrodymas – lapo gale.
11. a) įrodymas – lapo gale; b) 40°.
12. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle CDA = 70°$, $\angle CKB = 65°$.
13. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle BHC = \angle BPC = 125°$.
14. Įrodymas – lapo gale.
15. a) $\angle AKB = 90°$, įrodymas – lapo gale; b) $\angle KOB = 20°$, $\angle AKO = 35°$, įrodymas – lapo gale.
16. a) įrodymas – lapo gale; b) 40°.
17. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle BOC = 70°$, $\angle CDB = 35°$, $\angle OAC = 20°$.
18. $R = 7$; abiem atvejais centrinis kampas $AOB = 60°$.
19. a) 60°; b) įrodymas – lapo gale; c) 120°.
20. a), b) įrodymai – lapo gale.
21. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle DHC = 30°$, $HB = 4$ cm, $AD = 12$ cm, $DE = 4$ cm.
22. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle ABC = 100°$, $\angle CAD = 80°$, $\angle CBD = 160°$.
23. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle BDT = 60°$, $\angle TBD = 85°$.
24. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle TKB = 105°$.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) Kuris kampas centrinis, kuris įbrėžtinis? 2) Centrinis kampas – dvigubai didesnis už įbrėžtinį į tą patį lanką.
2. 1) Bukasis įbrėžtinis kampas remiasi į lanką, didesnį už pusapskritimį (didesnį už 180°). 2) Įbrėžtinis kampas lygus pusei lanko, į kurį remiasi.
3. 1) Kampas, besiremiantis į skersmenį, – kiek laipsnių? 2) Trikampio ABC kampų suma.
4. 1) Liestinė ir styga iš lietimosi taško (T19). 2) Kampas tarp liestinės ir stygos lygus įbrėžtiniam kampui į tą patį lanką.
5. 1) Kiekvienas trikampio kampas – įbrėžtinis. 2) Kampai – pusės priešingų lankų, todėl $\angle C : \angle A : \angle B = 2 : 3 : 4$; kampų suma 180°.
6. 1) Pusiaukampinė iš A ir keturi taškai viename apskritime (T17). 2) Sujunkite W su B ir C; $\angle WBC$ ir $\angle WAC$ remiasi į lanką WC, $\angle WCB$ ir $\angle WAB$ – į lanką WB.
7. 1) I – pusiaukampinių susikirtimo taškas, W – apskritime (T17). 2) Kampą prie A perkelkite į B per lanką WC. Nubrėžkite BI ir palyginkite trikampio BWI kampus prie B ir prie I (kampas prie I – trikampio ABI priekampis).
8. 1) Liestinė ir styga iš lietimosi taško (T19); trikampis PAB – lygiašonis (liestinių atkarpos). 2) a) $\angle ACB$ lygus kampui tarp liestinės PA ir stygos AB. c) Kampą tarp liestinės PA ir stygos AD palyginkite su $\angle ABD$, o šį – su $\angle DAB$ ($DA = DB$).
9. 1) Styga $AB = 8$ cm lygi apskritimo spinduliui $R = 8$ cm. 2) Sujunkite centrą O su A ir B (gausite lygiakraštį trikampį OAB), raskite įbrėžtinį kampą $\angle ACB$, o b) dalyje sujunkite O su C, D ir nuleiskite statmenį $OM \perp CD$.
10. 1) Įbrėžtinė trapecija – lygiašonė (lygiagrečios stygos). 2) Nubrėžkite įstrižainę AC: palyginkite kampus CAD, ACD ir BAC, tada raskite $\angle ACB$.

11. 1) Liestinė ir styga iš lietimosi taško (T19). 2) $\angle PCB = \angle A$. Palyginkite trikampio PCL kampus prie C ir prie L; kampas prie L – trikampio ALC priekampis.

12. 1) Du statieji kampai, besiremiantys į tą pačią atkarpą AB (T18). 2) A, B, C, D – apskritime su skersmeniu AB. Kokios stygos DA ir DB šiame apskritime? Į kokius lankus remiasi $\angle ACD$ ir $\angle DCB$?

13. 1) Aukštinė pratęsta iki apskritimo – kampas CAP yra įbrėžtinis. 2) Nubrėžkite stygą BP: $\angle DBP = \angle CAP$ (tas pats lankas CP), o $\angle HBD$ ir $\angle CAP$ abu lygūs $90° - \angle ACB$; palyginkite trikampius BDH ir BDP. b) Raskite $\angle BPC$ iš lanko BC, o $\angle BHC$ – palyginę trikampius BHC ir BPC.

14. 1) Dvi aukštinės – kaip pavyzdyje „Dvi aukštinės“: kuriam trikampio kampui lygus $\angle AC_1B_1$? 2) $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$; kampą tarp t ir AB palyginkite su įbrėžtiniu $\angle ACB$ (T19).

15. 1) Rombo įstrižainės statmenos – kampas į skersmenį (T18). 2) $\angle KOB$ ir $\angle KAB$ remiasi į tą patį lanką KB, $\angle AKO$ ir $\angle ABO$ – į lanką AO; $\angle KAB$ raskite iš stačiojo trikampio AKB.

16. 1) Stygos AB ir DE lygiagrečios. 2) $ABED$ – įbrėžtinė trapecija, todėl lygiašonė: $BE = AD$; o $AD = BC$ (lygiagretainis).

17. 1) Statmenos stygos – statusis trikampis; centrinius kampus pakeiskite įbrėžtiniais (T17). 2) Sujunkite tašką A su C: išnagrinėkite statųjį trikampį APC ir susiekite jo smailiuosius kampus su centriniais kampais $\angle AOD$ bei $\angle BOC$.

18. 1) Nubrėžkite apibrėžtinį apskritimą; $\angle ACB$ – įbrėžtinis bukasis kampas: į kurį lanką AB jis remiasi ir kiek laipsnių tas lankas? 2) Sujunkite centrą O su A ir B; koks trikampis AOB?

19. 1) Kampai ADB ir ACB remiasi į skersmenį; $\angle CAD$ – įbrėžtinis kampas į lanką CD. 2) b) AD ir BC – kurio trikampio aukštinės? Kas yra Q?

20. 1) a) Stačiajame trikampyje APB – pusiaukraštinė PM (pusiaukraštinė į įžambinę). b) Kokia tiesė ON stygos CD atžvilgiu? 2) a) $MP = MB$, todėl $\angle MPB = \angle ABD$; $\angle ABD = \angle ACD$ (tas pats lankas AD). Tiesę MP pratęskite iki CD (taškas H) ir raskite trikampio PHD kampą prie H. b) Iš a) dalies – ir $NP \perp AB$; $ON \perp CD$, $OM \perp AB$.

21. 1) AB – apskritimo skersmuo, o CD – liestinė taške C, todėl $\angle DCA$ yra kampas tarp liestinės ir stygos CA. 2) a) Sujunkite C su B; iš $\angle ACB = 90°$ ir $\angle DCA = \angle CBA$ įrodykite $\angle DAC = \angle CAB$ bei $\triangle ADC = \triangle AHC$; b) trikampyje ABE atkarpa AC yra ir kampo pusiaukampinė, ir aukštinė.

22. 1) Dvi liestinės ir bendra styga AB – kiekviename apskritime ieškokite įbrėžtinio kampo, lygaus kampui tarp liestinės ir AB (T19). 2) $\angle CAB = \angle ADB$, $\angle DAB = \angle ACB$; kampus ABC ir ABD raskite iš trikampių ABC ir ABD kampų sumos.

23. 1) Du apskritimai liečiasi – kokia tiesė jiems bendra taške T? Stygos iš lietimosi taško – ieškokite kampų tarp liestinės ir stygos (T19). 2) Per tašką T nubrėžkite abiejų apskritimų bendrą liestinę MN ir pritaikykite kampo tarp liestinės ir stygos savybę kiekviename apskritime.

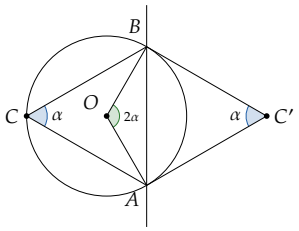
24. 1) Apskritimai liečiasi taške T, o AB liečia ω_1 – kiek ω_1 liestinių galima nubrėžti? 2) Nubrėžkite bendrąją liestinę taške T; ji kerta tiesę AB taške S. Iš S – dvi ω_1 liestinės (liestinių atkarpos): trikampis STK lygiašonis; $\angle STA$ palyginkite su įbrėžtiniu $\angle TBA$ (T19), o $\angle SKT$ – trikampio TKB priekampis.

Pratimų ir sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

Pratimai 2 a)

Ne. C – didesniojo lanko AB taškas, C' – jo atspindys tiesės AB atžvilgiu: $\angle AC'B = \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ (simetrija), bet C' apskritime nėra.



Pratimai 2 b)

Taip (įrodysime 6 lape). Pvz., C ir D – to paties apskritimo lanko AB taškai (kampai į tą patį lanką). Pavyzdys teiginį tik iliustruoja, bet jo neįrodo.

Pratimai 2 c)

Ne. a) dalies brėžinys ($\angle AOB = 120°$): C ir jo atspindys C' – skirtingose AB pusėse, $\angle ACB = \angle AC'B = 60° \neq 90°$, bet C' apskritime nėra, o apskritimas per A, B, C – vienintelis (apibrėžtinis apskritimas).

Pratimai 2 d)

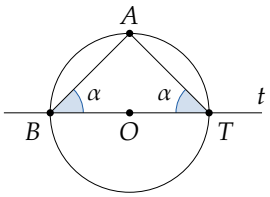
Ne. $AB = CD = r$: trikampiai AOB, COD lygiakraščiai, mažesnieji lankai AB, CD – po 60°. X – mažesniajame lanke AB: $\angle AXB = \frac{1}{2}\cdot 300° = 150°$; Y – didesniajame lanke CD: $\angle CYD = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$.

Pratimai 2 e)

Taip. Liestinė TX (X ir B – skirtingose TA pusėse): $\angle XTA = \angle TBA = \angle PTA$ (kampas tarp liestinės ir stygos). Spinduliai TP ir TX yra toje pačioje tiesės TA pusėje ir su TA sudaro lygius kampus, todėl sutampa: t – liestinė.

Pratimai 2 f)

Ne. TB – skersmuo, $TA = AB$: $\angle BTA = \angle TBA = 45°$ (lygiašonis statusis trikampis). Tiesė $t = TB$ (P – spindulio TB taškas už B) tenkina sąlygą, bet kerta apskritimą dar taške B – ne liestinė.



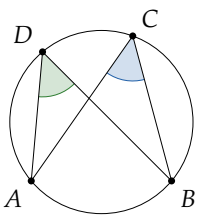
Pratimai 2 g)

Taip – tai jau žinomas faktas (3 lapas: pusiaukraštinė lygi pusei kraštinės $\Rightarrow$ kampas statusis).

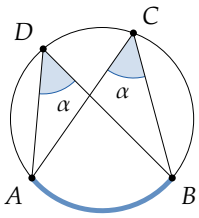
Pratimai 2 h)

Lankas nėra proporcingas stygai. Skersmuo $AB = 2r$ – lankas 180°; styga $CD = r$ – trikampis COD lygiakraštis, lankas 60°. $AB = 2CD$, bet $180° \neq 2 \cdot 60°$.

Pratimai 4 a)



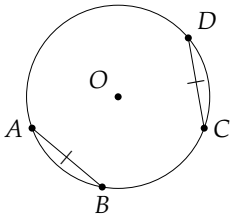
sąlyga



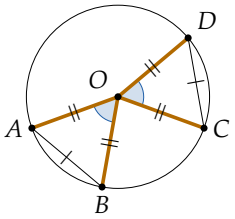
sprendimas

1. $\angle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \angle ADB$ (įbrėžtinis kampas). Jei lankai lygūs, lygios ir jų pusės.

Pratimai 4 b)



sąlyga

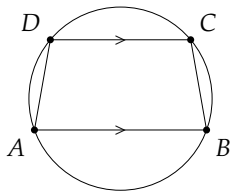


sprendimas

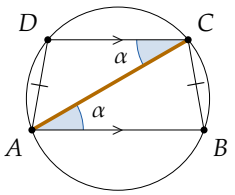
Jei bent viena styga – skersmuo, kiekviena iš lygybių $AB = CD$ ir $\angle AOB = \angle COD$ galioja tada ir tik tada, kai abi stygos – skersmenys (kitaip $CD < OC + OD = 2r$ – trikampio nelygybė); tuomet abu kampai po $180°$. Toliau stygos – ne skersmenys.

1. Jei $AB = CD$, tai $\triangle AOB = \triangle COD$ (trys kraštinės; $OA = OB = OC = OD = r$), todėl $\angle AOB = \angle COD$.
2. Jei $\angle AOB = \angle COD$, tai $\triangle AOB = \triangle COD$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $AB = CD$.

Pratimai 4 c)



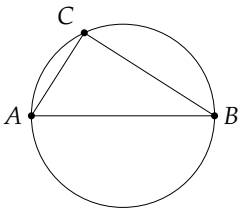
sąlyga



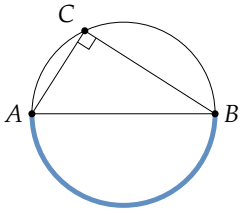
sprendimas

1. Pažymėkime $\angle BAC = \alpha$. Tada $\angle ACD = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai, $AB \parallel CD$).
2. Šie įbrėžtiniai kampai remiasi į lankus BC ir AD, todėl lankai lygūs (įbrėžtinis kampas) ir $AD = BC$ (lygios stygos).

Pratimai 4 d)



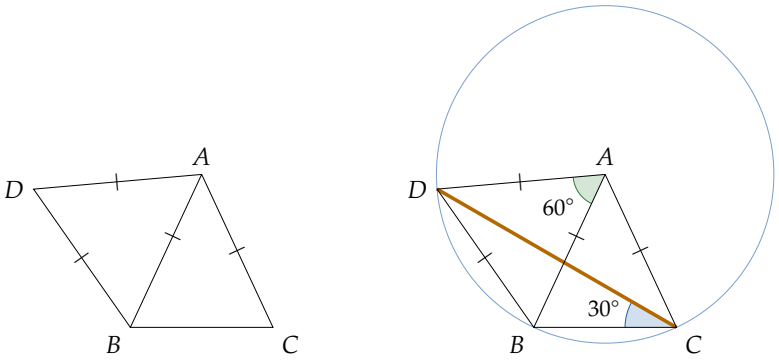
sąlyga



sprendimas

1. Skersmuo AB dalija apskritimą į du lankus po $180°$, todėl $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$ (įbrėžtinis kampas).

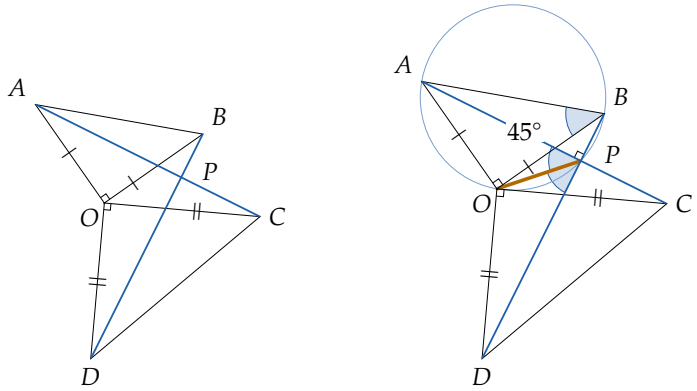
Pratimai 5 a)



sąlyga *sprendimas*

1. $AB = AC = AD$, todėl B, C, D – apskritime su centru A.
2. $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°$ (įbrėžtinis kampas; sąlygos $\angle BAC < 120°$ šiam sprendimui nereikia).

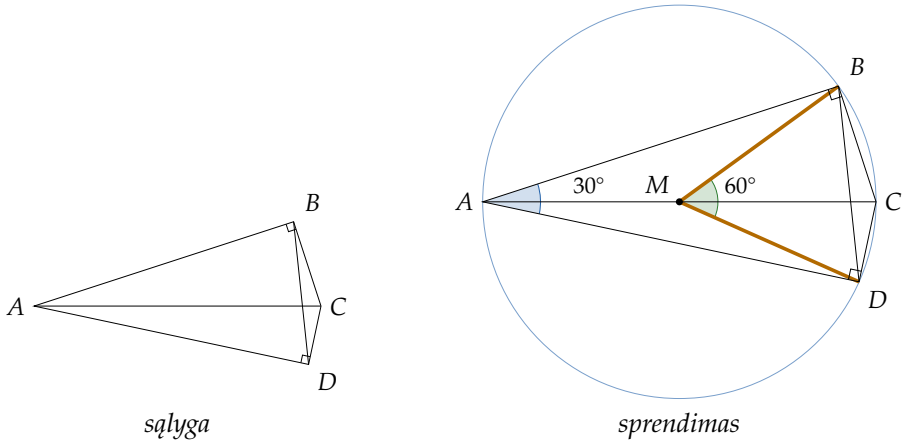
Pratimai 5 b)



sąlyga *sprendimas*

1. $\angle APB = \angle AOB = 90°$, todėl P ir O – apskritime su skersmeniu AB (kampas į skersmenį).
2. $\angle APO = \angle ABO = 45°$ (įbrėžtiniai kampai, remiasi į lanką AO; trikampis OAB lygiašonis statusis), $\angle OPD = 90° - 45° = 45°$, todėl PO – kampo APD pusiaukampinė.

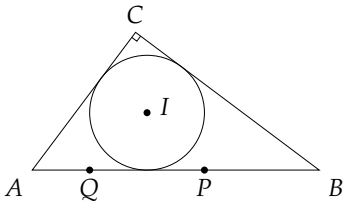
Pratimai 5 c)



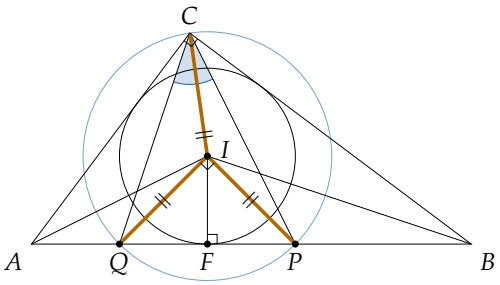
sąlyga *sprendimas*

1. B, D – apskritime su skersmeniu AC (kampas į skersmenį), M – jo centras.
2. $\angle BMD = 2\angle BAD = 60°$ (įbrėžtinis kampas), $MB = MD$, todėl trikampis MBD lygiakraštis: $BD = MB = \frac{1}{2}AC$.

Pratimai 5 d)



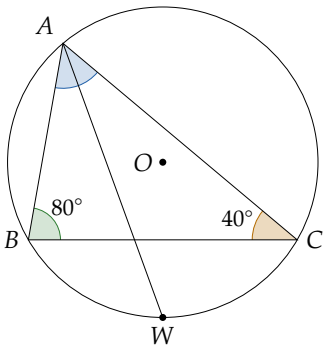
sąlyga



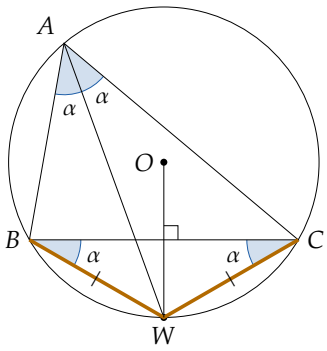
sprendimas

1. AI – lygiašonio trikampio APC pusiaukampinė, todėl ir atkarpos CP vidurio statmuo (lygiašonio pusiaukampinė ir aukštinė): $IP = IC$. Taip pat $IQ = IC$ (trikampis BQC).
2. I – trikampio PCQ apibrėžtinio apskritimo centras, todėl $\angle PIQ = 2\angle PCQ = 90°$ (įbrėžtinis kampas).
3. $IF = r$ (F – lietimosi taškas) – lygiašonio stačiojo trikampio PIQ aukštinė, kartu ir pusiaukraštinė: $PQ = 2IF = 2r$ (pusiaukraštinė į įžambinę).

6 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

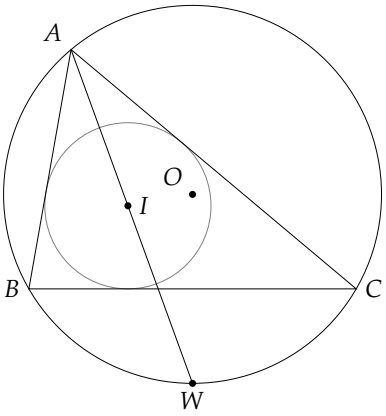
Ką matau. keturi taškai viename apskritime; pusiaukampinė iš A.

Idėja (T17). kampus prie A perkeliame į B ir C per lankus WC ir WB.

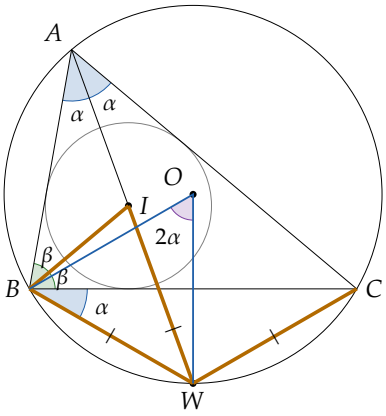
1. a) $\angle A = 180° - 80° - 40° = 60°$ (trikampio kampų suma). Pažymėkime $\angle BAW = \alpha$; $\angle WAC = \alpha = 30°$ (pusiaukampinė).
2. $\angle WBC = \angle WAC = \alpha$ (kampai į tą patį lanką WC); $\angle WCB = \angle WAB = \alpha$ (kampai į tą patį lanką WB).
3. $\angle BWC = 180° - 2\alpha = 120°$ (trikampio kampų suma).
4. b) Bet kuriame trikampyje $\alpha = \frac{1}{2}\angle A$, ir 2 žingsnis duoda $\angle WBC = \angle WCB = \alpha$, todėl $WB = WC$ (lygiašonio trikampio požymis).
5. $OB = OC$ (spinduliai), $WB = WC$, todėl O ir W yra atkarpos BC vidurio statmenyje (vidurio statmuo), t. y. $OW \perp BC$.

Pamoka. pusiaukampinė iš A kerta apskritimą lanko BC viduryje: $WB = WC$.

7 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

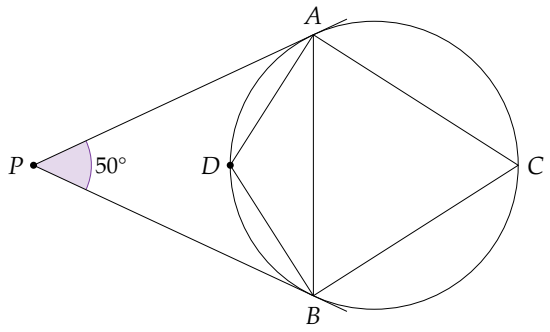
Ką matau. įbrėžtinio apskritimo centras ir apibrėžtinis apskritimas: AW – pusiaukampinė.

Idėja (T17). kampą BAW perkeliame į B per lanką WC; tada trikampis BWI turi du lygius kampus.

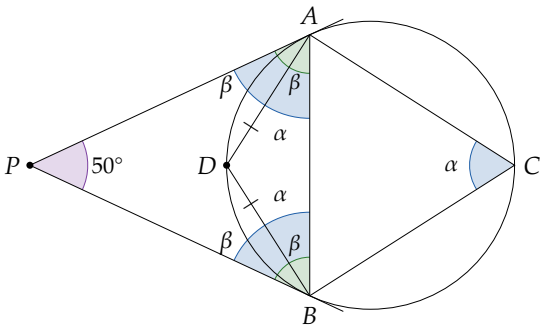
1. AI, BI – pusiaukampinės (I – įbrėžtinio apskritimo centras). Pažymėkime $\angle BAW = \angle WAC = \alpha$, $\angle ABI = \angle IBC = \beta$.
2. a) $\angle WBI = \angle WBC + \angle CBI = \angle WAC + \beta = \alpha + \beta$ (kampai į tą patį lanką WC).
3. $\angle WIB = \angle BAI + \angle ABI = \alpha + \beta$ (trikampio ABI priekampis).
4. $\angle WBI = \angle WIB$, todėl $WB = WI$ (lygiašonio trikampio požymis).
5. Į lankus WB ir WC remiasi lygūs įbrėžtiniai kampai α, todėl $WB = WC$ (lygios stygos). Taigi $WB = WI = WC$.
6. b) $\angle BOW = 2\alpha = 60°$ (įbrėžtinis kampas), $OB = OW = 5$ (spinduliai), todėl trikampis BOW lygiakraštis (lygiašonis su $60°$ kampu): $WI = WB = 5$.

Pamoka. taškas W vienodai nutolęs nuo B, C ir I: kampų gaudymas per lankus duoda lygiašonį trikampį.

8 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

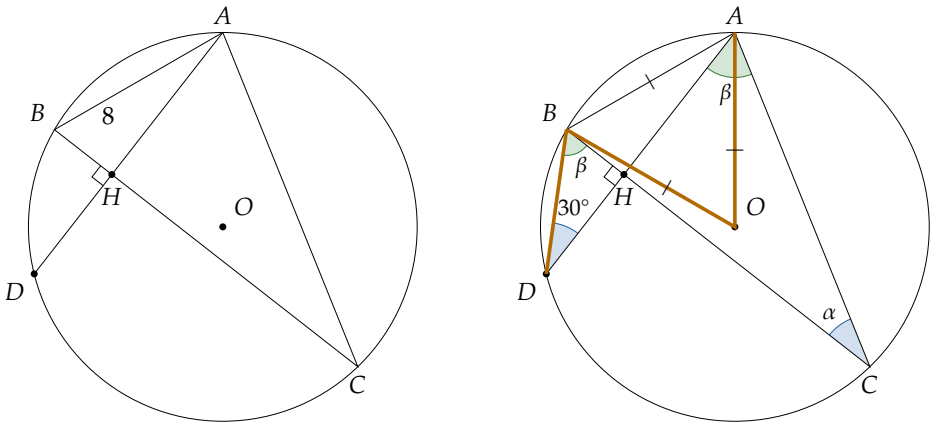
Ką matau. dvi liestinės ir stygos iš lietimosi taškų.

Idėja (T19). kampą tarp liestinės ir stygos keičiame įbrėžtiniu kampu į tą patį lanką.

1. a) $PA = PB$ (liestinių atkarpos), todėl $\angle PAB = \angle PBA$ (kampai prie pagrindo). Pažymėkime $\angle PAB = \alpha$; $\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ$ (trikampio kampų suma).
2. $\angle ACB = \angle PAB = \alpha = 65^\circ$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
3. b) Mažasis lankas $AB = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$ (įbrėžtinis kampas), didysis $= 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$. $\angle ADB$ remiasi į didįjį lanką, todėl $\angle ADB = \frac{1}{2} \cdot 230^\circ = 115^\circ$ (įbrėžtinis kampas).
4. c) $DA = DB$ (lygūs lankai – lygios stygos), todėl $\angle DAB = \angle ABD$ (kampai prie pagrindo); pažymėkime juos β.
5. $\angle PAD = \angle ABD = \beta$ (kampas tarp liestinės ir stygos AD). Taigi AD – kampo PAB pusiaukampinė.
6. Taip pat $\angle PBD = \angle BAD = \beta = \angle ABD$: BD – kampo PBA pusiaukampinė. D – pusiaukampinių susikirtimo taškas, t. y. įbrėžtinio apskritimo centras.

Pamoka. liestinė + styga iš lietimosi taško $\rightarrow$ įbrėžtinis kampas į tą patį lanką; lanko vidurys duoda lygias stygas.

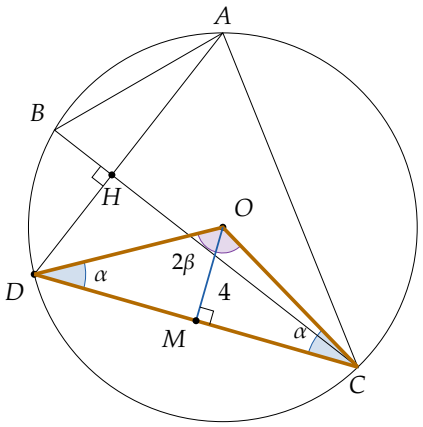
9 uždavinys.



Ką matau. styga, lygi spinduliui; aukštinė, pratęsta iki apskritimo.

Idėja (T17). centrinis kampas $\angle AOB$ duoda įbrėžtinį $\angle ACB$; kampus perkeliame per lanką CD.

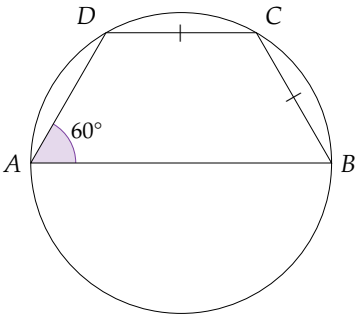
1. a) $OA = OB = AB = 8\,\text{cm}$, todėl trikampis OAB lygiakraštis ir $\angle AOB = 60°$.
2. Pažymėkime $\angle ACB = \alpha$; $\alpha = \frac{1}{2}\angle AOB = 30°$ (įbrėžtinis kampas; trikampis smailusis, todėl C – didžiajame lanke AB).
3. Pažymėkime $\angle CAD = \beta$; $\beta = 90° - \alpha = 60°$ (stačiojo trikampio AHC smailiųjų kampų suma).
4. $\angle CBD = \angle CAD = \beta = 60°$ (kampai į tą patį lanką CD).
5. b) Stačiajame trikampyje AHC statinis AH yra prieš kampą $\alpha = 30°$, todėl $AC = 2AH$ (statinis prieš 30° kampą).
6. Stačiajame trikampyje BHD: $\angle BDH = 90° - \beta = 30°$, todėl $BD = 2BH$ (statinis prieš 30° kampą).



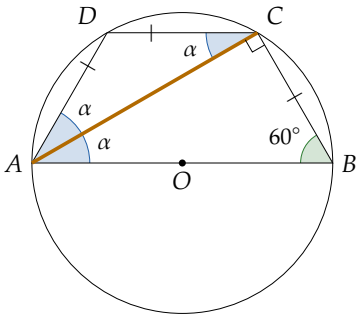
7. $\angle COD = 2\beta = 120°$ (įbrėžtinis kampas), $OC = OD$, todėl $\angle OCD = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$ (kampai prie pagrindo).
8. $OM \perp CD$ ($M \in CD$): $OM = \frac{1}{2}OC = 4\,\text{cm}$ (statinis prieš 30° kampą).

Pamoka. styga, lygi spinduliui, – lygiakraštis trikampis su centru, t. y. centrinis kampas 60° ir įbrėžtinis 30°.

10 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

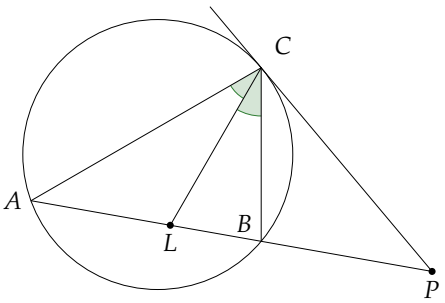
Ką matau. įbrėžtinė trapecija; lygios kraštinės $BC = CD$.

Idėja. trapecija lygiašonė (lygiagrečios stygos); įstrižainė AC – pusiaukampinė.

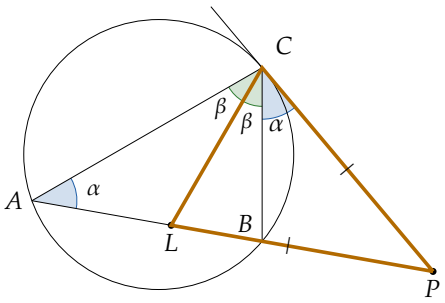
1. a) $AD = BC$ (lygiagrečios stygos atkerta lygius lankus; trapecija lygiašonė), todėl $AD = DC = CB$.
2. $\angle ABC = \angle BAD = 60°$ (lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo), $\angle ADC = \angle BCD = 180° - 60° = 120°$ (vidaus vienašaliai kampai, $AB \parallel CD$).
3. b) Pažymėkime $\angle CAD = \alpha$. Tada $\angle ACD = \alpha$ (kampai prie pagrindo, $AD = CD$), $\angle BAC = \angle ACD = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai), todėl $2\alpha = 60°$, $\alpha = 30°$.
4. $\angle ACB = 180° - 30° - 60° = 90°$ (trikampio kampų suma), todėl AB – skersmuo (kampas į skersmenį).
5. $\angle BAC = 30°$, todėl $AB = 2BC$ (statinis prieš $30°$ kampą).

Pamoka. įbrėžtinė trapecija – lygiašonė; trys lygios kraštinės ir $60°$ – pusė taisyklingojo šešiakampio.

11 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

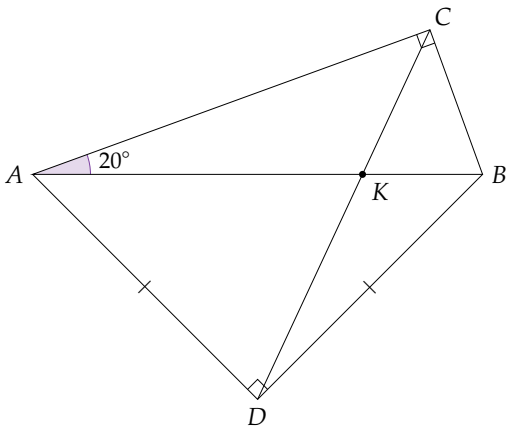
Ką matau. liestinė ir styga CB iš lietimosi taško; pusiaukampinė CL.

Idėja (T19). kampą tarp liestinės PC ir stygos CB keičiame įbrėžtiniu kampu $\angle A$.

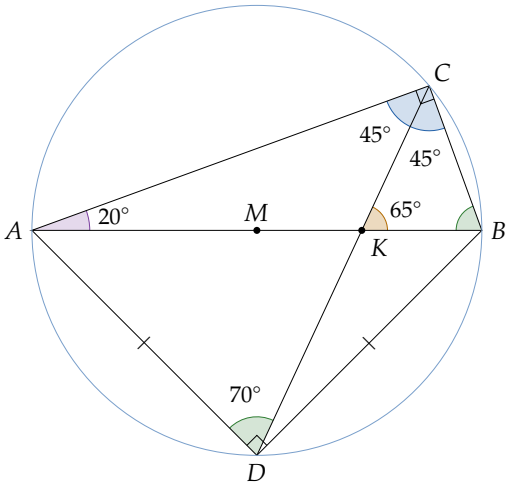
1. Pažymėkime $\angle A = \alpha$ ir $\angle ACL = \angle LCB = \beta$ (pusiaukampinė).
2. a) $\angle PCB = \angle CAB = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos), todėl $\angle PCL = \alpha + \beta$.
3. $\angle PLC = \angle LAC + \angle ACL = \alpha + \beta$ (trikampio ALC priekampis).
4. $\angle PCL = \angle PLC$, todėl $PC = PL$ (lygiašonio trikampio požymis).
5. b) $\alpha = 40°$, $\beta = 30°$: $\angle PCL = \angle PLC = 70°$, $\angle CPA = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. kampas tarp liestinės ir stygos + priekampis $\rightarrow$ du lygūs kampai, t. y. lygiašonis trikampis.

12 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

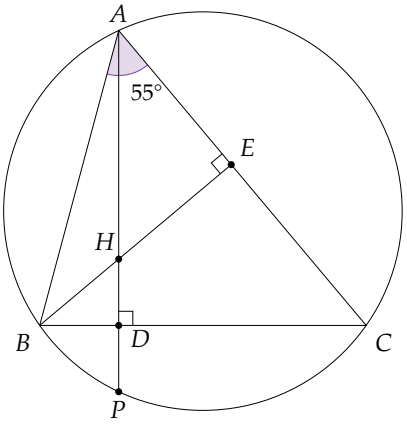
Ką matau. du statieji kampai ACB ir ADB, besiremiantys į tą pačią atkarpą AB.

Idėja (T18). C ir D – apskritime su skersmeniu AB; lygios stygos $DA = DB$.

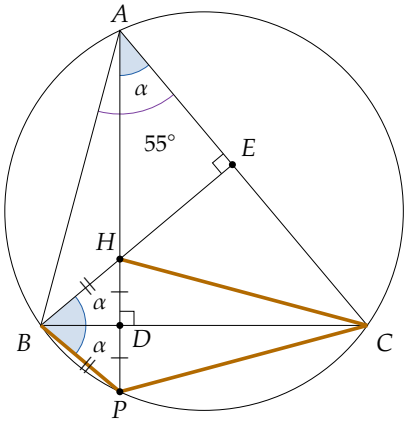
1. a) $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, todėl C, D – apskritime su skersmeniu AB (kampas į skersmenį).
2. $DA = DB$, todėl lankai DA ir DB (be taško C) lygūs (lygios stygos), ir $\angle ACD = \angle DCB$ (įbrėžtiniai kampai į lygius lankus): CD – pusiaukampinė, $\angle ACD = \angle DCB = 45°$.
3. b) $\angle CDA = \angle CBA = 90° - 20° = 70°$ (įbrėžtiniai kampai į tą patį lanką CA; stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma).
4. $\angle CKB = \angle CAK + \angle ACK = 20° + 45° = 65°$ (trikampio AKC priekampis).

Pamoka. du statieji kampai į tą pačią atkarpą – „nematomas“ apskritimas; jame lygios stygos duoda lygius įbrėžtinius kampus.

13 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

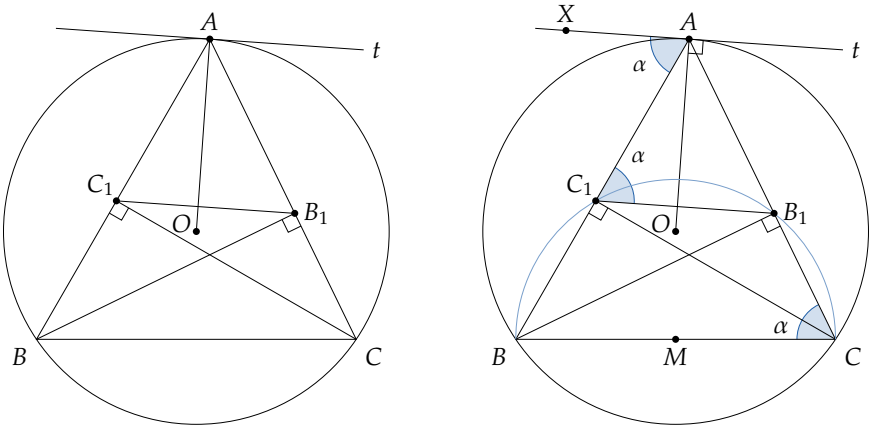
Ką matau. aukštinė AD pratęsta iki apskritimo; kampai CAP ir CBP remiasi į tą patį lanką CP.

Idėja (T17). kampą CAP perkeliame į CBP (tas pats lankas).

1. a) Pažymėkime $\angle HBD = \alpha$; $\alpha = \angle CAP = 90° - \angle ACB$ (kampas tarp aukštinės ir kraštinės, 3 lapas).
2. $\angle DBP = \angle CAP = \alpha$ (įbrėžtiniai kampai į lanką CP).
3. $\triangle BDH = \triangle BDP$ (bendras statinis BD ir smailusis kampas α), todėl $HD = DP$, $BH = BP$.
4. b) Lankas BC be taško A lygus $2 \cdot 55° = 110°$, todėl $\angle BPC = \frac{1}{2}(360° - 110°) = 125°$ (įbrėžtinis kampas).
5. $\triangle BHC = \triangle BPC$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $BH = BP$ iš a), $\angle HBC = \angle PBC = \alpha$, BC bendra), todėl $\angle BHC = \angle BPC = 125°$.

Pamoka. aukštinių susikirtimo taškas H, atspindėtas kraštinės BC atžvilgiu, atsiduria apskritime (taške P).

14 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

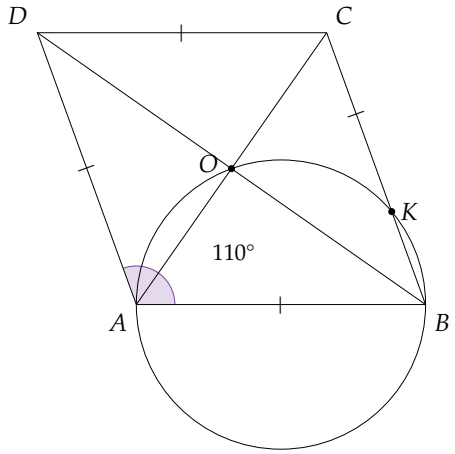
Ką matau. dvi aukštinės ir liestinė taške A.

Idėja (T18, T19). $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$; kampas tarp liestinės ir stygos AB – taip pat $\angle ACB$.

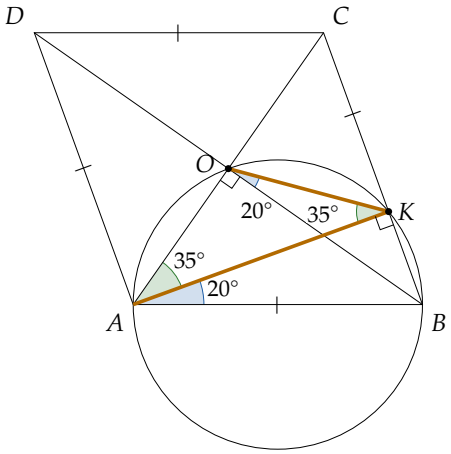
1. Pažymėkime $\angle ACB = \alpha$. $\angle AC_1B_1 = \alpha$ (B, C, B_1, C_1 – apskritime su skersmeniu BC; kaip pavyzdyje „Dvi aukštinės“).
2. X – liestinės t taškas kitoje AB pusėje nei C: $\angle XAB = \angle ACB = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
3. $\angle XAB = \angle AC_1B_1$ – vidaus priešiniai kampai prie kirstinės AB, todėl $t \parallel B_1C_1$ (lygiagretumo požymis).
4. $OA \perp t$ (liestinė statmena spinduliui), todėl $OA \perp B_1C_1$.

Pamoka. liestinė viršūnėje A lygiagreti atkarpai, jungiančiai dviejų aukštinių pagrindus; spindulys OA jai statmenas.

15 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

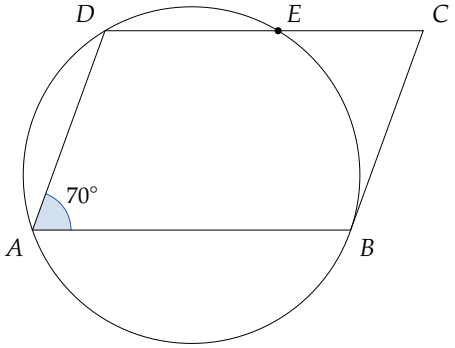
Ką matau. rombas – statmenos įstrižainės; apskritimas su skersmeniu AB.

Idėja (T18). statieji kampai AOB ir AKB remiasi į skersmenį; toliau – kampai į tą patį lanką.

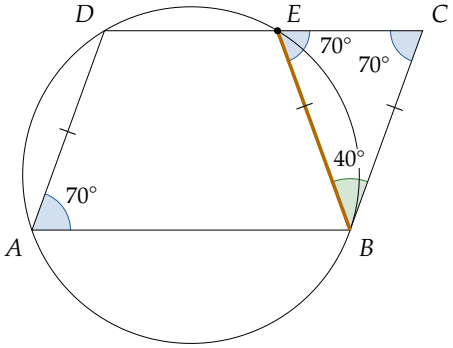
1. a) $\angle AOB = 90°$ (rombo įstrižainės statmenos), todėl O – apskritime su skersmeniu AB (kampas į skersmenį, atvirkščiai); $\angle AKB = 90°$ (kampas į skersmenį).
2. b) $\angle ABC = 180° - 110° = 70°$ (lygiagretainio gretimų kampų suma), $\angle KAB = 90° - 70° = 20°$ (stačiojo trikampio AKB smailiųjų kampų suma).
3. $\angle KOB = \angle KAB = 20°$ (kampai į tą patį lanką KB).
4. $\angle AKO = \angle ABO = 35°$ (kampai į tą patį lanką AO; rombo įstrižainė BD dalija $\angle ABC$ pusiau).
5. $\angle OAK = \angle OAB - \angle KAB = 55° - 20° = 35°$ (įstrižainė AC dalija $\angle BAD$ pusiau) $= \angle AKO$, todėl $OK = OA$ (lygiašonio požymis).

Pamoka. rombo įstrižainių susikirtimo taškas – apskritime, kurio skersmuo yra kraštinė; $OK = OA = OC$ – tai ir pusiaukraštinė į įžambinę stačiajame trikampyje AKC.

16 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

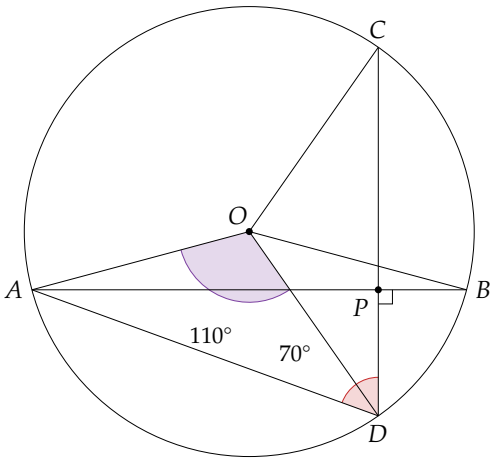
Ką matau. lygiagretainis ir apskritimas; E – tiesėje CD, todėl $DE \parallel AB$.

Idėja. lygiagrečios stygos $\longrightarrow$ lygiašonė trapecija.

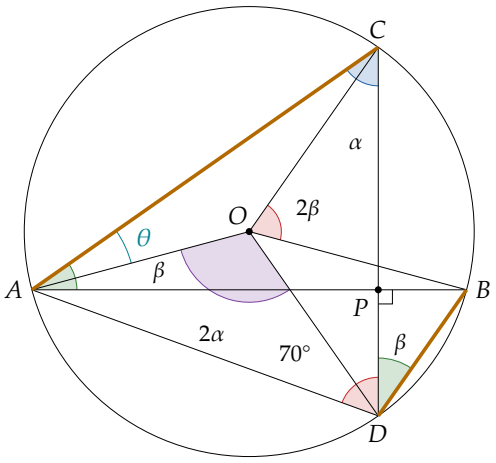
1. a) $DE \parallel AB$ ($ABCD$ – lygiagretainis), todėl $ABED$ – įbrėžtinė trapecija ir $BE = AD$ (lygiagrečios stygos).
2. $AD = BC$ (lygiagretainio priešingos kraštinės), todėl $BE = BC$.
3. b) $\angle BCE = \angle BAD = 70°$ (lygiagretainio priešingi kampai), $\angle BEC = \angle BCE = 70°$ (kampai prie pagrindo), $\angle EBC = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. E – taškas C, „atspindėtas“ statmens iš B į CD atžvilgiu: trikampis BEC lygiašonis.

17 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

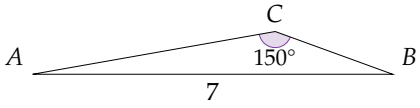
Ką matau. dvi statmenos stygos; centriniai kampai AOD ir BOC.

Idėja (T17). centrinius kampus keičiame įbrėžtiniais stačiajame trikampyje APC.

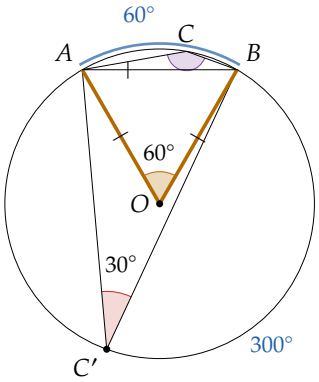
1. a) Pažymėkime $\angle ACD = \alpha$, $\angle CAB = \beta$; $\alpha + \beta = 90°$ (stačiojo trikampio APC smailiųjų kampų suma).
2. $\angle AOD = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$ (įbrėžtinis kampas), todėl $\angle AOD + \angle BOC = 2(\alpha + \beta) = 180°$.
3. b) $\angle BOC = 180° - 110° = 70°$, $\angle CDB = \frac{1}{2}\angle BOC = 35°$ (įbrėžtinis kampas).
4. $\angle AOC = 2\angle ADC = 140°$ (įbrėžtinis kampas); $OA = OC$; pažymėkime $\angle OAC = \theta$, tada $\theta = \frac{1}{2}(180° - 140°) = 20°$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma).

Pamoka. centrinį kampą pakeitus įbrėžtiniu (perpus mažesniu), kampai susirenka į vieną trikampį.

18 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

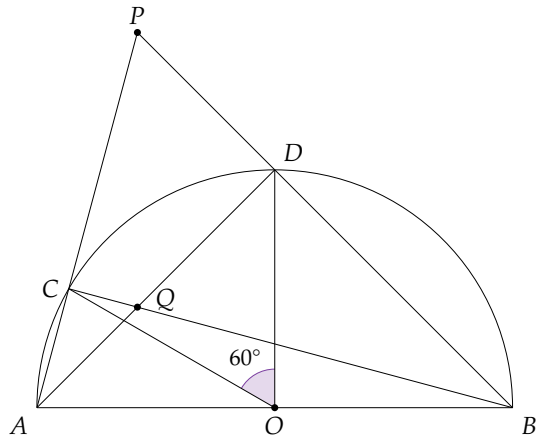
Ką matau. bukasis įbrėžtinis kampas ACB; ieškomas spindulys.

Idėja (T17). įbrėžtinis kampas → lankas → centrinis kampas AOB.

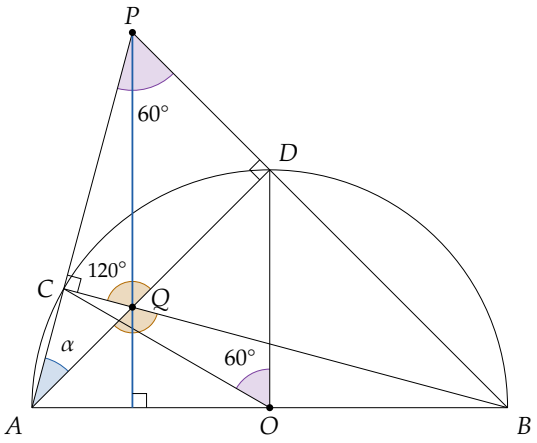
1. $\angle ACB = 150°$ remiasi į lanką AB be taško C, todėl tas lankas lygus $300°$ (įbrėžtinis kampas), o lankas AB su tašku C – $60°$.
2. $\angle AOB = 60°$, $OA = OB$ (spinduliai): trikampis AOB lygiakraštis (lygiašonis su $60°$ kampu), $R = AB = 7$.
3. Jei $\angle C = 30°$, jis remiasi į $60°$ lanką: vėl $\angle AOB = 60°$, $R = 7$ (taškas C tik kitame lanke).

Pamoka. bukasis įbrėžtinis kampas remiasi į didįjį lanką; kampai $150°$ ir $30°$ prie tos pačios stygos duoda tą patį apskritimą.

19 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

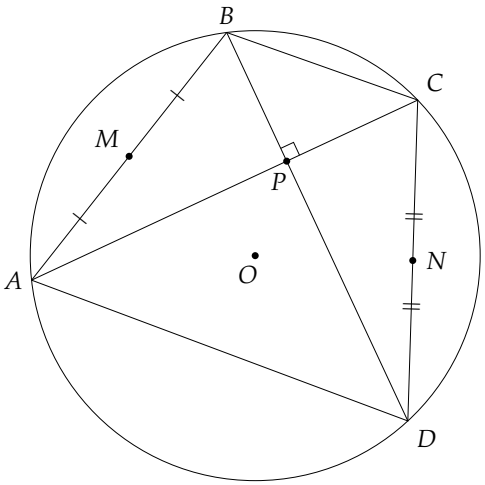
Ką matau. skersmuo AB ir kampai, besiremiantys į jį.

Idėja. stačiųjų kampų viršūnės C ir D – trikampio APB aukštinių pagrindai.

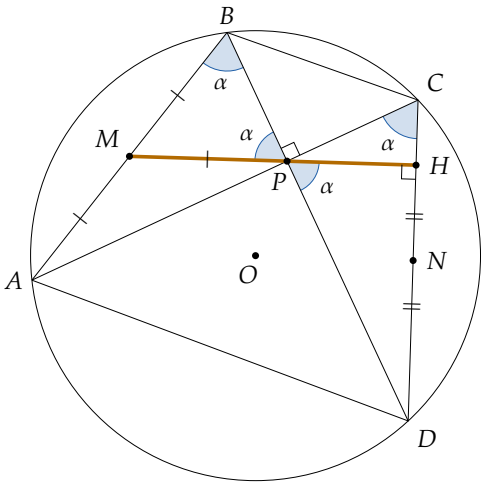
1. a) $\angle ADB = 90^\circ$ (kampas į skersmenį), todėl $\angle ADP = 90^\circ$ (gretutiniai kampai).
2. Pažymėkime $\angle CAD = \alpha$; $\alpha = \frac{1}{2}\angle COD = 30^\circ$ (įbrėžtinis kampas).
3. $\angle APB = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$ (stačiojo trikampio APD smailiųjų kampų suma).
4. b) $AD \perp PB$, $BC \perp PA$ (kampas į skersmenį): AD ir BC – trikampio APB aukštinės, Q – jų susikirtimo taškas. Trečioji aukštinė taip pat eina per Q (aukštinių tiesės kertasi viename taške), todėl $PQ \perp AB$.
5. c) $\angle AQB = \angle QAC + \angle ACQ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ (trikampio AQC priekampis; $\angle ACB = 90^\circ$ – kampas į skersmenį, $\angle QAC = \alpha$ iš a)).

Pamoka. kampai į skersmenį „pagamina“ aukštines; trečioji aukštinė eina per jų susikirtimo tašką.

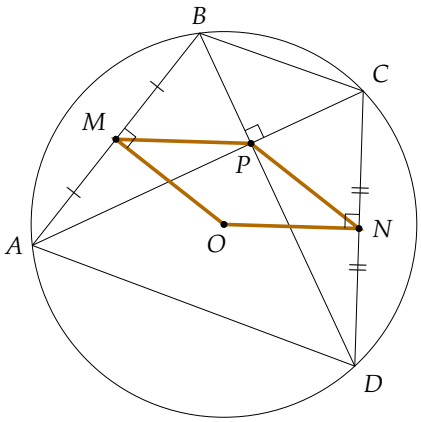
20 uždavinys.



sąlyga



sprendimas



sprendimas b)

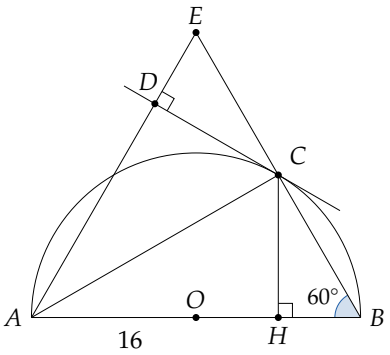
Ką matau. statmenos įstrižainės įbrėžtiniame keturkampyje; kraštinių viduriai.

Idėja (T11, T17). pusiaukraštinė į įžambinę duoda lygiašonį trikampį, kampą perkeliame per lanką AD; b) dalyje – dvi poros statmenų tiesių.

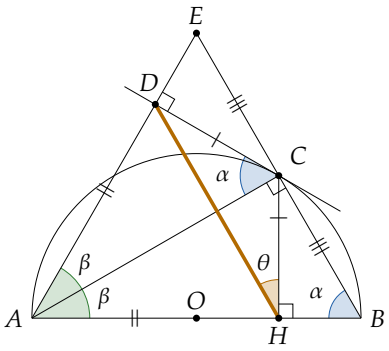
1. a) $MP = MA = MB$ (pusiaukraštinė į įžambinę, $\angle APB = 90°$), todėl $\angle MPB = \angle MBP$ (kampai prie pagrindo); pažymėkime juos α, čia $\alpha = \angle ABD$.
2. $\angle ACD = \angle ABD = \alpha$ (kampai į tą patį lanką AD).
3. H – tiesių MP ir CD susikirtimo taškas: $\angle DPH = \angle MPB = \alpha$ (kryžminiai kampai), $\angle PDC = 90° - \alpha$ (stačiojo trikampio CPD smailiųjų kampų suma), todėl $\angle PHD = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$ (trikampio kampų suma).
4. b) Taip pat (sukeitę trikampių APB ir CPD vaidmenis) $NP \perp AB$. $ON \perp CD$, $OM \perp AB$ (centras – stygos vidurio statmenyje).
5. $MP \parallel ON$ (abi statmenos CD), $NP \parallel OM$ (abi statmenos AB), todėl $OMPN$ – lygiagretainis.
6. Atstumas nuo O iki AB lygus $OM = PN$ (lygiagretainio priešingos kraštinės) $= \frac{1}{2}CD$ (pusiaukraštinė į įžambinę trikampyje CPD).

Pamoka. statmenos įstrižainės: pusiaukraštinė į vieną kraštinę statmena priešingai kraštinei; centras ir du viduriai sudaro lygiagretainį.

21 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

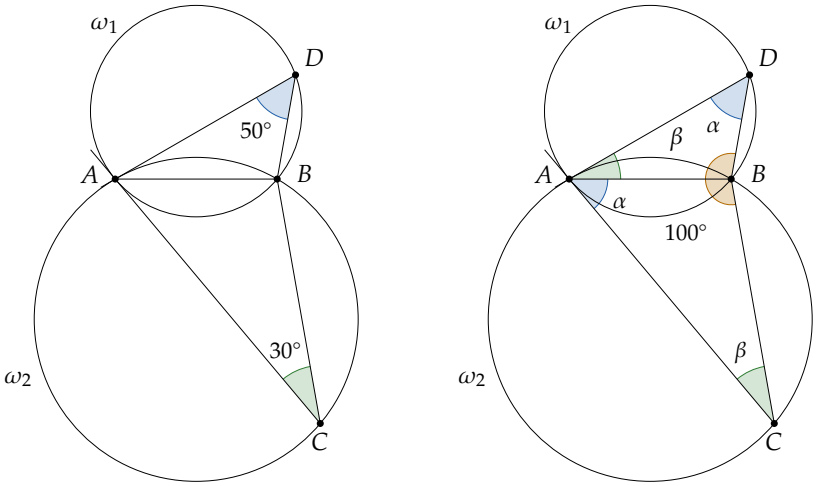
Ką matau. liestinė taške C ir styga CA; skersmuo AB.

Idėja (T19). kampas tarp liestinės ir stygos CA lygus įbrėžtiniam $\angle CBA$.

1. a) $\angle ACB = 90°$ (kampas į skersmenį); Pažymėkime $\angle DCA = \alpha$; $\angle CBA = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
2. Pažymėkime $\angle DAC = \beta$; $\beta = 90° - \alpha$ (stačiojo trikampio ADC smailiųjų kampų suma); $\angle CAB = 90° - \alpha = \beta$ (stačiasis trikampis ACB). Taigi AC – kampo DAB pusiaukampinė.
3. $\triangle ADC = \triangle AHC$ (įžambinė AC bendra ir smailusis kampas β), todėl $CD = CH$, $AD = AH$.
4. b) $\triangle ACE = \triangle ACB$ (kraštinė ir du kampai prie jos: AC bendra, $\angle CAE = \angle CAB = \beta$, $\angle ACE = \angle ACB = 90°$), todėl $AE = AB$, $CE = BC$.
5. $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$: $BC = \frac{1}{2}AB = 8$ (statinis prieš $30°$ kampą); $\angle HCB = 30°$, todėl $HB = \frac{1}{2}BC = 4\,\text{cm}$ (statinis prieš $30°$ kampą).
6. $AD = AH = 16 - 4 = 12\,\text{cm}$; $DE = AE - AD = 16 - 12 = 4\,\text{cm}$.
7. Trikampyje ADH: $AD = AH$, $\angle DAH = 2\beta = 60°$ – lygiakraštis (lygiašonis su $60°$ kampu), $\angle AHD = 60°$; pažymėkime $\angle DHC = \theta$: $\theta = 90° - 60° = 30°$.

Pamoka. liestinė ir skersmuo: kampas tarp liestinės ir stygos kartu su kampu į skersmenį duoda pusiaukampinę.

22 uždavinys.



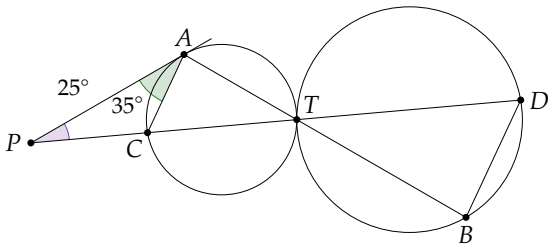
Ką matau. dvi liestinės taške A ir bendra styga AB.

Idėja (T19). kiekviename apskritime kampą tarp liestinės ir stygos AB keičiame įbrėžtiniu kampu.

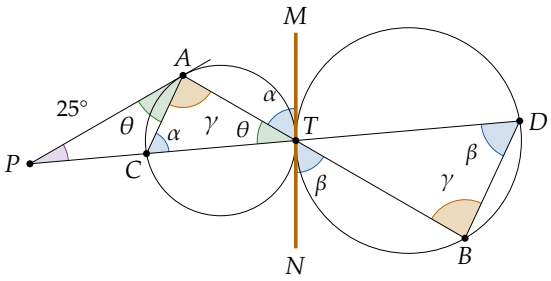
1. a) Pažymėkime $\angle ADB = \alpha$, $\angle ACB = \beta$. $AC - \omega_1$ liestinė, $AB - \omega_1$ styga, todėl $\angle CAB = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
2. $AD - \omega_2$ liestinė, $AB - \omega_2$ styga, todėl $\angle DAB = \beta$ (kampas tarp liestinės ir stygos).
3. $\angle ABD = 180° - \alpha - \beta = \angle ABC$ (trikampių ABD ir ABC kampų suma).
4. b) $\angle ABC = \angle ABD = 180° - 50° - 30° = 100°$; $\angle CAD = \alpha + \beta = 80°$; $\angle CBD = 360° - 100° - 100° = 160°$ (kampai aplink tašką B).

Pamoka. dvi liestinės – du kartus T19; trikampiuose ABD ir ABC tie patys kampai α ir β.

23 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

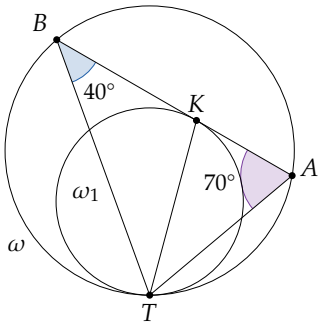
Ką matau. du apskritimai liečiasi taške T; stygos TA, TC ir TB, TD iš lietimosi taško.

Idėja (T19). bendra liestinė taške T: kiekviename apskritime – kampas tarp liestinės ir stygos.

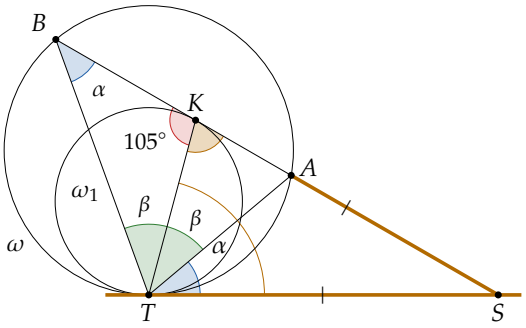
1. a) Per T nubrėžiame abiejų apskritimų bendrą liestinę MN.
2. Pažymėkime $\angle MTA = \alpha$; $\angle TCA = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos, pirmasis apskritimas). Pažymėkime $\angle NTB = \beta$; $\angle TDB = \beta$ (kampas tarp liestinės ir stygos, antrasis apskritimas).
3. $\alpha = \beta$ (kryžminiai kampai), todėl $\angle TCA = \angle TDB$ – vidaus priešiniai kampai prie kirstinės CD: $AC \parallel BD$ (lygiagretumo požymis).
4. b) $\angle ACT = \angle PAC + \angle APC = 35° + 25° = 60°$ (trikampio PAC priekampis), todėl $\angle BDT = \angle ACT = 60°$ (vidaus priešiniai kampai, $AC \parallel BD$).
5. Pažymėkime $\angle ATC = \theta$; $\theta = \angle PAC = 35°$ (kampas tarp liestinės ir stygos). Pažymėkime $\angle TAC = \gamma$; $\gamma = 180° - 35° - 60° = 85°$ (trikampio ATC kampų suma).
6. $\angle TBD = \angle TAC = 85°$ (vidaus priešiniai kampai prie kirstinės AB).

Pamoka. du apskritimai, kurie liečiasi, – bendra liestinė lietimosi taške „sujungia“ jų kampus.

24 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. apskritimai liečiasi taške T; tiesė AB liečia ω_1.

Idėja (T19, liestinių atkarpos). bendroji liestinė taške T: liestinių atkarpos iš S ir kampas tarp liestinės ir stygos.

1. a) Bendroji liestinė taške T kerta tiesę AB taške S (tegu A – tarp S ir K). $ST = SK$ (liestinių atkarpos į ω_1), todėl $\angle STK = \angle SKT$ (kampai prie pagrindo).
2. Pažymėkime $\angle STA = \alpha$; $\angle TBA = \alpha$ (kampas tarp liestinės ir stygos, apskritimas ω).
3. $\angle STK = \alpha + \angle ATK$; $\angle SKT = \alpha + \angle KTB$ (trikampio TKB priekampis).
4. Todėl $\angle ATK = \angle KTB$; pažymėkime juos β: TK – kampo ATB pusiaukampinė.
5. b) $\angle ATB = 180° - 70° - 40° = 70°$, $\beta = 35°$; $\angle TKB = 180° - 35° - 40° = 105°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. apskritimai, kurie liečiasi, – bendroji liestinė; iš jos taško – lygios liestinių atkarpos.