Geometrija

Mišinys 2

9 klasė

Šiame lape uždaviniai neturi temos: kuriuo keliu eiti, sprendžiate patys. Naudotis galima tik tuo, kas yra įrankių dėžėje (1, 2, 2b, 2c, 3 ir 4 lapai).

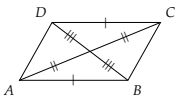
Įrankių dėžė

1–2 lapų faktai.

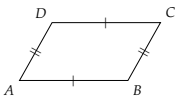
- **Kampai**: gretutinių suma 180°, aplink tašką 360°; kryžminiai lygūs. **Lygiagrečios** ir kirstinė: atitinkamieji ir vidaus priešiniai kampai lygūs, vienašalių suma 180°, ir atvirkščiai.
- **Kampų sumos**: trikampio 180°; priekampis – dviejų negretimų kampų suma; stačiojo trikampio smailiųjų 90°; n-kampio $(n-2)\cdot 180°$; iškilojo daugiakampio priekampių 360°; **laužtė tarp lygiagrečių**: jei viršūnė tarp tiesių, galai – skirtingose tiesėse, vienoje statmens per viršūnę pusėje, tai kampas viršūnėje lygus kampų prie tiesių sumai.
- **Trikampių lygumas**: dvi kraštinės ir kampas tarp jų; kraštinė ir du kampai; trys kraštinės.
- **Lygiašonis**: kampai prie pagrindo lygūs ir atvirkščiai; pusiaukampinė iš viršūnės = pusiaukraštinė = aukštinė; **pusiaukampinė + lygiagreti tiesė**: jei BL – trikampio ABC pusiaukampinė, o tiesė per L, lygiagreti BC, kerta AB taške K, tai $KB = KL$. **Lygiakraštis**: kampai po 60°; lygiašonis su 60° – lygiakraštis.

2b–2c lapų įrankiai (lygiagretainis, vidurio linija, trapecija).

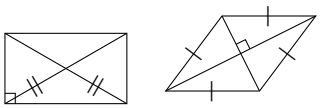
10. **Lygiagretainio savybės**: priešingos kraštinės ir kampai lygūs, gretimų kampų suma 180°; įstrižainės dalija viena kitą pusiau.



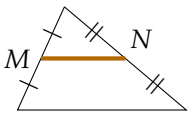
11. **Lygiagretainio požymiai** (iškilasis keturkampis): priešingos kraštinės poromis lygios; viena pora lygi ir lygiagreti; įstrižainės dalija viena kitą pusiau; priešingi kampai poromis lygūs.

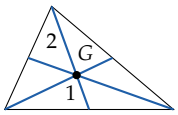


12–13. **Stačiakampis** – lygiagretainis su lygiomis įstrižainėmis (požymiai: statusis kampas arba lygios įstrižainės). **Rombas** – lygiagretainis, kurio įstrižainės statmenos ir dalija kampus pusiau (požymiai: gretimos kraštinės lygios arba įstrižainės statmenos).

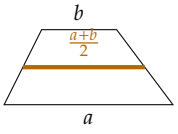


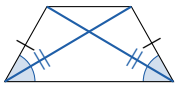
14–15. **Vidurio linija** $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}BC$; ir atvirkščiai: tiesė per kraštinės vidurį, lygiagreti kitai kraštinei, eina per trečiosios vidurį. **Pusiaukraštinės** kertasi taške G, kuris dalija kiekvieną santykiu 2 : 1 nuo viršūnės.



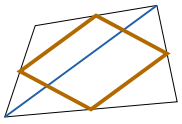


16–17. **Trapecijos vidurio linija** lygiagreti pagrindams ir lygi $\frac{a+b}{2}$. **Lygiašonė trapecija**: kampai prie pagrindo lygūs, įstrižainės lygios (ir atvirkščiai).



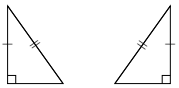


Lygių atkarpų teorema: lygiagrečios tiesės, atkertančios lygias atkarpas vienoje kirstinėje, atkerta lygias ir kitoje. **Varinjonas**: keturkampio kraštinių viduriai – lygiagretainio viršūnės (jo kraštinės lygiagrečios įstrižainėms ir lygios jų pusėms).

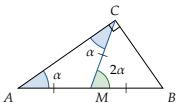


3–4 lapų įrankiai.

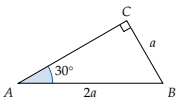
18. **Statieji lygūs**: du statiniai; statinis ir atitinkamas smailusis kampas; įžambinė ir smailusis kampas; **įžambinė ir statinis**.



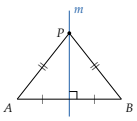
19. **Pusiaukraštinė į įžambinę**: M – kraštinės AB vidurys; $\angle C = 90° \Leftrightarrow CM = \frac{1}{2}AB$. Išvada: ji **padvigubina kampą** – $\angle ACM = \alpha$, $\angle CMB = 2\alpha$ ($\alpha = \angle A$).



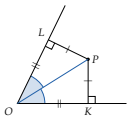
20. **Statinis prieš 30° kampą**: kai $\angle C = 90°$, $\angle A = 30° \Leftrightarrow BC = \frac{1}{2}AB$.



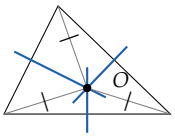
21. **Vidurio statmuo**: $PA = PB \Leftrightarrow P$ yra atkarpos AB vidurio statmenyje (nutolęs vienodai nuo **taškų**).

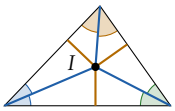


22. **Pusiaukampinė**: P kampo **viduje**, K, L – statmenų iš P į kraštines pagrindai: $PK = PL \Leftrightarrow P$ pusiaukampinėje (nutolęs vienodai nuo **tiesių**). Tada ir $OK = OL$.

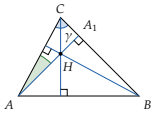


23. **Susikirtimo taškai**: vidurio statmenys – taške O ($OA = OB = OC$); pusiaukampinės – taške I (vienodai nutolęs nuo kraštinių).

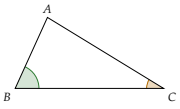




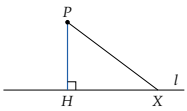
24. **Aukštinių tiesės** kertasi viename taške H. Smailiajame trikampyje kampas tarp aukštinės AA_1 ir kraštinės AC lygus $90° - \gamma$ ($\gamma = \angle C$).



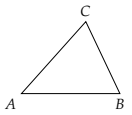
25. **Prieš didesnę kraštinę – didesnis kampas**: $AC > AB \Leftrightarrow \angle B > \angle C$ (statusis ar bukasis kampas – prieš ilgiausią kraštinę).



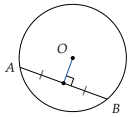
26. **Statmuo trumpesnis už pasvirąją**: $PH < PX$.



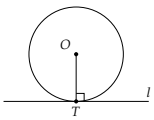
27. **Trikampio nelygybė**: $AC \le AB + BC$; lygybė – tik kai B atkarpoje AC (trikampyje $AC < AB + BC$; laužtė ne trumpesnė už atkarpą).



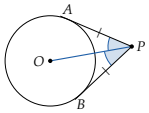
28. **Styga ir centras**: statmuo iš centro į stygą dalija ją pusiau; atkarpa iš centro į stygos (ne skersmens) vidurį jai statmena.



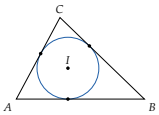
29. **Liestinė ir spindulys**: O – centras, T – apskritimo taškas, tiesė l eina per T: l – liestinė $\Leftrightarrow OT \perp l$.



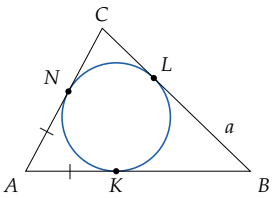
30. **Liestinių atkarpos**: iš taško P nubrėžtos dvi liestinės: $PA = PB$, PO – kampo APB pusiaukampinė.

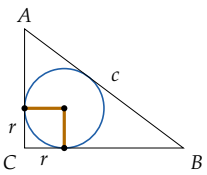


31. **Įbrėžtinio apskritimo centras** I – pusiaukampinių susikirtimo taškas.



32. **Iki lietimosi taško**: $AK = AN = p - a$ (K, N – lietimosi taškai, p – pusperimetris, $a = BC$). Stačiajame ($\angle C = 90°$, c – įžambinė) liestinių atkarpos prie stačiojo kampo lygios r, todėl $r = p - c$. Apibrėžtinio keturkampio $ABCD$ priešingų kraštinių sumos lygios: $AB + CD = BC + DA$.

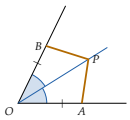




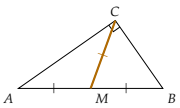
Technikos (signalas → veiksmas).

- **T1.** Daug kampų → α, β, kitus per juos (**kampų gaudymas**).
- **T2.** Kampus perkelti ar surinkti → **papildoma lygiagreti tiesė**.
- **T3.** Reikia lygių atkarpų ar kampų → **lygūs trikampiai**.
- **T4.** Pusiaukraštinė → **pratęskite ją tiek pat**.
- **T5.** Atkarpų suma ar skirtumas → **atidėkite lygią atkarpą**.
- **T6.** Pusiaukraštinė ar atkarpos vidurys → pratęskite dvigubai – **užbaikite iki lygiagretainio**; atkarpą ar kampą perkelkite lygiagrečiai.
- **T7.** Lygiagretainis ir taškas ar atkarpa per įstrižainių susikirtimą → **centras** O (atkarpa per O dalijama pusiau).
- **T8.** Du viduriai (vidurys ir lygiagretumas, „pusė“) → **vidurio linija** trikampyje, kuriame jie – kraštinių viduriai.
- **T9.** Trapecijos šoninės kraštinės ar įstrižainės atskirtos nuo pagrindų → **perkelkite lygiagrečiai** (gausite lygiagretainį ir trikampį).

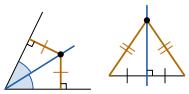
T10. Pusiaukampinė, o lyginti reikia abiejose kampo pusėse → atidėkite $OB = OA$ (**atspindys per pusiaukampinę**).



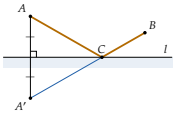
T11. Statusis kampas ir įžambinės vidurys (ar bendra įžambinė) → **sujunkite vidurį su stačiojo kampo viršūne**. Pusiaukraštinė lygi pusei kraštinės → ieškokite stačiojo kampo.



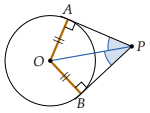
T12. Taškas pusiaukampinėje → **statmenys į kraštines**; vidurio statmenyje → **sujunkite su atkarpos galais**. Ir atvirkščiai.



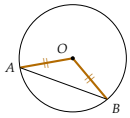
T13. Atkarpų suma, trumpiausias kelias → **ištiesinkite laužtę** (atidėkite, pratęskite, atspindėkite – ir tiesės atžvilgiu) ir palyginkite su atkarpa.



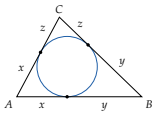
T14. Liestinė → **spindulys į lietimosi tašką** (statusis kampas); dvi liestinės → $PA = PB$.



T15. Styga ir centras → **statmuo iš centro į stygą** (dalija pusiau) arba spinduliai į stygos galus (lygiašonis).



T16. Apskritimas liečia kraštines → liestinių atkarpas iš vienos viršūnės žymėkite viena raide (x, y, z).



I. Apšilimas

1. Trikampyje ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $AB = 16\,\text{cm}$. Raskite BC.

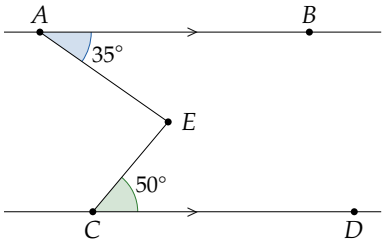
2. Trikampyje ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 35°$, $AB = 26\,\text{cm}$; M – kraštinės AB vidurio taškas. Raskite CM ir $\angle CMB$.

3. Taškas M vienodai nutolęs nuo atkarpos AB galų: $MA = 2x + 3$, $MB = 5x - 9$ (cm). Raskite x ir MA.

4. Dvi trikampio kraštinės yra 8 cm ir 13 cm. Kiek sveikųjų reikšmių (cm) gali turėti trečioji kraštinė?

5. Apskritimo centras O, styga $AB = 20\,\text{cm}$, spindulys 15 cm. Iš O nubrėžtas statmuo OM į AB ($M \in AB$). Raskite AM ir trikampio OAB perimetrą.

6. Tiesės AB ir CD lygiagrečios; taškas E yra tarp jų. $\angle BAE = 35°$, $\angle DCE = 50°$ (B ir D – ta pačia kryptimi nuo A ir C, žr. brėžinį). Raskite $\angle AEC$.



II. Pagrindas

7. Trikampyje ABC $AB = 10$, $AC = 12$, $BC = 9$. I – trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas. Per I nubrėžta tiesė, lygiagreti BC, kerta AB taške M, o AC – taške N. Raskite trikampio AMN perimetrą.

8. O – apskritimo centras, A – apskritimo taškas. Atkarpos OA vidurio statmuo kerta apskritimą; C – vienas iš susikirtimo taškų. Tiesė OC kerta apskritimo liestinę, nubrėžtą per tašką A, taške P. Įrodykite, kad C – atkarpos OP vidurio taškas.

9. Trikampio ABC perimetras 20, $BC = 7$, $\angle A = 60°$. Įbrėžtinis apskritimas liečia kraštines BC, CA, AB taškuose D, E, F. Raskite EF ir $\angle EDF$.

10. Trikampyje ABC $\angle A = 120°$, $BC = 28$, $AB + AC = 32$. I – įbrėžtinio apskritimo centras. Raskite AI ir $\angle BIC$.

11. Stačiajame trikampyje ABC ($\angle ACB = 90°$) pažymėtas statinio BC vidurio taškas O. Apskritimas su centru O ir spinduliu $OB = OC$ kerta įžambinę AB jos vidiniame taške D.

a) Įrodykite, kad $CD \perp AB$.
b) Šio apskritimo liestinė, nubrėžta per tašką D, kerta statinį AC taške M. Įrodykite, kad M – statinio AC vidurio taškas, ir raskite MD, jei $AC = 14$.

12. Stačiajame trikampyje ABC ($\angle C = 90°$) CH – aukštinė. Į trikampius ACH, BCH ir ABC įbrėžtų apskritimų spinduliai r_1, r_2, r, centrai I_1, I_2, I.

a) Įrodykite, kad $r_1 + r_2 + r = CH$.
b) Raskite CH, jei $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $r = 5$.
c) Raskite $\angle I_1CI_2$.

13. Smailiajame trikampyje ABC BD ir CE – aukštinės ($D \in AC$, $E \in AB$). Įrodykite, kad $DE < BC$.

14. Trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$) įstrižainės – AC ir BD.

a) Įrodykite, kad $AC + BD > AD + BC$.
b) Ar gali trapecijos įstrižainės būti 5 ir 7, o pagrindai – 4 ir 9?

15. Trikampyje ABC $\angle B = 2\angle C$. Įrodykite, kad $AC < 2AB$.

16. Stačiajame trikampyje ABC ($\angle ACB = 90°$) nubrėžta kampo BAC pusiaukampinė AD ($D \in BC$).

a) Įrodykite, kad $BD > CD$.
b) Įrodykite, kad $AB < AC + BD < AB + CD$.

17. Taškas M yra trikampio ABC kraštinės BC vidurio taškas. Apskritimas su centru M liečia kraštinę AC jos gale A. Žinoma, kad $AB = 16$ ir $\angle BAM = 60°$.

a) Raskite šio apskritimo spindulį.
b) Spindulį AM pratęsus už centro M, jis antrą kartą kerta apskritimą taške D. Įrodykite, kad tiesė BD – šio apskritimo liestinė.

18. Lygiagretainio $ABCD$ kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške P, esančiame kraštinėje CD.

a) Įrodykite, kad $AB = 2AD$ ir $\angle APB = 90^\circ$.
b) Įrodykite, kad apskritimas su centru P, liečiantis tiesę AB, liečia ir tieses AD bei BC.
c) M – kraštinės AB vidurys. Įrodykite, kad $AMPD$ – rombas.

III. Rask klaidą

19. Mokinys sprendė uždavinį: „Trikampyje ABC nubrėžta aukštinė AD ($D \in BC$). Įrodykite, kad AD – kampo A pusiaukampinė.“ Jo sprendimas:

1) Trikampiuose ABD ir ACD $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ (AD – aukštinė).
2) Kraštinė AD bendra.
3) Trikampiai lygūs, todėl $\angle BAD = \angle CAD$, t. y. AD – pusiaukampinė. ■

Raskite klaidą. Ar teiginys teisingas?

20. Mokinys sprendė uždavinį: „Taškas P yra kampo A pusiaukampinėje, B ir C – skirtingų kampo kraštinių taškai (ne viršūnė A). Įrodykite, kad $PB = PC$.“ Jo sprendimas:

1) Taškas P yra kampo A pusiaukampinėje (duota).
2) Pusiaukampinės taškas vienodai nutolęs nuo kampo kraštinių.
3) Vadinasi, P vienodai nutolęs nuo B ir C: $PB = PC$. ■

Raskite klaidą. Ar teiginys teisingas?

IV. Iššūkiai

21. $\angle XOY = 15^\circ$. Spindulyje OX yra taškas A, $OA = 8$. Iš A reikia nueiti iki kurio nors spindulio OY taško M, o iš ten – iki kurio nors spindulio OX taško N. Raskite trumpiausio tokio kelio $AM + MN$ ilgį.

22. Trikampyje ABC $AB < AC$; AL – pusiaukampinė, AM – pusiaukraštinė (L,$M \in BC$). Įrodykite, kad $AL < AM$.

23. $\angle XOY = 60^\circ$. Trys apskritimai liečia abi kampo kraštines; kiekvienas paskesnis yra toliau nuo O ir didesnis. Pirmasis ir antrasis apskritimai liečiasi taške T_1, antrasis ir trečiasis – taške T_2; abu taškai yra kampo pusiaukampinėje. Pirmojo apskritimo spindulys 2. Raskite antrojo ir trečiojo apskritimų spindulius ir atstumą OT_2.

24. Taškas P yra lygiakraščio trikampio ABC viduje.

a) Įrodykite, kad iš atkarpų PA, PB, PC galima sudaryti trikampį.
b) Ar gali būti $PA = 7$, $PB = 3$, $PC = 4$?

Papildomi (norintiems)

25. Trikampio ABC viršūnėje C nubrėžta priekampio pusiaukampinė – tiesė ℓ. P – bet kuris tiesės ℓ taškas, $P \neq C$. Įrodykite, kad $PA + PB > CA + CB$.

26. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 60^\circ$. Į keturkampį įbrėžtas apskritimas su centru O (liečia visas keturias kraštines); jis liečia kraštinę AB taške K.

a) Įrodykite, kad $\angle AOB = 90^\circ$ ir $BK = 3AK$.
b) Raskite kraštinės AB ilgį ir keturkampio $ABCD$ perimetrą, jei $OA = 6$ ir $CD = 11$.

Uždavinių atsakymai

1. $BC = 8$ cm.
2. $CM = 13$ cm; $\angle CMB = 70°$.
3. $x = 4$; $MA = 11$ cm.
4. 15 (nuo 6 iki 20).
5. $AM = 10$ cm; perimetras 50 cm.
6. 85°.
7. 22.
8. Įrodymas.
9. $EF = 3$, $\angle EDF = 60°$.
10. $AI = 4$, $\angle BIC = 150°$.
11. a), b) įrodymai; $MD = 7$.
12. a) Įrodymas; b) 12; c) 45°.
13. Įrodymas – lapo gale.
14. a) įrodymas – lapo gale; b) negali.
15. Įrodymas – lapo gale.
16. a), b) įrodymai – lapo gale.
17. a) 4; b) įrodymas – lapo gale.
18. Įrodymas – lapo gale.
19. Klaida 3) žingsnyje: lygumui trūksta trečiojo elemento (turime tik kampą ir kraštinę). Teiginys klaidingas: aukštinė yra pusiaukampinė tik lygiašoniame trikampyje ($AB = AC$).
20. Klaida 3) žingsnyje: atstumas iki kraštinės – statmens ilgis, o ne atstumas iki bet kurio kraštinės taško. Teiginys klaidingas: $PB = PC$ tik kai P yra atkarpos BC vidurio statmenyje.
21. 4.
22. Įrodymas – lapo gale.
23. 6 ir 18; $OT_2 = 18$.
24. a) Įrodymas – lapo gale; b) negali.
25. Įrodymas – lapo gale.
26. a) Įrodymas – lapo gale; b) $AB = 12$, perimetras 46.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) Statusis trikampis ir kampas, susijęs su 30°. 2) Raskite $\angle A$; kuris statinis yra prieš jį?
2. 1) Atkarpa iš stačiojo kampo viršūnės į įžambinės vidurį. 2) Kam ji lygi ir kokį kampą sudaro su įžambine?
3. 1) „Vienodai nutolęs nuo galų“ – ką tai sako apie atstumus? 2) Sulyginkite MA ir MB.
4. 1) Trečioji kraštinė ribojama iš abiejų pusių. 2) Ji mažesnė už kitų dviejų sumą ir didesnė už jų skirtumą.
5. 1) Statmuo iš centro į stygą. 2) OA ir OB – kas jie apskritimui?
6. 1) Laužtė tarp dviejų lygiagrečių tiesių. 2) Kampas laužtės viršūnėje lygus kampų prie lygiagrečių sumai (arba per E nubrėžkite tiesę, lygiagrečią AB).
7. 1) Pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė – ieškokite lygiašonio trikampio. 2) Nubrėžkite BI ir

CI; kurios atkarpos lygios MI ir NI?

8. 1) Taškas vidurio statmenyje – kuo jis ypatingas? Ir kokio ilgio OC? 2) Įrodykite, kad $\triangle OAC$ lygiakraštis; tada stačiajame $\triangle OAP$ raskite $\angle P$.

9. 1) Kokio ilgio liestinių atkarpos iš viršūnės A? Koks trikampis AEF? 2) $AF = AE = p - a$; $\angle EDF$ raskite iš lygiašonių trikampių BDF ir CDE.

10. 1) Kokio ilgio liestinių atkarpos iš A? Ar jas galima rasti, nežinant AB ir AC atskirai? 2) Nubrėžkite spindulį IF į lietimosi tašką F kraštinėje AB; raskite AF ir kampus trikampyje AFI.

11. 1) OB, OC, OD – apskritimo spinduliai; b) dalyje statinis AC statmenas spinduliui OC jo gale C. 2) a) Nubrėžkite OD ir pritaikykite pusiaukraštinės į įžambinę požymį trikampiui BDC; b) įrodykite, kad MC ir MD – liestinių atkarpos iš taško M, ir raskite kampus stačiajame trikampyje ADC.

12. 1) Visi trys trikampiai statieji; kam lygus stačiojo trikampio įbrėžtinio apskritimo spindulys? 2) Kiekvienam trikampiui užrašykite $r = p - c$ (c – įžambinė) ir sudėkite.

13. 1) Du statieji trikampiai su bendra įžambine BC – kuris taškas vienodai nutolęs nuo B, C, D ir E? 2) Sujunkite kraštinės BC vidurį M su D ir E ir pažiūrėkite į trikampį MDE.

14. 1) Įstrižainės AC ir BD „atskirtos“ – sudėkite jas į vieną trikampį. 2) Per C nubrėžkite tiesę, lygiagrečią BD; ji kerta tiesę AD taške E. Koks keturkampis $BCED$?

15. 1) Dvigubas kampas ir dviguba kraštinė. 2) Kraštinės CB tęsinyje už B atidėkite $BD = BA$ ir sujunkite A su D.

16. 1) Taškas D yra kampo BAC pusiaukampinėje ir $DC \perp AC$. 2) Iš taško D nuleiskite statmenį DH į įžambinę AB.

17. 1) AM yra ir spindulys, statmenas liestinei AC, ir trikampio ABC pusiaukraštinė. 2) AD – pusiaukraštinė, pratęsta tiek pat ($MD = MA$): sujunkite D su B.

18. 1) Pusiaukampinė AP ir kraštinei AB lygiagreti tiesė CD – kokie trikampiai susidaro? 2) a) Trikampiai ADP ir BCP lygiašoniai; b) P – dviejų kampų pusiaukampinėse; c) PM – stačiojo trikampio APB pusiaukraštinė.

19. 1) Kuris trikampių lygumo požymis čia būtų taikomas? 2) Pabandykite nubraižyti trikampį, kuriame aukštinė akivaizdžiai ne pusiaukampinė.

20. 1) Kas yra „atstumas nuo taško iki tiesės“, o kas – „atstumas iki taško B“? 2) Patikrinkite pavyzdį su $\angle A = 90^\circ$.

21. 1) Trumpiausias kelias su atšokimu nuo tiesės. 2) Atspindėkite A tiesės OY atžvilgiu (taškas A') ir sujunkite A' su M.

22. 1) Kraštines AL ir AM trikampyje ALM palyginsite per kampus prieš jas. 2) Kraštinėje AC atidėkite $AB' = AB$ ir sujunkite L su B'.

23. 1) Kur yra apskritimo, liečiančio abi kampo kraštines, centras? Kokį kampą su kraštine sudaro pusiaukampinė? 2) Atstumą OT_1 užrašykite dviem būdais – per pirmąjį ir per antrąjį apskritimą.

24. 1) PA, PB, PC išsibarstę – jas reikia suburti į vieną trikampį. 2) Nubrėžkite lygiakraštį $\triangle BPQ$ (Q kitoje BC pusėje nei A) ir sujunkite Q su C.

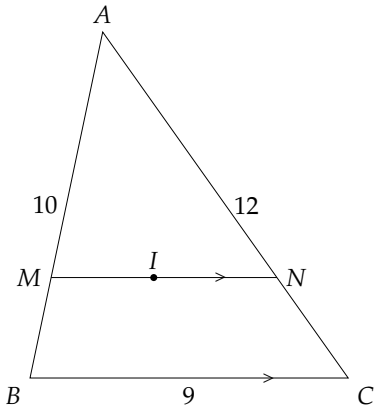
25. 1) Suma $CA + CB$ „sulūžusi“ ties C – ištiesinkite ją vienoje tiesėje. 2) Kraštinės BC tęsinyje už C atidėkite $CA' = CA$ ir sujunkite P su A'.

26. 1) $AD \parallel BC$: kampai DAB ir ABC vienašaliai; apskritimas liečia abi kiekvieno iš jų kraštines. 2) a) Sujunkite O su A, B ir nubrėžkite spindulį OK; b) apibrėžtinio keturkampio $AD + BC = AB + CD$.

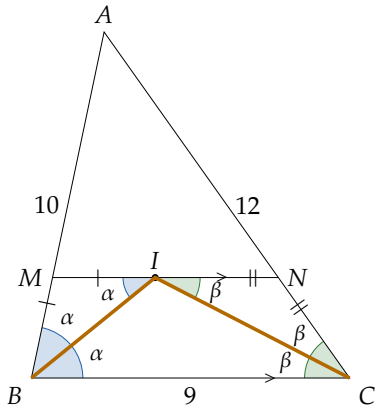
Sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

7 uždavinys.



sąlyga



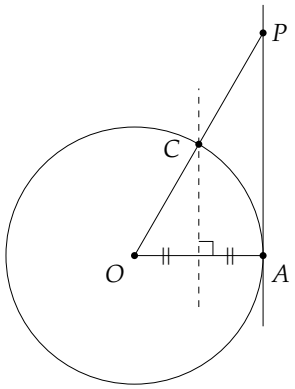
sprendimas

Ką matau. pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė – lygiašonis trikampis.

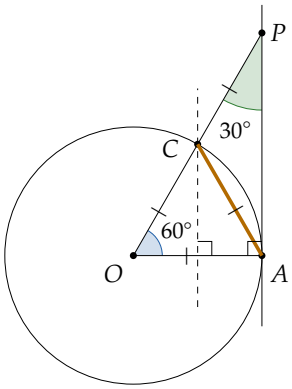
Idėja. papildomos linijos BI ir CI.

1. BI, CI – pusiaukampinės (pusiaukampinių susikirtimas), pažymėkime $\angle CBI = \angle IBM = \alpha$, $\angle ICB = \angle NCI = \beta$. Kadangi $MN \parallel BC$, tai $\angle MIB = \alpha$, $\angle NIC = \beta$ (vidaus priešiniai kampai), todėl $MI = MB$, $NI = NC$ (pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė).
2. $P_{AMN} = AM + MI + IN + NA = (AM + MB) + (AN + NC) = AB + AC = 22$ (BC nereikalinga).

8 uždavinys.



sąlyga



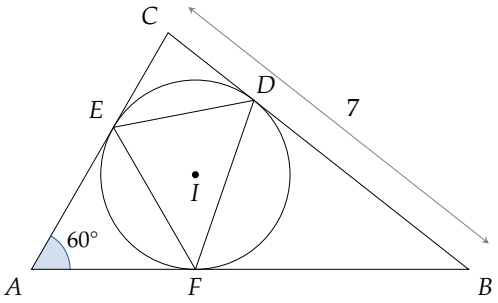
sprendimas

Ką matau. vidurio statmuo ir spinduliai – lygios atkarpos; liestinė – statusis kampas.

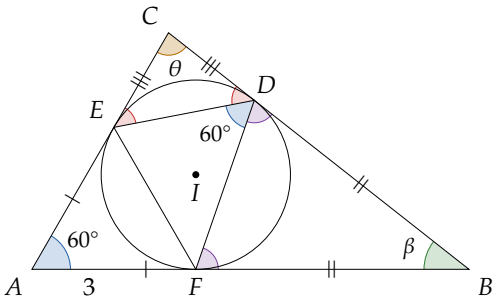
Idėja. lygiakraštis trikampis $\rightarrow$ 30° kampas.

1. $CA = CO$ (vidurio statmuo), $CO = OA$ (spinduliai), todėl $\triangle OAC$ lygiakraštis, $\angle AOP = 60°$ (lygiakraštis trikampis).
2. $OA \perp AP$ (liestinė statmena spinduliui), todėl $\angle APO = 30°$ (stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma) ir $OA = \frac{1}{2}OP$ (statinis prieš 30° kampą).
3. $OC = OA = \frac{1}{2}OP$, C – atkarpoje OP, todėl C – atkarpos OP vidurio taškas.

9 uždavinys.



sąlyga



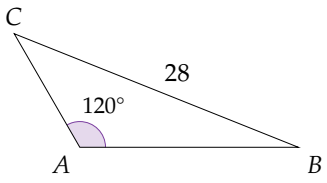
sprendimas

Ką matau. liestinių atkarpos iš viršūnių – trys lygiašoniai trikampiai prie viršūnių.

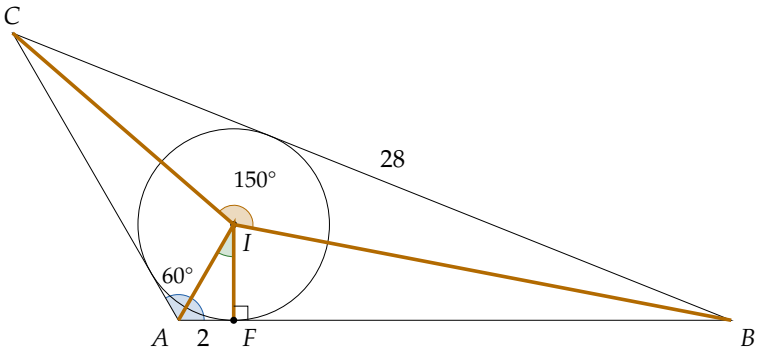
Idėja (T16). $AE = AF = p - a$. Pažymėkime $\angle A = \alpha = 60°$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \theta$.

1. $AF = AE = p - a = 10 - 7 = 3$ (atkarpa nuo viršūnės iki lietimosi taško); $\triangle AEF$ lygiašonis su $60°$ kampu, todėl lygiakraštis: $EF = 3$.
2. $BD = BF$, $CD = CE$ (liestinių atkarpos), todėl $\angle BDF = \frac{180°-\beta}{2}$, $\angle CDE = \frac{180°-\theta}{2}$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma).
3. $\angle EDF = 180° - \angle BDF - \angle CDE = \frac{\beta+\theta}{2} = \frac{180°-60°}{2} = 60°$ (gretutiniai kampai; trikampio kampų suma).

10 uždavinys.



sąlyga



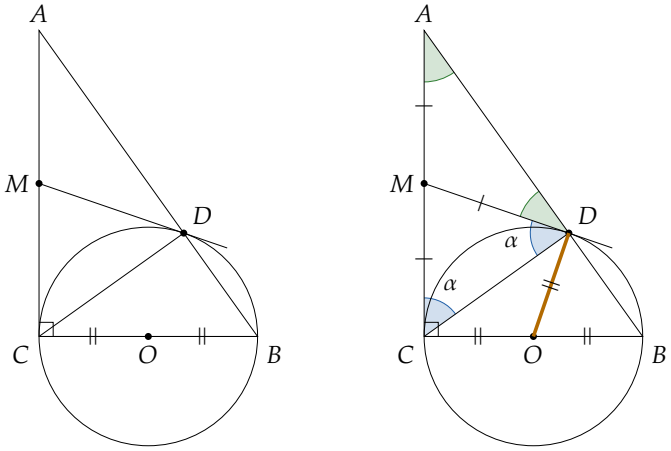
sprendimas

Ką matau. įbrėžtinis apskritimas ir žinoma $AB + AC$ – atkarpa iki lietimosi taško.

Idėja (T14). spindulys IF į lietimosi tašką – statusis trikampis su $60°$ kampu. Pažymėkime $\angle B = \beta$, $\angle C = \theta$.

1. F – lietimosi taškas kraštinėje AB. $AF = p - a = \frac{32+28}{2} - 28 = 2$ (atkarpa nuo viršūnės iki lietimosi taško).
2. AI – kampo A pusiaukampinė (pusiaukampinių susikirtimas), $\angle IAF = 60°$; $IF \perp AB$ (liestinė statmena spinduliui), todėl $\angle AIF = 30°$ (stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma) ir $AF = \frac{1}{2}AI$ (statinis prieš $30°$ kampą): $AI = 4$.
3. $\angle IBC + \angle ICB = \frac{\beta+\theta}{2} = \frac{180°-120°}{2} = 30°$ (pusiaukampinės; trikampio kampų suma), todėl $\angle BIC = 150°$ (trikampio kampų suma).

11 uždavinys.



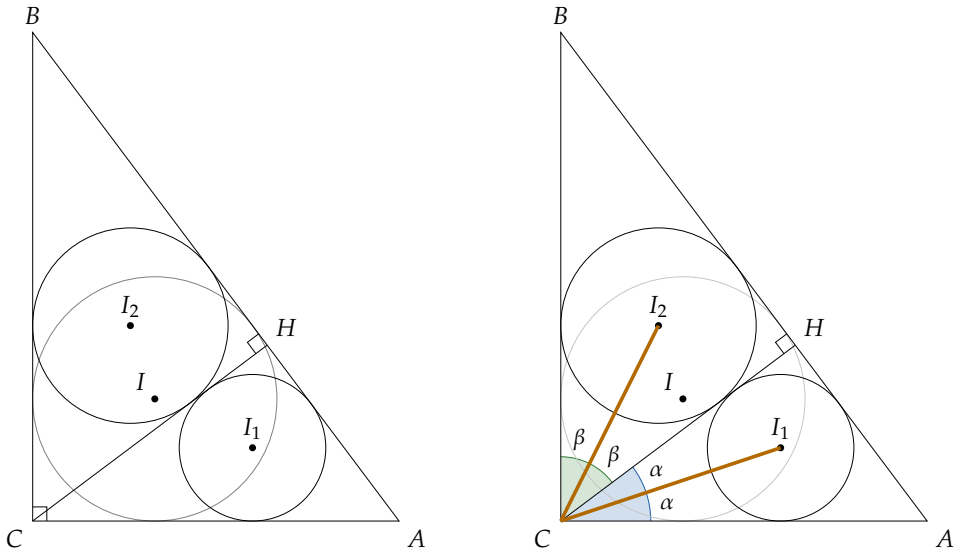
sąlyga *sprendimas*

Ką matau. stačiojo trikampio įžambinė ir jos vidurys – pusiaukraštinė; liestinė iš taško – lygios atkarpos.

Idėja (T11). $OD = OB = OC$.

1. a) Trikampyje BDC pusiaukraštinė DO lygi pusei kraštinės BC ($OD = OB = OC$ – spinduliai), todėl $\angle BDC = 90°$ (pusiaukraštinė į įžambinę, atvirkščiai): $CD \perp AB$.
2. b) $AC \perp OC$, todėl AC – apskritimo liestinė taške C (liestinės požymis); $MD = MC$ (liestinių atkarpos).
3. $\angle MDC = \angle MCD$ (kampai prie pagrindo, $MD = MC$); pažymėkime juos α.
4. $\angle ADC = 90°$ (a dalis); $\angle MAD = 90° - \alpha$ (stačiojo trikampio ADC smailiųjų kampų suma), $\angle MDA = 90° - \alpha$.
5. $\angle MAD = \angle MDA$, todėl $MA = MD$ (lygiašonio požymis).
6. $MA = MC = MD$: M – statinio AC vidurio taškas, $MD = \frac{1}{2}AC = 7$.

12 uždavinys.



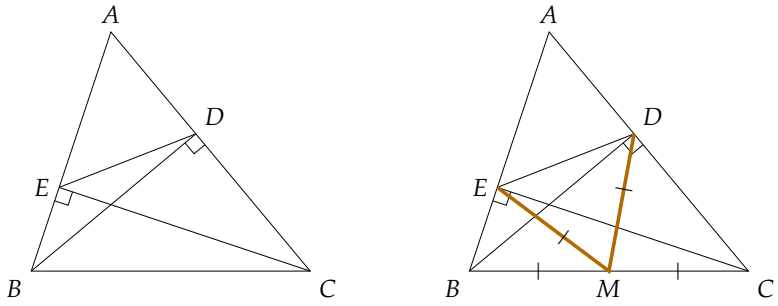
sąlyga *sprendimas*

Ką matau. trys statieji trikampiai su įbrėžtiniais apskritimais.

Idėja. stačiajame trikampyje $r = p - c$.

1. a) $\triangle AHC, \triangle BHC, \triangle ACB$ statieji (įžambinės AC, BC, AB), todėl $r_1 = \frac{AH+CH-AC}{2}$, $r_2 = \frac{BH+CH-BC}{2}$, $r = \frac{AC+BC-AB}{2}$ (stačiajame trikampyje $r = p - c$). Sudėję: $r_1 + r_2 + r = \frac{AH+BH+2CH-AB}{2} = CH$, nes $AH + HB = AB$.
2. b) $CH = 3 + 4 + 5 = 12$.
3. c) Pažymėkime $\angle ACI_1 = \angle I_1CH = \alpha$, $\angle HCI_2 = \angle I_2CB = \beta$ (pusiaukampinių susikirtimas); $2\alpha + 2\beta = 90°$, todėl $\angle I_1CI_2 = \alpha + \beta = 45°$.

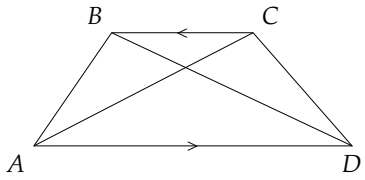
13 uždavinys.



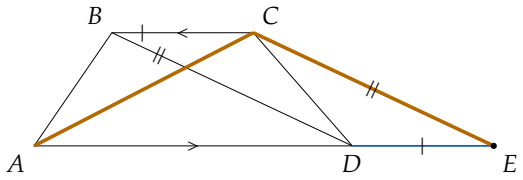
sąlyga *sprendimas*

1. M – BC vidurys. Statieji trikampiai BDC ir BEC turi bendrą įžambinę BC, todėl $MD = ME = \frac{1}{2}BC$ (pusiaukraštinė į įžambinę).
2. $DE < MD + ME = BC$ (trikampio nelygybė).

14 uždavinys.



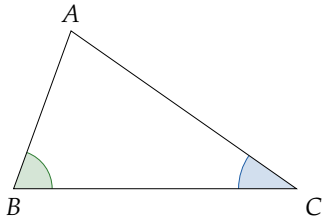
sąlyga



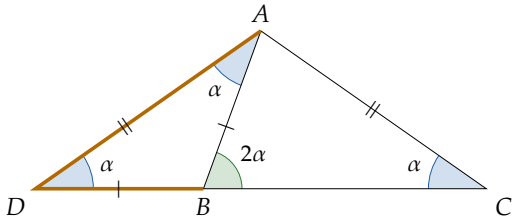
sprendimas

1. Per C nubrėžiame $CE \parallel BD$ (E – tiesėje AD). $BCED$ – lygiagretainis ($BC \parallel DE$, $CE \parallel BD$), todėl $CE = BD$, $DE = BC$ (priešingos kraštinės).
2. a) $AC + CE > AE$ (trikampio nelygybė, trikampis ACE), $AE = AD + DE = AD + BC$, todėl $AC + BD > AD + BC$.
3. b) $5 + 7 = 12 < 4 + 9$ – negali.

15 uždavinys.



sąlyga

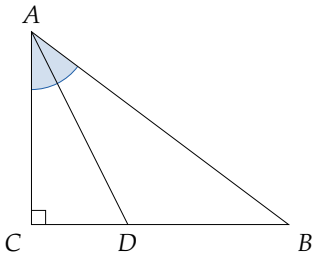


sprendimas

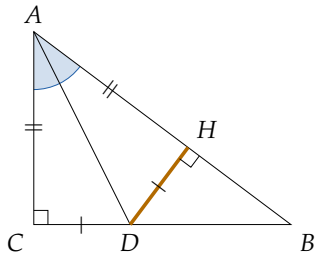
Pažymėkime $\angle C = \alpha$. Tada $\angle ABC = 2\alpha$.

1. Kraštinės CB tęsinyje už B atidedame $BD = BA$. $\angle BDA = \angle BAD$ (kampai prie pagrindo), $\angle BDA + \angle BAD = 2\alpha$ (priekampis), todėl $\angle BDA = \angle BAD = \alpha$.
2. $\triangle ADC$: $\angle ADC = \angle ACD = \alpha$, todėl $AD = AC$ (lygiašonio požymis).
3. $\triangle ABD$: $AD < AB + BD = 2AB$ (trikampio nelygybė), todėl $AC < 2AB$.

16 uždavinys.



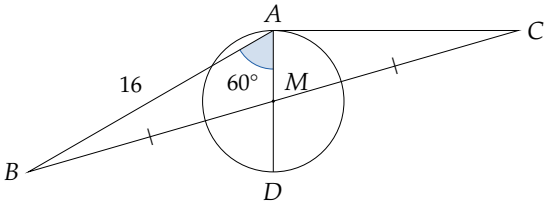
sąlyga



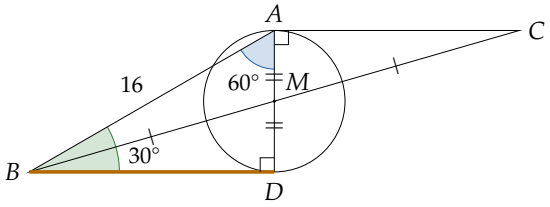
sprendimas

1. $DH \perp AB$. $DH = DC$, $AH = AC$ (D kampo A pusiaukampinėje, $DC \perp AC$; taškas pusiaukampinėje).
2. a) $BD > DH = CD$ (statmuo trumpesnis už pasvirąją).
3. b) $BH = AB - AH = AB - AC$. $BD > BH = AB - AC$ (statmuo trumpesnis už pasvirąją), todėl $AC + BD > AB$.
4. $BD < BH + DH = AB - AC + CD$ (trikampio nelygybė), todėl $AC + BD < AB + CD$.

17 uždavinys.



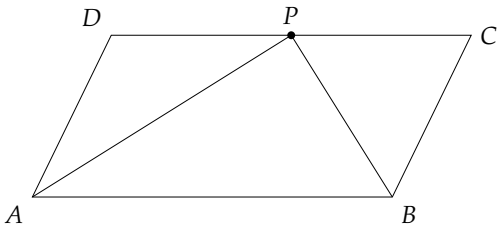
sąlyga



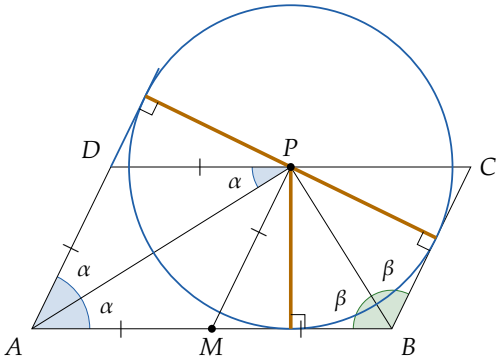
sprendimas

1. $MA \perp AC$ (liestinė statmena spinduliui).
2. $\triangle AMC = \triangle DMB$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $MC = MB$, $MA = MD$, kryžminiai kampai), todėl $\angle MDB = \angle MAC = 90°$.
3. b) $BD \perp MD$ spindulio gale D, todėl BD – liestinė (tiesė, statmena spinduliui jo gale, – liestinė).
4. a) $\triangle ABD$: $\angle ADB = 90°$, $\angle BAD = 60°$, todėl $\angle ABD = 30°$ (stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma).
5. $AD = \frac{1}{2}AB = 8$ (statinis prieš 30°); AD – skersmuo, todėl $r = 4$.

18 uždavinys.



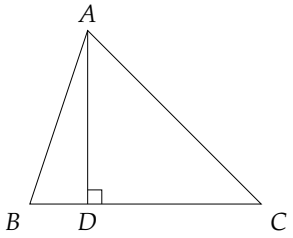
sąlyga



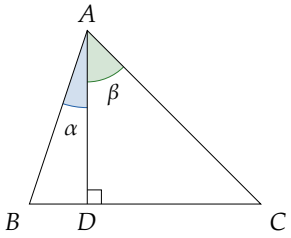
sprendimas

1. a) AP, BP – pusiaukampinės, $CD \parallel AB$, todėl $DP = DA$, $CP = CB$ (pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė).
2. $AB = CD = DP + PC = AD + BC = 2AD$ (lygiagretainio priešingos kraštinės lygios).
3. Pažymėkime $\angle BAP = \angle PAD = \alpha$, $\angle CBP = \angle PBA = \beta$. Tada $2\alpha + 2\beta = 180°$ (lygiagretainio gretimų kampų suma), todėl $\angle APB = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$ (trikampio kampų suma).
4. b) P – kampų A ir B pusiaukampinėse, todėl vienodai nutolęs nuo tiesių AD, AB, BC (taškas pusiaukampinėje): statmenys iš P į jas lygūs spinduliui r.
5. Kiekviena iš šių tiesių statmena spinduliui jo gale, todėl liečia apskritimą (liestinė ir spindulys).
6. c) $PM = \frac{1}{2}AB$ (pusiaukraštinė į įžambinę, $\angle APB = 90°$), $AM = \frac{1}{2}AB$, $AD = DP = \frac{1}{2}AB$ (a dalis): visos keturkampio $AMPD$ kraštinės lygios, todėl jis – lygiagretainis (priešingos kraštinės poromis lygios), ir rombas (gretimos kraštinės lygios).

19 uždavinys.



sąlyga

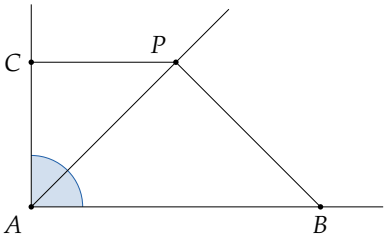


sprendimas

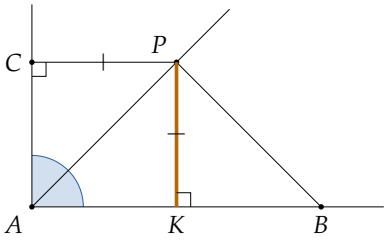
Pažymėkime $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$.

1. Lygumo požymiui reikia trijų elementų; čia – tik statusis kampas ir kraštinė AD, todėl 3) žingsnis nepagrįstas.
2. Priešpavyzdys (brėžinys): $BD = 1$, $AD = DC = 3$. Jei būtų $\alpha = \beta$, tai $\triangle ABD = \triangle ACD$ (statinis ir atitinkamas smailusis kampas: AD bendras), todėl $BD = DC$, o $1 \neq 3$. Taigi $\alpha \neq \beta$ – aukštinė ne pusiaukampinė.
3. Teisinga atvirkščia kryptis: jei AD – ir aukštinė, ir pusiaukampinė, tai $\triangle ABD = \triangle ACD$ (kraštinė ir du kampai prie jos), todėl $AB = AC$.

20 uždavinys.



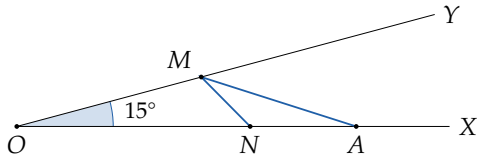
sąlyga



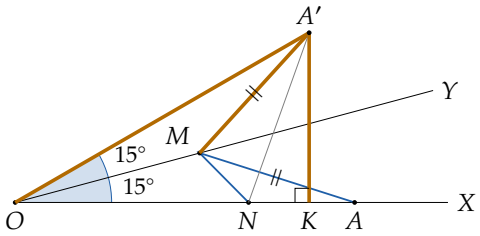
sprendimas

1. Atstumas nuo taško iki kraštinės – statmens ilgis; 2) žingsnis kalba apie statmenis, o 3) – apie bet kuriuos kraštinių taškus.
2. Priešpavyzdys (brėžinys): C ir K – statmenų iš P į kraštines pagrindai, $PC = PK$ (pusiaukampinė), o $B \neq K$.
3. $PB > PK = PC$ (statmuo trumpesnis už pasvirąją), todėl $PB \neq PC$. Teiginys klaidingas.
4. Vienodai nutolę nuo taškų B ir C yra atkarpos BC vidurio statmens taškai.

21 uždavinys.



sąlyga

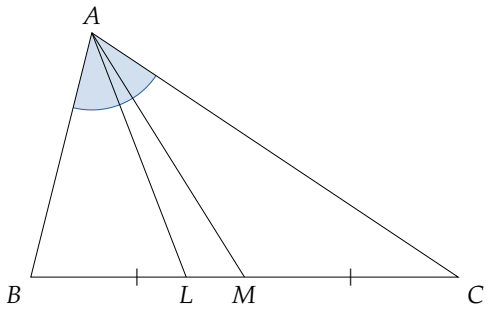


sprendimas

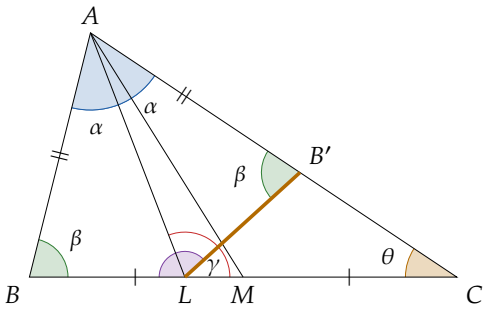
1. A' – taško A atspindys tiesės OY atžvilgiu: $MA' = MA$, $OA' = OA = 8$ (OY – atkarpos AA' vidurio statmuo). Todėl OY – lygiašonio $\triangle AOA'$ aukštinė ir pusiaukampinė: $\angle A'OY = 15°$, $\angle A'OX = 30°$.
2. K – statmens iš A' į OX pagrindas. $AM + MN = A'M + MN \geq A'N \geq A'K$ (trikampio nelygybė; statmuo trumpesnis už pasvirąją).
3. $\triangle OA'K$: $\angle A'OK = 30°$, todėl $A'K = \frac{1}{2}OA' = 4$ (statinis prieš $30°$).
4. Ilgis 4 pasiekiamas: $N = K$, M – atkarpos $A'K$ ir spindulio OY susikirtimo taškas.

Pamoka. laužtę su „atšokimu“ nuo tiesės ištiesina atspindys.

22 uždavinys.



sąlyga

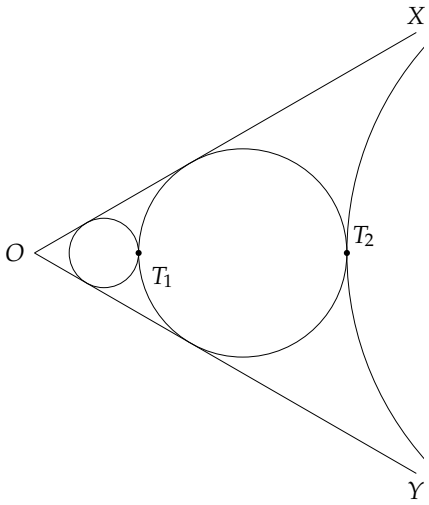


sprendimas

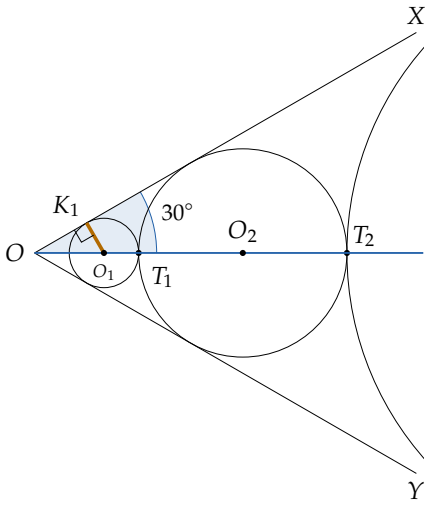
Pažymėkime $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \theta$.

1. Kraštinėje AC atidedame $AB' = AB$ ($AB < AC$). $\triangle ABL = \triangle AB'L$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = AB'$, AL bendra, α), todėl $LB' = LB$, $\angle AB'L = \beta$, $\angle ALB = \angle ALB'$.
2. $\angle LB'C = 180° - \beta = 2\alpha + \theta > \theta$ (gretutiniai kampai, trikampio kampų suma), todėl $LC > LB' = LB$ (prieš didesnį kampą – didesnė kraštinė). Taigi $BL < BM$: L – tarp B ir M.
3. $\angle ALB = \angle ALB' < \angle ALC$, o $\angle ALB + \angle ALC = 180°$ (gretutiniai kampai), todėl $\angle ALM = \angle ALC$ bukasis; pažymėkime jį γ.
4. $\triangle ALM$: prieš bukąjį kampą – ilgiausia kraštinė, todėl $AM > AL$.

23 uždavinys.



sąlyga



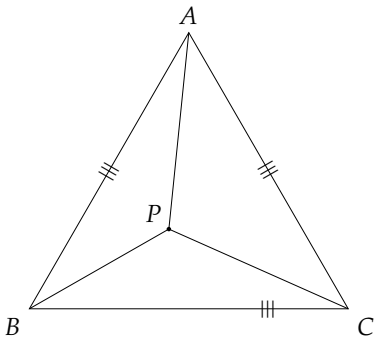
sprendimas

$r_1 = 2$, r_2, r_3 – apskritimų spinduliai, O_1, O_2, O_3 – centrai.

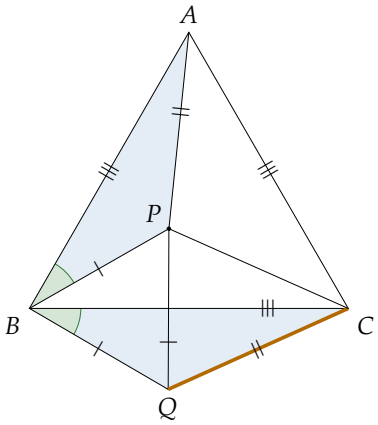
1. O_1 vienodai nutolęs nuo kampo kraštinių, todėl jis pusiaukampinėje (pusiaukampinė kaip taškų aibė). $O_1K_1 \perp OX$ (liestinė statmena spinduliui), $\angle K_1OO_1 = 30°$ (pusiaukampinė), todėl $OO_1 = 2r_1$ (statinis prieš 30°). Taip pat $OO_2 = 2r_2$, $OO_3 = 2r_3$.
2. $OT_1 = OO_1 + r_1 = 3r_1 = 6$ ir $OT_1 = OO_2 - r_2 = r_2$, todėl $r_2 = 6$.
3. Taip pat $r_3 = OT_2 = 3r_2 = 18$.

Pamoka. kiekvienas paskesnis spindulys – 3 kartus didesnis.

24 uždavinys.



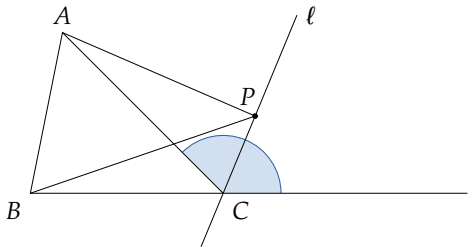
sąlyga



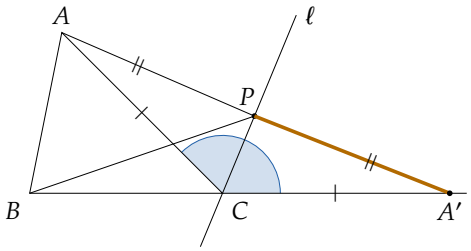
sprendimas

1. Lygiakraštis $\triangle BPQ$ (Q ir A – skirtingose BC pusėse). $\triangle ABP = \triangle CBQ$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = CB$, $BP = BQ$, $\angle ABP = \angle CBQ = 60° - \angle PBC$), todėl $AP = CQ$.
2. $AP = CQ < CP + PQ = CP + PB$ (trikampio nelygybė; $PQ = PB$).
3. Taip pat $PB < PA + PC$, $PC < PA + PB$, todėl iš PA, PB, PC galima sudaryti trikampį.
4. b) Negali: $7 = 3 + 4$, o turi būti $PA < PB + PC$.

25 uždavinys.



sąlyga

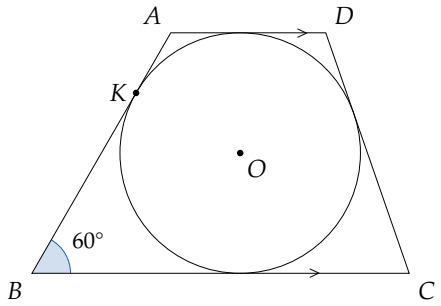


sprendimas

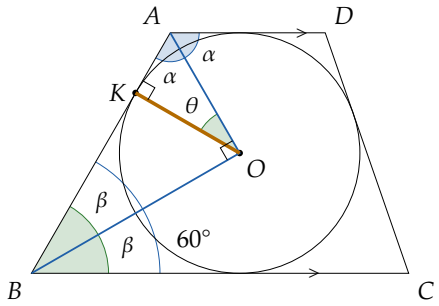
1. Kraštinės BC tęsinyje už C atidedame $CA' = CA$. $\triangle ACA'$ lygiašonis, ℓ – jo pusiaukampinė iš viršūnės C, todėl ir aukštinė bei pusiaukraštinė: ℓ – atkarpos AA' vidurio statmuo, $PA = PA'$ (vidurio statmuo).
2. $PA + PB = PA' + PB > BA'$ (trikampio nelygybė; P ne tiesėje BC).
3. $BA' = BC + CA' = CB + CA$, todėl $PA + PB > CA + CB$.

Pamoka. priekampio pusiaukampinė – veidrodis: ji perkelia A į A' tiesėje BC.

26 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

1. a) $\angle DAB = 180° - 60° = 120°$ (vidaus vienašaliai kampai, $AD \parallel BC$).
2. OA ir OB – kampų DAB ir ABC pusiaukampinės (centras vienodai nutolęs nuo kraštinių), todėl $\angle OAD = \angle OAB = 60°$, $\angle OBA = \angle OBC = 30°$; pažymėkime juos atitinkamai α ir β.
3. $\angle AOB = 180° - 60° - 30° = 90°$ (trikampio kampų suma). $AB = 2OA$ (statinis prieš $\beta = 30°$).
4. $OK \perp AB$ (liestinė statmena spinduliui). $\triangle AKO$: $\angle AOK = 90° - 60° = 30°$ (stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma; pažymėkime jį θ), todėl $AK = \frac{1}{2}OA$ (statinis prieš 30°).
5. $AB = 2OA = 4AK$, todėl $BK = AB - AK = 3AK$.
6. b) $AB = 2 \cdot 6 = 12$; $AD + BC = AB + CD = 23$ (apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių sumos lygios); perimetras $23 + 23 = 46$.