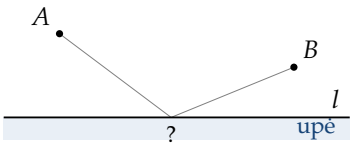
Geometrija

Lapas 4. Nelygybės ir apskritimo pradmenys

9 klasė

Klausimas pradžiai. Namas A ir sodas B yra toje pačioje tiesios upės pusėje. Iš namo reikia nueiti prie upės, pasemti vandens ir nunešti į sodą. Kuriame kranto l taške pasemti vandens, kad kelias būtų trumpiausias?
Atsakymas – 1 pavyzdyje.



1. Nuo ko pradedame

Iš 1–3 lapų (ir 2b, 2c lapų) turime įrankius 1–24 ir trikampių lygumo požymius (dvi kraštinės ir kampas tarp jų; kraštinė ir du kampai prie jos; trys kraštinės).

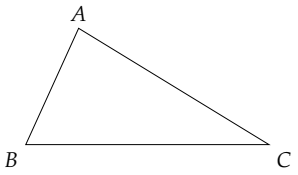
1. Kryžminiai kampai lygūs.
2. Lygiagrečios tiesės $\Leftrightarrow$ vidaus priešiniai (atitinkamieji) kampai lygūs, vidaus vienašalių suma $180°$.
3. Trikampio kampų suma $180°$.
4. Priekampis lygus dviejų jam negretimų kampų sumai.
5. n-kampio kampų suma $(n-2)\cdot 180°$.
6. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs.
7. Du lygūs kampai $\Rightarrow$ trikampis lygiašonis.
8. Lygiašonio pusiaukampinė iš viršūnės yra ir pusiaukraštinė, ir aukštinė.
9. Lygiakraščio kampai po $60°$; lygiašonis su $60°$ kampu – lygiakraštis.
10. Lygiagretainio priešingos kraštinės ir kampai lygūs, įstrižainės dalija viena kitą pusiau.
11. Lygiagretainio požymiai: priešingos kraštinės poromis lygios; viena pora lygi ir lygiagreti; įstrižainės dalija viena kitą pusiau; priešingi kampai poromis lygūs.
12. Stačiakampis (lygiagretainis su stačiaisiais kampais): įstrižainės lygios (požymiai lygiagretainyje: statusis kampas; lygios įstrižainės).
13. Rombas (lygiagretainis su lygiomis kraštinėmis): įstrižainės statmenos ir dalija kampus pusiau (požymiai lygiagretainyje: gretimos kraštinės lygios; įstrižainės statmenos).
14. Trikampio vidurio linija lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei (ir atvirkščiai: tiesė per vidurį, lygiagreti kraštinei, eina per kitos kraštinės vidurį).
15. Pusiaukraštinės kertasi taške G, kuris dalija kiekvieną santykiu $2:1$ nuo viršūnės.
16. Trapecijos vidurio linija lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei.
17. Lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo lygūs, įstrižainės lygios (ir atvirkščiai).
18. Statieji trikampiai lygūs: du statiniai; statinis ir atitinkamas smailusis kampas; įžambinė ir smailusis kampas; įžambinė ir statinis.
19. $\angle C = 90° \Leftrightarrow$ pusiaukraštinė $CM = \frac{1}{2}AB$.
20. Stačiajame trikampyje: smailusis kampas $30° \Leftrightarrow$ statinis prieš jį lygus pusei įžambinės.
21. $PA = PB \Leftrightarrow P$ – atkarpos AB vidurio statmenyje.
22. Taškas kampo viduje vienodai nutolęs nuo kraštinių tiesių $\Leftrightarrow$ jis pusiaukampinėje.
23. Trikampio vidurio statmenys kertasi taške O ($OA = OB = OC$), pusiaukampinės – taške I, vienodai nutolusiame nuo kraštinių.
24. Trikampio aukštinių tiesės kertasi viename taške.

Atstumas tarp lygiagrečių tiesių visur vienodas. Dar žinome lygių atkarpų teoremą ir Varinjono teoremą (keturkampio kraštinių viduriai – lygiagretainio viršūnės). Technikos T1–T12: kampų gaudymas, papildoma lygiagreti tiesė, lygūs trikampiai, pusiaukraštinė dvigubai, atidėk lygią atkarpą, užbaik iki lygiagretainio, centras O, du viduriai $\rightarrow$ vidurio linija, perkelk lygiagrečiai, atspindys per pusiaukampinę, statusis + vidurys, taškas pusiaukampinėje arba vidurio statmenyje. Šiame lape mokysimės **lyginti** atkarpas ir kampus (nelygybės) ir susipažinsime su pirmosiomis **apskritimo** savybėmis.

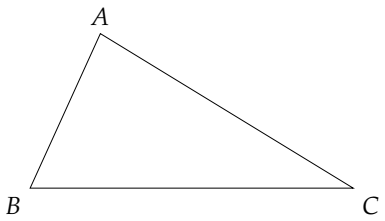
2. Nelygybės trikampyje

Įrankis 25 (didesnė kraštinė ir didesnis kampas)

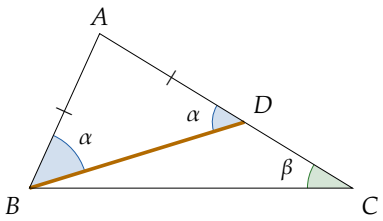
Trikampyje prieš didesnę kraštinę yra didesnis kampas: jei $AC > AB$, tai $\angle B > \angle C$. Ir atvirkščiai: prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė: jei $\angle B > \angle C$, tai $AC > AB$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



sąlyga



sprendimas

Idėja (T5). Kraštinėje AC atidedame $AD = AB$ ($AC > AB$, todėl D – tarp A ir C).

1. $\angle ABD = \angle ADB = \alpha$ (kampai prie pagrindo, $AB = AD$).
2. $\angle B > \alpha$ ($\angle ABD$ – kampo B dalis).
3. $\beta = \angle C$, $\alpha = \angle DBC + \beta > \beta$ (trikampio BDC priekampis). Taigi $\angle B > \alpha > \beta = \angle C$.

Atvirkščiai. Tegu $\angle B > \angle C$. Jei $AC = AB$, tai $\angle B = \angle C$ (kampai prie pagrindo); jei $AC < AB$, tai $\angle B < \angle C$ (ką tik įrodyta dalis). Abu atvejai prieštarauja sąlygai, todėl $AC > AB$.

■

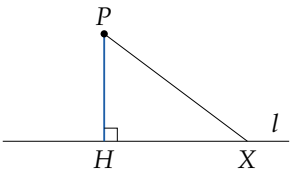
Įrodymas prieštara

Darome prielaidą, kad teiginys neteisingas, ir iš jos išvedame prieštarą – teiginį, prieštaraujantį sąlygai ar žinomam faktui. Vadinasi, prielaida klaidinga, o teiginys teisingas. Ką tik iš prielaidos „$AC \le AB$“ gavome $\angle B \le \angle C$, o sąlyga sako $\angle B > \angle C$.

Išvados. Stačiajame trikampyje įžambinė ilgiausia (statusis kampas didžiausias); bukajame – ilgiausia kraštinė prieš bukąjį kampą.

Įrankis 26 (statmuo ir pasviroji)

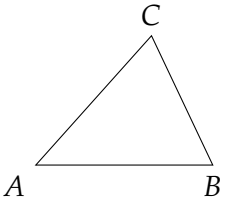
Iš taško P į tiesę l nuleistas statmuo PH trumpesnis už bet kurią **pasvirąją** PX ($X \in l$, $X \neq H$): $PH < PX$. Taigi atstumas nuo taško iki tiesės – trumpiausias kelias iki jos.



Įrodymas. Trikampio PHX statusis kampas H didžiausias (kiti du kartu sudaro 90°), todėl prieš jį esanti PX ilgesnė už PH (prieš didesnį kampą – didesnė kraštinė).

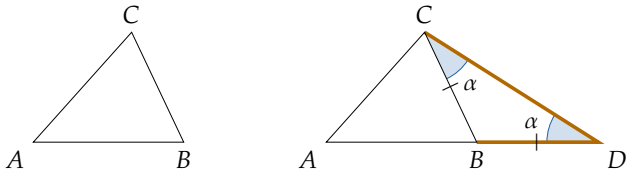
Įrankis 27 (trikampio nelygybė)

Bet kurie trys taškai A, B, C: $AB + BC \ge AC$, o lygybė – tik kai B yra atkarpoje AC. Taigi kiekviena trikampio kraštinė mažesnė už kitų dviejų sumą: $AC < AB + BC$.



Kai B tiesėje AC, teiginys akivaizdus. Įrodysime atvejį, kai ABC – trikampis.

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



sąlyga *sprendimas*

Idėja (T5). Pratęsiame AB už B ir atidedame $BD = BC$; tada $AD = AB + BC$.

1. $\angle BCD = \angle D = \alpha$ (kampai prie pagrindo, $BC = BD$).
2. $\angle ACD = \angle ACB + \alpha > \alpha = \angle D$.
3. $AD > AC$ (trikampyje ACD prieš didesnį kampą – didesnė kraštinė), t. y. $AB + BC > AC$.

■

Išvados.

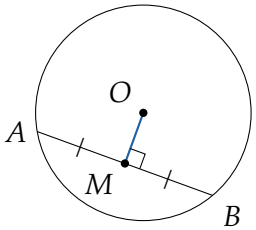
- Laužtė ilgesnė už atkarpą, jungiančią jos galus: $AB + BC + CD > AD$ (trikampio nelygybę taikome kelis kartus).
- Trikampis su kraštinėmis $a \le b \le c$ egzistuoja tada ir tik tada, kai $c < a + b$ (užtenka patikrinti didžiausią kraštinę).
- Kraštinė didesnė už kitų dviejų skirtumą: $AC > AB - BC$ (nes $AB < AC + BC$).

3. Apskritimo pradmenys

Primename (žodynas): **styga** jungia du apskritimo taškus, **skersmuo** – styga, einanti per centrą ($2r$); **liestinė** turi su apskritimu tik vieną bendrą tašką – **lietimosi tašką**.

Įrankis 28 (styga ir centras)

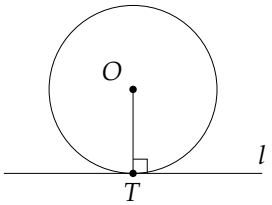
Apskritimo centras O yra kiekvienos stygos AB vidurio statmenyje ($OA = OB$; vidurio statmuo). Todėl statmuo iš centro į stygą dalija ją pusiau, o atkarpa iš centro į stygos vidurį M jai statmena (kai styga – ne skersmuo).



Abu rėmelio teiginius įrodykite patys (Pratimai 3 a). **Išvados.** Skersmuo – ilgiausia styga (Pratimai 3 d). Per tris taškus, nesančius vienoje tiesėje, eina vienintelis apskritimas: jo centras vienodai nutolęs nuo visų trijų taškų, todėl jis – trikampio vidurio statmenų susikirtimo taškas O. Tai trikampio apibrėžtinis apskritimas.

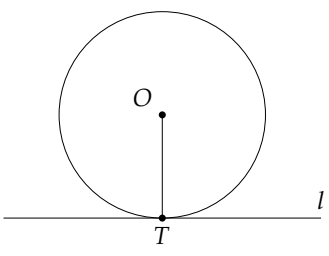
Įrankis 29 (liestinė ir spindulys)

Liestinė statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką: jei l liečia apskritimą taške T, tai $OT \perp l$. Ir atvirkščiai: tiesė, einanti per apskritimo tašką T statmenai spinduliui OT, – liestinė.

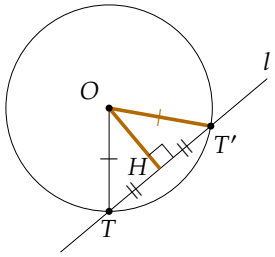


Atvirkštinį teiginį įrodykite patys (Pratimai 3 b). Tiesioginį įrodysime prieštara.

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



sąlyga



sprendimas

Tarkime, OT nestatmena l.

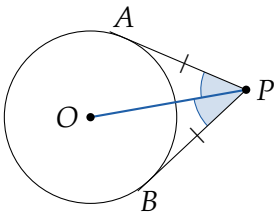
1. Nuleidžiame statmenį OH į l ($H \neq T$) ir kitoje H pusėje atidedame $HT' = HT$.
2. $\triangle OHT = \triangle OHT'$ (du statiniai), todėl $OT' = OT = r$: T' – apskritime.
3. Tiesė l ir apskritimas turi du bendrus taškus T ir T' – prieštara (liestinė turi tik vieną). Taigi $OT \perp l$.

■

Intuicijai: jei d – atstumas nuo centro iki tiesės, tai $d < r$ – tiesė kerta apskritimą, $d = r$ – liečia, $d > r$ – nekerta.

Įrankis 30 (liestinių atkarpos)

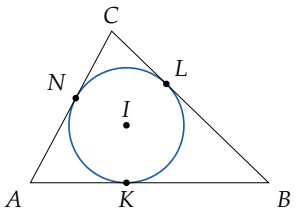
Iš taško P už apskritimo nubrėžtų liestinių atkarpos (lietimosi taškai A, B) lygios: $PA = PB$; o PO – kampo APB pusiaukampinė.



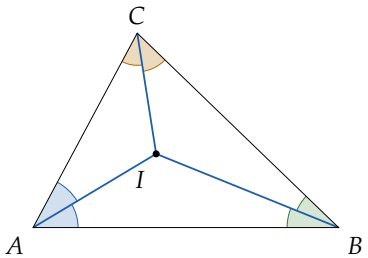
Įrodykite patys (Pratimai 3 c).

Įrankis 31 (įbrėžtinis apskritimas)

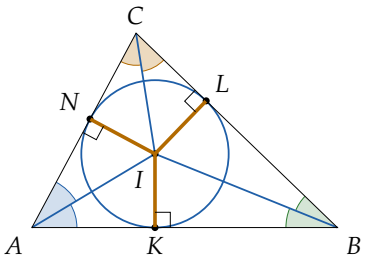
Trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas I – įbrėžtinio apskritimo centras; spindulys r – atstumas nuo I iki kraštinių.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



sąlyga



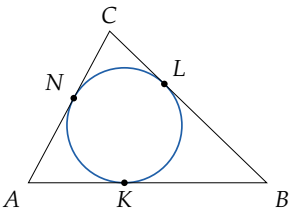
sprendimas

1. Nubrėžiame statmenis IK, IL, IN į kraštines: $IK = IL = IN = r$ (I vienodai nutolęs nuo kraštinių).
2. Apskritimas su centru I ir spinduliu r eina per K, L, N; kiekviena kraštinė statmena spinduliui jo gale ($AB \perp IK$ ir t. t.), todėl liečia apskritimą (liestinė ir spindulys, atvirkščiai).

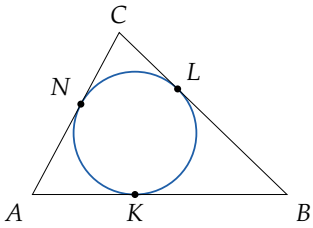
■

Įrankis 32 (atkarpos iki lietimosi taškų)

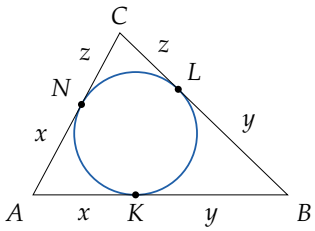
Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas liečia AB, BC, CA taškuose K, L, N; $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ – pusperimetris. Atkarpa nuo viršūnės iki lietimosi taško lygi p minus priešinga kraštinė: $AK = AN = p - a$ (taip pat $BK = BL = p - b$, $CL = CN = p - c$). Dvi liestinės iš taško, sudarančios statųjį kampą: jų atkarpos lygios spinduliui r. Todėl stačiajame trikampyje ($\angle C = 90°$) $r = p - c$.



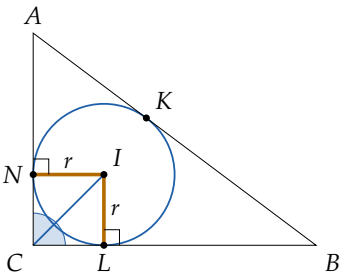
Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



sąlyga



sprendimas (1)



sprendimas (2–3), $\angle C = 90°$

1. $AK = AN = x$, $BK = BL = y$, $CL = CN = z$ (liestinių atkarpos). Tada $c = x + y$, $a = y + z$, $b = z + x$; sudėję $2p = 2(x + y + z)$, todėl $x = p - (y + z) = p - a$.
2. Tegu $\angle C = 90°$. CI – kampo C pusiaukampinė (liestinių atkarpos): $\angle ICL = 45°$; $IL \perp BC$ (liestinė statmena spinduliui), todėl $\angle CIL = 45°$ (trikampio kampų suma) ir $CL = IL = r$ (lygiašonio požymis); $CN = CL = r$. Tas pats tinka bet kuriam taškui, iš kurio dvi liestinės sudaro statųjį kampą.
3. $r = CL = p - c$ (1 ir 2 žingsniai).

■

4. Ar teisingas atvirkščias teiginys?

Pratimai 1. Ar teisinga? Jei ne – nurodykite kontrpavyzdį; jei taip – pagrįskite (atsakymai – lapo gale).

a) Stačiajame trikampyje ($\angle C = 90°$) įbrėžtinio apskritimo spindulys r lygus $p - c$. Ar teisinga atvirkščiai: „Jei trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo spindulys r lygus $p - c$, tai kampas C yra statusis“?
Užuomina: apskritimas liečia BC taške L. Kam lygi atkarpa CL? Koks trikampis ICL?

b) Iš taško nubrėžtų liestinių atkarpos lygios. Ar teisinga atvirkščiai: „Jei A ir B – apskritimo taškai, P – taškas už apskritimo ir $PA = PB$, tai PA ir PB – liestinės“?
Užuomina: visi taškai P, kuriems $PA = PB$, yra atkarpos AB vidurio statmenyje. O jei žinoma, kad PA – liestinė?

c) Statmuo iš centro į stygą dalija ją pusiau. Ar teisinga atvirkščiai: „Jei skersmuo dalija stygą pusiau, tai jis statmenas stygai“?
Užuomina: o jei ta styga – taip pat skersmuo?

d) Įbrėžtinio apskritimo centras – pusiaukampinių susikirtimo taškas I. Ar teisinga atvirkščiai: „Jei apskritimas liečia visas tris trikampio kraštines, tai jo centras – I“? O jei apskritimas liečia tris tieses, kuriose yra trikampio kraštinės?
Užuomina: nuo ko vienodai nutolęs apskritimo centras? Antrajam klausimui – kampų B ir C priekampių pusiaukampinės.

e) Lygiagretainis, į kurį įbrėžtas apskritimas, – rombas (19 uždavinys). Ar teisinga atvirkščiai: „Į kiekvieną rombą galima įbrėžti apskritimą“?
Užuomina: kur yra rombo kampų pusiaukampinės?

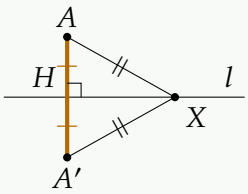
Apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių sumos lygios (18 uždavinys). Atvirkštinis teiginys irgi teisingas: jei iškilojo keturkampio priešingų kraštinių sumos lygios, į jį galima įbrėžti apskritimą. Šį teiginį įrodysime vėliau.

5. Technikos

Technika T13. Ištiesink laužtę

Signalas: atkarpų suma, trumpiausias kelias, „įrodykite, kad $AB + BC > \dots$“.
Veiksmas: sukonstruok laužtę, kurios ilgis lygus duotai sumai (atidėk – T5, pratęsk – T4, atspindėk – T10 arba tiesės atžvilgiu), ir palygink ją su tiesia atkarpa tarp jos galų (trikampio nelygybė).

Atspindys tiesės atžvilgiu. Iš taško A nuleidžiame statmenį AH į tiesę l ir pratęsiame: $HA' = AH$. Kiekvienam l taškui X: $XA = XA'$ (du statiniai), t. y. l – atkarpos AA' vidurio statmuo. Laužtė AXB virsta tokio pat ilgio laužte $A'XB$.



Technika T14. Liestinė → spindulys

Signalas: liestinė.
Veiksmas: nubrėžk spindulį į lietimosi tašką – gausi statųjį kampą. Dvi liestinės iš vieno taško P – lygios atkarpos $PA = PB$ ir pusiaukampinė PO.

Technika T15. Styga → statmuo iš centro

Signalas: styga ir apskritimo centras.
Veiksmas: nuleisk statmenį iš centro į stygą (jis dalija stygą pusiau) arba sujunk centrą su stygos galais (lygiašonis trikampis, šoninės kraštinės lygios r).

Technika T16. Liestinių atkarpos x, y, z

Signalas: apskritimas liečia kelias daugiakampio kraštines.
Veiksmas: iš tos pačios viršūnės nubrėžtas liestinių atkarpas žymėk ta pačia raide (x, y, z, $\dots$), kraštines užrašyk jų sumomis ir sudėk. Trikampyje – iškart atkarpa iki lietimosi taško $p - a$; T16 reikia keturkampiams ir sudėtingesnėms figūroms.

6. Pavyzdžiai

Pavyzdys 1 (upės uždavinys)

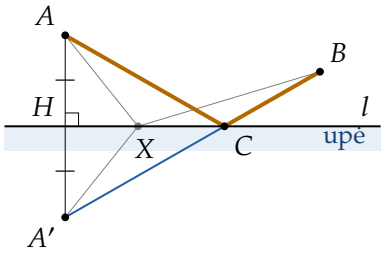
Taškai A ir B yra vienoje tiesės l pusėje. Raskite tiesės l tašką C, kuriam suma $AC + CB$ mažiausia (klausimas pradžiai).



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. atkarpų suma $AX + XB$, taškas X – tiesėje l; ieškome trumpiausio kelio.

Idėja (T13). atspindime A tiesės l atžvilgiu: gauname A'. Laužtė AXB virsta tokio pat ilgio laužte $A'XB$, kurią galima ištiesinti.



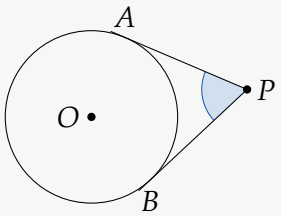
Sprendimas.

1. $AX = A'X$ kiekvienam $X \in l$ (l – atkarpos AA' vidurio statmuo).
2. $AX + XB = A'X + XB \geq A'B$ (trikampio nelygybė); lygybė – tik kai X atkarpoje $A'B$.
3. A' ir B – skirtingose l pusėse, todėl atkarpa $A'B$ kerta l taške C. Kelias ACB trumpiausias: $AC + CB = A'B$.

Pamoka. atspindys perkelia vieną kelio dalį į kitą tiesės pusę, ir laužtę galima ištiesinti. AC ir CB su upe sudaro lygius kampus (atspindys ir kryžminiai kampai) – kaip šviesos spindulys, atsispindėjęs nuo veidrodžio.

Pavyzdys 2 (dvi liestinės)

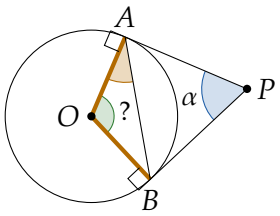
Iš taško P į apskritimą su centru O nubrėžtos liestinės PA ir PB. Įrodykite, kad $\angle AOB = 180° - \angle APB$, ir išreikškite kampą OAB kampu APB.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. dvi liestinės ir centras.

Idėja (T14). nubrėžiame spindulius OA ir OB į lietimosi taškus – statieji kampai.



Sprendimas.

1. Pažymėkime $\angle APB = \alpha$. Tada $\angle OAP = \angle OBP = 90°$ (liestinė statmena spinduliui).
2. $\angle AOB = 360° - 90° - 90° - \alpha = 180° - \alpha$ (keturkampio $OAPB$ kampų suma).
3. $\angle OAB = \frac{1}{2}\big(180° - (180° - \alpha)\big) = \frac{\alpha}{2}$ (kampai prie pagrindo, $OA = OB$; trikampio kampų suma).

Pamoka. liestinė → spindulys → statusis kampas. Keturkampyje, kurio du kampai statūs, kiti du kartu sudaro 180°.

7. Pratimai

Pratimai 2. Atsakykite.

a) Trikampyje ABC $\angle A = 48°$, $\angle B = 67°$. Išdėstykite kraštines didėjimo tvarka.
b) Trikampyje ABC $AB = 7$, $BC = 9$, $AC = 5$. Išdėstykite kampus didėjimo tvarka.
c) Taškas P nutolęs nuo tiesės l per 5 cm. Ar gali kuris nors tiesės l taškas būti nutolęs nuo P per 4 cm?
d) PT – apskritimo su centru O liestinė, T – lietimosi taškas, $\angle OPT = 32°$. Raskite $\angle POT$.
e) Raskite klaidą: „Jei trikampio vienas kampas dvigubai didesnis už kitą, tai prieš jį esanti kraštinė dvigubai ilgesnė.“
f) Raskite klaidą: „Jei kurių nors dviejų atkarpų suma didesnė už trečiąją, iš šių trijų atkarpų galima sudaryti trikampį.“

Pratimai 3. Įrodykite (įrankių teiginiai, kurių neįrodėme; sprendimai – lapo gale).

a) Statmuo iš apskritimo centro į stygą dalija ją pusiau; atkarpa iš centro į stygos (ne skersmens) vidurį statmena stygai.
Užuomina: nubrėžkite spindulius OA ir OB: koks trikampis AOB?
b) Tiesė, einanti per apskritimo tašką T statmenai spinduliui OT, – liestinė.
Užuomina: palyginkite OX ir OT, kai X – kitas tiesės taškas.
c) Iš taško P nubrėžtų liestinių atkarpos lygios ($PA = PB$), o PO – kampo APB pusiaukampinė.
Užuomina: nubrėžkite spindulius į lietimosi taškus.
d) Styga, kuri nėra skersmuo, trumpesnė už skersmenį.
Užuomina: trikampis AOB.

Uždaviniai

Jei brėžinio nėra, nusibraižykite patys.

I. Įgūdžiai

1. Iš kurių atkarpų trejetų galima sudaryti trikampį?

a) 4, 5, 10 cm; b) 6, 7, 12 cm; c) 5, 8, 13 cm; d) 9, 9, 17 cm.

2. Lygiašonio trikampio dvi kraštinės yra 5 cm ir 11 cm. Raskite jo perimetrą.

3. Apskritimo centras O, spindulys 14 cm, AB – styga, $\angle AOB = 120°$. Raskite atstumą nuo O iki stygos AB.

4. AB – apskritimo styga, O – centras, $\angle OAB = 35°$. Raskite $\angle AOB$.

5. Iš taško P nubrėžtos apskritimo (centras O) liestinės PA ir PB (A, B – lietimosi taškai), $\angle APB = 50°$. Raskite $\angle AOB$ ir $\angle OPA$.

6. Į trikampį ABC ($AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm, $CA = 15$ cm) įbrėžtas apskritimas liečia AB, BC, CA taškuose F, D, E. Raskite AF, BD, CE.

7. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) statiniai $BC = 8$ cm, $AC = 15$ cm, įžambinė $AB = 17$ cm. Raskite įbrėžtinio apskritimo spindulį.

8. Stačiajame trikampyje ($\angle C = 90°$) įbrėžto apskritimo spindulys 4 cm, įžambinė 20 cm. Raskite trikampio perimetrą.

II. Technikos

9. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = 7$, $CD = 5$, įstrižainė $BD = 8$.

a) Įrodykite, kad $AB + CD < AC + BD$.
b) Ar gali įstrižainė AC būti lygi 4?
c) Įrodykite, kad bet kurio iškilojo keturkampio įstrižainių suma didesnė už pusperimetrį p, bet mažesnė už perimetrą $2p$.

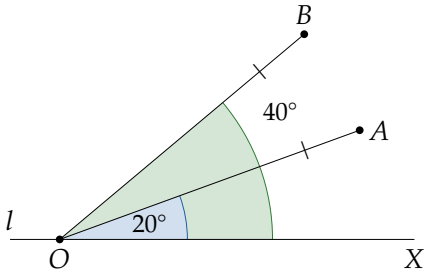
10. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės $AC = 10$ ir $BD = 16$ kertasi taške O.

a) Įrodykite, kad $3 < AB < 13$.
b) Įrodykite, kad lygiagretainio perimetras didesnis už 32, bet mažesnis už 52.

11. Trikampyje ABC $AB = 5$, $AC = 9$, AM – pusiaukraštinė ($M \in BC$). AM ilgis – sveikasis skaičius. Kokios gali būti AM reikšmės?

12. Tiesėje l pažymėtas taškas O ir spindulys OX (tiesės l dalis). Vienoje tiesės l pusėje yra taškai A ir B, $OA = OB = 9$ cm, $\angle AOX = 20°$, $\angle BOX = 40°$. Tiesėje l parenkamas taškas P.

a) Raskite mažiausią sumos $PA + PB$ reikšmę.
b) Raskite $\angle OPB$, kai suma $PA + PB$ mažiausia.

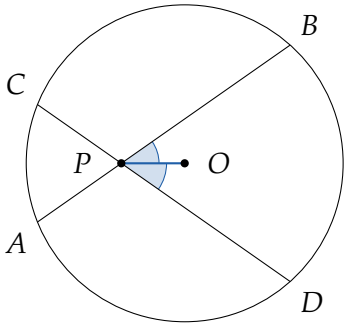


13. Trikampyje ABC ($AC > AB$) nubrėžta kampo BAC pusiaukampinė AD ($D \in BC$).

a) Įrodykite, kad $CD > BD$.
b) Įrodykite, kad $CD - BD < AC - AB$.

14. Apskritimo (centras O) styga AB ir skersmuo CD kertasi taške M; $AM = 7$, $OM = 4$, $AM > MB$, o smailusis kampas tarp tiesių AB ir CD lygus $60°$. Raskite MB ir AB.

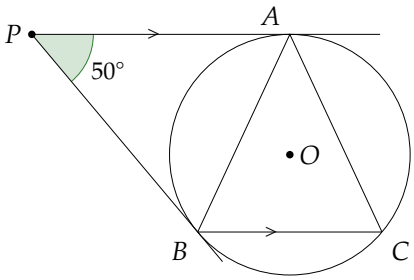
15. Apskritimo su centru O stygos AB ir CD kertasi taške P ($P \neq O$; taškai išsidėstę tvarka A, P, B ir C, P, D). Atkarpa PO – kampo BPD pusiaukampinė. Įrodykite, kad $AB = CD$ ir $PB = PD$.



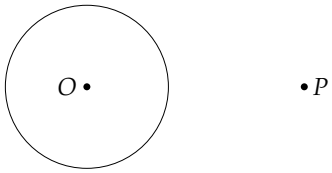
16. Iš taško P, esančio už apskritimo su centru O, nubrėžtos liestinės PA ir PB (A ir B – lietimosi taškai). Per tašką B nubrėžta styga $BC \parallel PA$.

a) Įrodykite, kad $AB = AC$.

b) Raskite trikampio ABC kampus, jei $\angle APB = 50°$.



17. Duotas apskritimas su centru O ir taškas P už jo. Skriestuvu ir liniuote nubrėžkite iš taško P apskritimo liestines ir įrodykite, kad nubrėžtos tiesės – liestinės.



18. Į iškiląjį keturkampį $ABCD$ įbrėžtas apskritimas su centru O (jis liečia visas keturias keturkampio kraštines; toks keturkampis vadinamas *apibrėžtiniu*).

a) Įrodykite, kad $AB + CD = AD + BC$.

b) Įrodykite, kad $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

19. Į lygiagretainį $ABCD$ įbrėžtas apskritimas (jis liečia visas keturias kraštines).

a) Įrodykite, kad $ABCD$ – rombas, o apskritimo centras – įstrižainių susikirtimo taškas O.

b) Lygiagretainio kraštinė 10 cm, smailusis kampas $30°$. Raskite apskritimo spindulį.

20. Taškas D yra trikampio ABC kraštinėje BC; $AB = 13$, $AC = 15$, $BD = 5$, $DC = 9$. Į trikampius ABD ir ACD įbrėžti apskritimai liečia atkarpą AD taškuose E ir F. Raskite EF.

III. Sunkesni

21. Taškas P yra trikampio ABC viduje, p – trikampio pusperimetris. Įrodykite, kad $p < PA + PB + PC < 2p$.

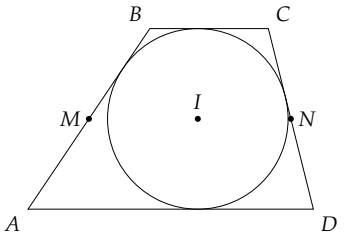
22. Duotas kampas XOY, $\angle XOY = 30°$, ir jo viduje taškas A, $OA = 10\,\text{cm}$. Spindulyje OX parenkamas taškas $M \neq O$, o spindulyje OY – taškas $N \neq O$.

a) Raskite mažiausią galimą trikampio AMN perimetrą.
b) Įrodykite, kad kai trikampio AMN perimetras mažiausias, $\angle MAN = 120°$.

23. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $\angle A = \angle B = 90°$. Apskritimas su centru I, kurio spindulys 3, liečia visas keturias keturkampio kraštines; $CD = 10$. Raskite keturkampio perimetrą.

24. Į trapeciją $ABCD$ ($AD \parallel BC$) įbrėžtas apskritimas su centru I; M ir N – šoninių kraštinių AB ir CD viduriai.

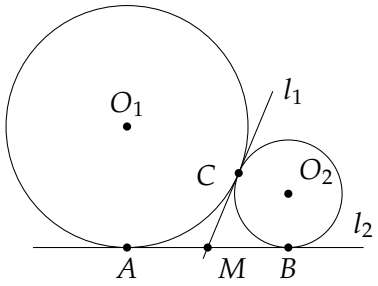
a) Įrodykite, kad $\angle AIB = 90°$.
b) Įrodykite, kad I yra vidurio linijoje MN ir $MN = \frac{AB+CD}{2}$.
c) $AB = 7$, $CD = 11$. Raskite trapecijos vidurio liniją ir perimetrą.



25. Du apskritimai su centrais O_1 ir O_2 liečia tiesę l_1 tame pačiame taške C ir yra skirtingose jos pusėse.

Tiesė l_2 – kita jų bendra liestinė: pirmąjį apskritimą liečia taške A, antrąjį – taške B ($A \neq B$). Tiesė l_1 kerta atkarpą AB taške M.

a) Įrodykite, kad O_1, O_2 ir C yra vienoje tiesėje.
b) Įrodykite, kad M – atkarpos AB vidurys ir $\angle ACB = 90°$.
c) Įrodykite, kad $\angle O_1MO_2 = 90°$.



26. Trikampio ABC perimetras 36 cm, $BC = 11\,\text{cm}$, $\angle BAC = 50°$. Į trikampį įbrėžtas apskritimas su centru I liečia kraštines BC, CA, AB taškuose D, E, F. Atkarpose AF ir AE pažymėti vidiniai taškai M ir N taip, kad atkarpa MN liečia apskritimą taške K.

a) Raskite trikampio AMN perimetrą.
b) Raskite $\angle MIN$.

27. AB – apskritimo (centras O) skersmuo, C – apskritimo taškas ($C \neq A$, $C \neq B$). Liestinė, nubrėžta taške C, taške A nubrėžtą liestinę kerta taške P, o taške B nubrėžtą – taške Q; $AP = 4$, $BQ = 9$, M – atkarpos PQ vidurys.

a) Įrodykite, kad $APQB$ – trapecija, ir raskite PQ.
b) Raskite atstumą OM.
c) Įrodykite, kad $\angle POQ = 90°$.

28. Apskritimo su centru O spindulys $R = 6\,\text{cm}$, styga CD nutolusi nuo centro O atstumu 3 cm. Taškuose C ir D nubrėžtos liestinės kertasi taške P.

a) Įrodykite, kad trikampis PCD lygiakraštis, ir raskite OP.
b) Atkarpa OP kerta apskritimą taške K. Įrodykite, kad K – trikampio PCD įbrėžtinio apskritimo centras.

Papildomi uždaviniai (norintiems)

29. Apskritimo centras O, spindulys 5. Taškas P yra už apskritimo, $OP = 13$. Raskite mažiausią ir didžiausią atstumą nuo P iki apskritimo taškų ir nurodykite, kuriuose taškuose jie pasiekiami.

30. Trikampio ABC kraštinės BC vidurys – M. Kraštinėse AB ir AC pažymėti vidiniai taškai D ir E taip, kad $\angle DME = 90°$.

a) Įrodykite, kad $BD + CE > DE$.
b) Įrodykite, kad trikampio ADE perimetras mažesnis už $AB + AC$.

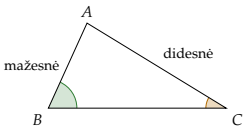
31. Stačiajame trikampyje ABC ($\angle ACB = 90°$) įbrėžtas apskritimas su centru I ir spinduliu r. Įžambinėje AB pažymėti taškai P ir Q taip, kad $AP = AC$ ir $BQ = BC$.

a) Įrodykite, kad Q yra atkarpoje AP ir $\angle PCQ = 45°$.
b) Įrodykite, kad $\angle PIQ = 90°$, $IP = IQ = IC$ ir $PQ = 2r$.

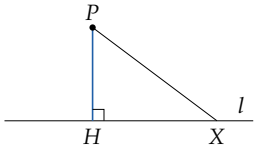
Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

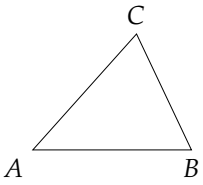
Įrankis 25 *(didesnė kraštinė ir didesnis kampas)* $AC > AB \Leftrightarrow \angle B > \angle C$ (prieš didesnę kraštinę – didesnis kampas)



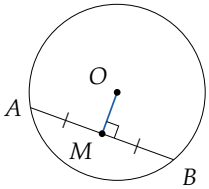
Įrankis 26 *(statmuo ir pasviroji)* statmuo trumpesnis už pasvirąją: $PH < PX$



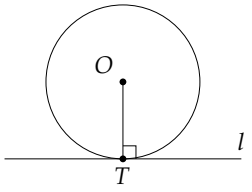
Įrankis 27 *(trikampio nelygybė)* $AC < AB + BC$ (trikampio nelygybė); $AB + BC = AC$ tik kai B atkarpoje AC



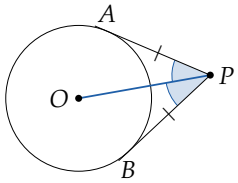
Įrankis 28 *(stygа ir centras)* centras – stygos vidurio statmenyje: statmuo iš centro dalija stygą pusiau; $OM \perp AB$, kai M – stygos (ne skersmens) vidurys



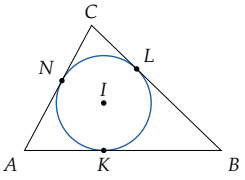
Įrankis 29 *(liestinė ir spindulys)* l liečia apskritimą taške $T \Leftrightarrow OT \perp l$ (liestinė ir spindulys)



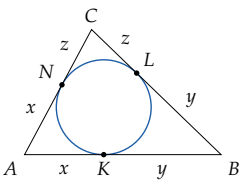
Įrankis 30 *(liestinių atkarpos)* dvi liestinės iš taško P: $PA = PB$, PO – kampo APB pusiaukampinė (liestinių atkarpos)



Įrankis 31 *(įbrėžtinis apskritimas)* įbrėžtinio apskritimo centras I – pusiaukampinių susikirtimo taškas



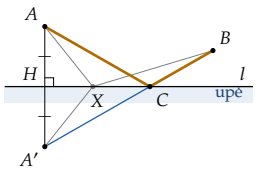
Įrankis 32 *(atkarpos iki lietimosi taškų)* $AK = AN = p - a$ (atkarpa iki lietimosi taško); liestinių atkarpos prie stačiojo kampo lygios r; stačiajame trikampyje $r = p - c$



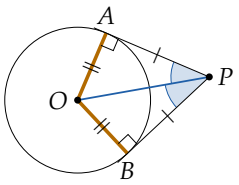
Technikų santrauka

Signalas → veiksmas. Šios technikos padeda rasti sprendimą.

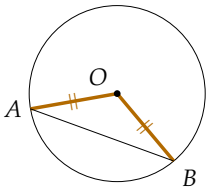
T13 *(Ištiesink laužtę)* atkarpų suma, trumpiausias kelias → sudėk atkarpas į vieną laužtę (atidėk, pratęsk, atspindėk) ir palygink su tiesia atkarpa.



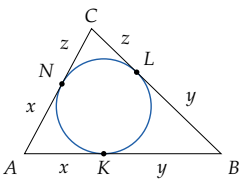
T14 *(Liestinė → spindulys)* liestinė → spindulys į lietimosi tašką (statusis kampas); dvi liestinės → $PA = PB$, PO – pusiaukampinė.



T15 *(Styga → statmuo iš centro)* styga ir centras → statmuo iš centro į stygą arba spinduliai į stygos galus.



T16 *(Liestinių atkarpos x, y, z)* apskritimas liečia kraštines → liestinių atkarpas iš vienos viršūnės žymėk viena raide (x, y, z); kraštinės – jų sumos.



Pratimų atsakymai

Pratimai 2. a) $BC < AB < AC$; b) $\angle B < \angle C < \angle A$; c) ne: statmuo trumpesnis už pasvirąją; d) 58°; e) trikampyje su kampais 30°, 60°, 90° prieš 30° yra pusė įžambinės, o prieš 60° – statinis, trumpesnis už įžambinę, taigi ne dvigubai ilgesnis; f) 3, 4, 10: $4 + 10 > 3$, bet $3 + 4 < 10$ – trikampio nėra; tikrinti reikia didžiausią atkarpą;

Uždavinių atsakymai

1. Tik b) ir d).
2. 27 cm.
3. 7 cm.
4. 110°.
5. $\angle AOB = 130°$, $\angle OPA = 25°$.
6. $AF = 7$ cm, $BD = 6$ cm, $CE = 8$ cm.
7. 3 cm.
8. 48 cm.
9. a) įrodymas; b) negali ($AC > 4$); c) įrodymas – lapo gale.
10. a), b) įrodymai – lapo gale.

11. 3, 4, 5 arba 6.
12. a) 9 cm; b) $80°$.
13. a), b) įrodymai – lapo gale.
14. $MB = 3$, $AB = 10$.
15. Įrodymas – lapo gale.
16. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle ABC = \angle ACB = 65°$, $\angle BAC = 50°$.
17. Konstravimas ir įrodymas – lapo gale.
18. Įrodymas – lapo gale.
19. a) įrodymas – lapo gale; b) 2,5 cm.
20. $EF = 1$.
21. Įrodymas – lapo gale.
22. a) 10 cm; b) įrodymas – lapo gale.
23. 32.
24. a), b) įrodymai – lapo gale; c) vidurio linija 9, perimetras 36.
25. Įrodymas – lapo gale.
26. a) 14 cm; b) $65°$.
27. a) $PQ = 13$, įrodymas – lapo gale; b) $OM = 6{,}5$; c) įrodymas – lapo gale.
28. a) $OP = 12$ cm, įrodymas – lapo gale; b) įrodymas – lapo gale.
29. Mažiausias 8 – taške C, kuriame atkarpa OP kerta apskritimą; didžiausias 18 – taške D, kuriame tiesė PO antrą kartą kerta apskritimą (CD – skersmuo).
30. Įrodymas – lapo gale.
31. Įrodymas – lapo gale.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) Užtenka tikrinti didžiausią atkarpą. 2) Palyginkite ją su kitų dviejų suma.
2. 1) Dvi kraštinės lygios – kuris iš dviejų ilgių kartojasi? 2) Patikrinkite abu variantus trikampio nelygybe.
3. 1) Styga ir centras; ieškomas atstumas. 2) Atstumas – statmuo iš O į AB; trikampis OAB lygiašonis – raskite kampą prie pagrindo.
4. 1) Styga ir centras – spinduliai į stygos galus. 2) Trikampis AOB lygiašonis.
5. 1) Liestinė statmena spinduliui lietimosi taške. 2) PO dalija kampą APB pusiau; keturkampio kampų suma $360°$.
6. 1) Atkarpa nuo viršūnės iki lietimosi taško. 2) Raskite pusperimetrį p.
7. 1) Statusis trikampis ir įbrėžtinis apskritimas. 2) $r = p - c$.
8. 1) Stačiajame trikampyje $r = p - c$. 2) Perimetras = $2p$.
9. 1) Kraštinės AB ir CD nesusijusios tarpusavyje; kur susikerta įstrižainės? 2) Pažymėkite įstrižainių susikirtimo tašką O; kiekvieną kraštinę palyginkite su laužte per O.
10. 1) Kurias atkarpas žinome, kai lygiagretainio įstrižainės dalija viena kitą pusiau? 2) a) Trikampis AOB; b) perimetras = $2(AB + BC)$: viršutinei ribai – trikampiai AOB ir BOC, apatinei – trikampis ABD.
11. 1) AM, AB, AC nėra vieno trikampio kraštinės – reikia trikampio, kuriame būtų AM ir atkarpos, susijusios su AB ir AC. 2) M – vidurys; pažymėkite ir AC vidurį N: kokia

atkarpa yra MN?

12. 1) Trumpiausias kelias su tašku tiesėje – kaip upės uždavinyje. 2) Atspindėkite tašką A tiesės l atžvilgiu į tašką A', sujunkite A' su O bei B ir pastebėkite, koks yra trikampis $A'OB$.

13. 1) Pusiaukampinė ir nelygios kraštinės prie jos kampo. 2) Atspindėkite trikampį ABD per pusiaukampinę AD: kraštinėje AC atidėkite tašką E, kad $AE = AB$, sujunkite D su E ir išnagrinėkite trikampį DEC.

14. 1) Styga ir centras – nuleiskite statmenį iš centro į stygą. 2) Gautame stačiajame trikampyje OHM kampas prie O lygus 30°; kur yra H – tarp A ir M ar tarp M ir B?

15. 1) Taškas O yra kampo BPD pusiaukampinėje ir kartu – apskritimo centras, o AB ir CD – stygos. 2) Nuleiskite statmenis $OM \perp AB$ ir $ON \perp CD$, sujunkite O su B ir D ir palyginkite susidariusius stačiuosius trikampius.

16. 1) Liestinė $\rightarrow$ spindulys į lietimosi tašką. 2) Nubrėžkite spindulį OA: įrodykite, kad tiesė OA statmena stygai BC ir todėl yra atkarpos BC vidurio statmuo.

17. 1) Liestinė statmena spinduliui: reikia rasti apskritimo tašką A, kuriame $\angle OAP = 90°$. 2) Kur yra taškai, iš kurių atkarpa OP matoma stačiu kampu? Pažymėkite OP vidurį M (vidurio statmuo) ir prisiminkite pusiaukraštinę į įžambinę.

18. 1) Kiekviena keturkampio viršūnė – taškas, iš kurio į apskritimą nubrėžtos dvi liestinės. 2) a) Pažymėkite lietimosi taškus kraštinėse ir lygias liestinių atkarpas iš kiekvienos viršūnės x, y, z, t; b) sujunkite O su viršūnėmis: OA, OB, OC, OD – keturkampio kampų pusiaukampinės.

19. 1) Pasinaudokite 18 uždaviniu ir lygiagretainio savybėmis. 2) a) Centras vienodai nutolęs nuo kraštinių, todėl yra kampų pusiaukampinėse; b) atstumas tarp lygiagrečių AB ir CD lygus skersmeniui – palyginkite jį su statmeniu iš A į tiesę CD.

20. 1) AD nežinoma – nesibaiminkite: išreiškite AE ir AF per AD ir žiūrėkite, kas lieka skirtume. 2) Trikampyje ABD: $AE = p_1 - BD$, kur p_1 – jo pusperimetris; trikampyje ACD – taip pat.

21. 1) Kairė nelygybė: trys trikampiai PAB, PBC, PCA. 2) Dešinė: pirmiausia įrodykite $PB + PC < AB + AC$ – pratęskite BP iki susikirtimo su AC taške D ir dukart taikykite trikampio nelygybę.

22. 1) Perimetras $AM + MN + NA$ – trijų atkarpų laužtė, kurios viršūnės M ir N slankioja tiesėmis OX ir OY. 2) Atspindėkite tašką A tiesės OX atžvilgiu į A_1, o tiesės OY atžvilgiu – į A_2: ištiesinkite laužtę A_1MNA_2 į atkarpą A_1A_2 ir išnagrinėkite trikampį OA_1A_2 bei lygių trikampių poras OMA, OMA_1 ir ONA, ONA_2.

23. 1) Kokia sąsaja tarp priešingų kraštinių sumų (18 uždavinys)? 2) Prie stačiųjų kampų A ir B – liestinių atkarpos lygios r.

24. 1) AI, BI – kokių kampų pusiaukampinės? Kampai A ir B – vienašaliai. 2) b) Trikampyje AIB sujunkite I su M: palyginkite MI su MA ir įrodykite, kad $MI \parallel AD$; c) dviem būdais: b) dalis arba priešingų kraštinių sumos (18 uždavinys).

25. 1) Iš taško M – po dvi liestines į kiekvieną apskritimą (MA, MC ir MB, MC). 2) a) Nubrėžkite spindulius O_1C ir O_2C; b) palyginkite MA, MB, MC (pusiaukraštinė į įžambinę – atvirkščiai); c) MO_1 ir MO_2 – gretutinių kampų pusiaukampinės.

26. 1) Iš taškų M ir N į apskritimą nubrėžtos po dvi liestinių atkarpos (MF, MK ir NE, NK); žinomas trikampio ABC perimetras ir kraštinė BC. 2) a) Išreiškite $AM + MN + AN$ per $AF + AE$; AF – atkarpa iki lietimosi taško; b) MI ir NI – kokių kampų pusiaukampinės?

27. 1) Iš P – dvi liestinės (PA ir PC), iš Q – taip pat dvi; kaip tiesės AP ir BQ išsidėsčiusios viena kitos atžvilgiu? 2) b) O ir M – trapecijos šoninių kraštinių viduriai; c) palyginkite OM su PQ.

28. 1) Atstumas nuo centro iki stygos (3 cm) lygus pusei spindulio (6 cm). 2) a) Nuleiskite statmenį $OH \perp CD$, nubrėžkite spindulį OC ir raskite $\angle OCH$; b) PH – trikampio PCD

pusiaukraštinė: kokią jos dalį sudaro PK?

29. 1) Bet kuris apskritimo taškas X: žinome $OX = 5$ ir $OP = 13$ – trikampis OXP. 2) Taikykite trikampio nelygybę abiem kryptimis; kada ji virsta lygybe?

30. 1) Reikia palyginti dviejų atskirų atkarpų sumą $BD + CE$ su atkarpa DE. 2) Pratęskite DM už M tiek pat ($MK = DM$), sujunkite K su C ir E: koks keturkampis $BDCK$? Įrodykite, kad $CK = BD$ ir $EK = DE$, tada taikykite trikampio nelygybę trikampiui CKE.

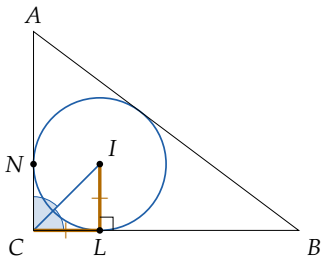
31. 1) Atkarpos $AP = AC$ ir $BQ = BC$ įžambinėje gaunamos atspindint statinius AC ir BC pusiaukampinių AI ir BI atžvilgiu. 2) a) Pritaikykite trikampio nelygybę $AC + BC > AB$ ir lygiašonių trikampių APC, BQC kampus prie C – kampas PCQ skaičiuojamas du kartus; b) palyginkite trikampius API ir ACI, BQI ir BCI, raskite trikampio PIQ kampus.

Pratimų ir sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

Pratimai 1 a)

Taip. Tegu įbrėžtinis apskritimas su centru I liečia BC taške L.

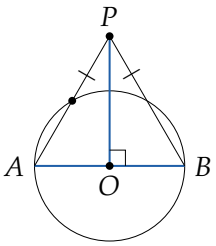


1. $CL = p - c$ (atkarpa iki lietimosi taško), todėl $CL = r = IL$.
2. $IL \perp BC$ (liestinė statmena spinduliui), todėl trikampis ICL yra statusis ir lygiašonis: $\angle ICL = 45°$ (kampai prie pagrindo, trikampio kampų suma).
3. CI – kampo C pusiaukampinė (I – pusiaukampinių susikirtimo taškas), todėl $\angle C = 2 \cdot 45° = 90°$.

Įrodinėdami tiesioginį teiginį, ėjome tuo pačiu keliu, tik priešinga kryptimi.

Pratimai 1 b)

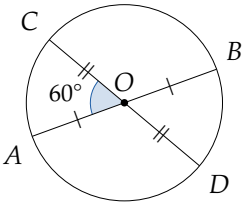
Ne. Kontrpavyzdys: AB – skersmuo, P – jo vidurio statmens taškas už apskritimo. Tada $PA = PB$ (vidurio statmuo), bet trikampio AOP kampas O statusis, todėl $\angle OAP < 90°$ (trikampio kampų suma): PA nėra statmena spinduliui OA, taigi nėra liestinė (liestinė ir spindulys). Brėžinyje matyti, kad PA kerta apskritimą dar viename taške.



Bet jei žinoma, kad PA – liestinė, ir $PA = PB$, tai ir PB – liestinė: $\triangle OAP = \triangle OBP$ (trys kraštinės: $OA = OB$, $PA = PB$, OP bendra), todėl $\angle OBP = \angle OAP = 90°$, ir PB – liestinė (liestinė ir spindulys, atvirkščiai).

Pratimai 1 c)

Ne visada. Kontrpavyzdys: skersmenys AB ir CD, sudarantys 60° kampą. Kiekvienas jų dalija kitą pusiau (taške O), bet jie nėra statmeni. Jei styga AB nėra skersmuo, teiginys teisingas: skersmuo eina per centrą O ir stygos vidurį M, o $OM \perp AB$ (styga ir centras). Todėl įrankyje „styga ir centras“ ir parašyta „kai styga – ne skersmuo“.



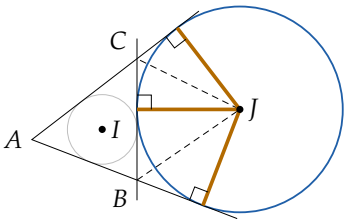
Pratimai 1 d)

Taip; o jei apskritimas liečia tik tieses – ne.

1. Tegu apskritimas su centru Q liečia kraštines AB, BC, CA taškuose K, L, N. Spinduliai QK, QL, QN statmeni kraštinėms (liestinė statmena spinduliui), todėl taškas Q vienodai nutolęs nuo visų trijų kraštinių.
2. Apskritimas yra vienoje liestinės AB pusėje – toje, kurioje jo taškai L, N ir viršūnė C; taip pat ir liestinių BC, CA atžvilgiu. Todėl Q – trikampio viduje, taigi ir kampų A, B viduje.
3. Vadinasi, Q yra kampų A ir B pusiaukampinėse (pusiaukampinė), t. y. $Q = I$.

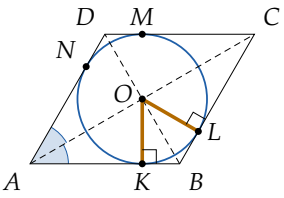
Taigi įbrėžtinis apskritimas vienintelis: jo centras – I, o spindulys – atstumas nuo I iki kraštinių.

Tiesių atveju – ne. Kampų B ir C priekampių pusiaukampinės kertasi taške J. Jis vienodai nutolęs tiek nuo tiesių AB ir BC, tiek nuo tiesių BC ir CA (pusiaukampinė). Todėl apskritimas su centru J, kurio spindulys lygus šiam atstumui, liečia visas tris tieses (liestinė ir spindulys, atvirkščiai). Bet taškas J yra trikampio išorėje, todėl $J \neq I$: šis apskritimas liečia kraštinę BC ir kitų dviejų kraštinių tęsinius.



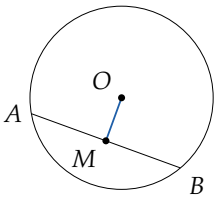
Pratimai 1 e)

Taip. Tegu rombo $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O.

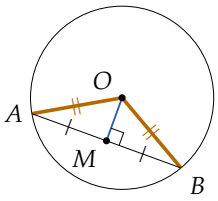


1. Rombo įstrižainės dalija kampus pusiau, todėl O yra visų keturių kampų pusiaukampinėse ir vienodai nutolęs nuo visų kraštinių (pusiaukampinė): $OK = OL = OM = ON$.
2. Kampai OAB ir OBA smailieji (rombo kampų pusės), todėl statmens OK pagrindas yra pačioje kraštinėje AB; taip pat ir kitose kraštinėse.
3. Apskritimas su centru O ir spinduliu OK eina per K, L, M, N, o kiekviena kraštinė statmena spinduliui jo gale, todėl liečia apskritimą (liestinė ir spindulys, atvirkščiai).

Pratimai 3 a)



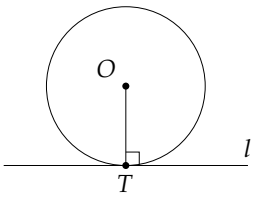
sąlyga



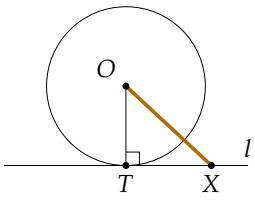
sprendimas

1. $OA = OB$, todėl trikampis AOB lygiašonis. Jo aukštinė iš viršūnės O yra ir pusiaukraštinė: statmuo OM dalija AB pusiau; pusiaukraštinė OM yra ir aukštinė: $OM \perp AB$ (lygiašonio pusiaukampinė, pusiaukraštinė ir aukštinė – ta pati atkarpa).

Pratimai 3 b)



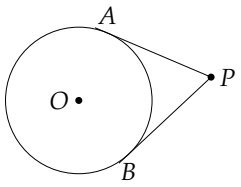
sąlyga



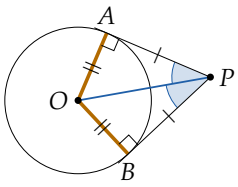
sprendimas

1. Kiekvienam tiesės l taškui $X \neq T$: $OX > OT = r$ (statmuo trumpesnis už pasvirąją), todėl X – už apskritimo.
2. T – vienintelis bendras tiesės ir apskritimo taškas, todėl l – liestinė.

Pratimai 3 c)



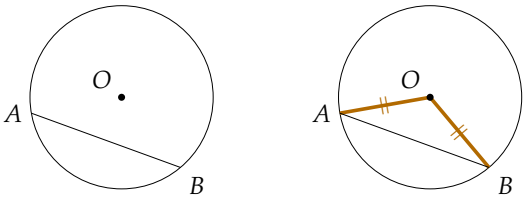
sąlyga



sprendimas

1. $\angle OAP = \angle OBP = 90°$ (liestinė statmena spinduliui).
2. $\triangle OAP = \triangle OBP$ (įžambinė ir statinis: OP bendra, $OA = OB$), todėl $PA = PB$ ir $\angle APO = \angle BPO$.

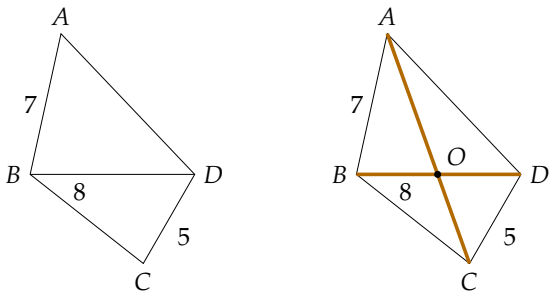
Pratimai 3 d)



sąlyga *sprendimas*

1. $AB < AO + OB = 2r$ (trikampio nelygybė, trikampis AOB), o $2r$ – skersmuo.

9 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

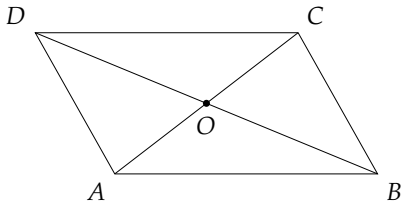
Ką matau. atkarpų sumų nelygybė: kraštinės ir įstrižainės.

Idėja (T13). kiekvieną kraštinę lyginame su laužte per įstrižainių susikirtimo tašką O.

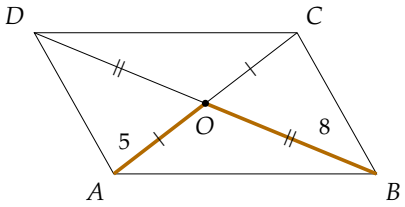
1. a) $AB < AO + OB$, $CD < CO + OD$ (trikampio nelygybė).
2. Sudėję: $AB + CD < (AO + OC) + (BO + OD) = AC + BD$.
3. b) $7 + 5 < AC + 8$, todėl $AC > 4$: $AC = 4$ negali būti.
4. c) Taip pat $BC + DA < AC + BD$; sudėję su a): $2p < 2(AC + BD)$, $AC + BD > p$.
5. $AC < AB + BC$, $AC < CD + DA$, $BD < AB + AD$, $BD < BC + CD$ (trikampio nelygybė); sudėję: $2(AC + BD) < 2 \cdot 2p$, $AC + BD < 2p$.

Pamoka. kraštinė trumpesnė už laužtę, jungiančią jos galus; įstrižainių susikirtimo taškas sukuria tokias laužtes.

10 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

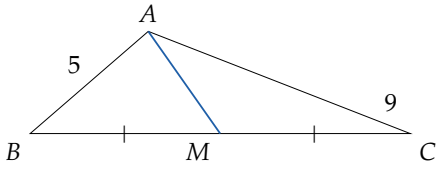
Ką matau. lygiagretainio įstrižainės ir kraštinės – atkarpų nelygybės.

Idėja. įstrižainės dalija viena kitą pusiau: $AO = 5$, $BO = 8$; trikampio nelygybė trikampiuose su viršūne O.

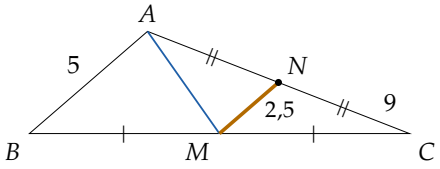
1. $AO = OC = 5$, $BO = OD = 8$ (lygiagretainio įstrižainės dalija viena kitą pusiau).
2. a) $8 - 5 < AB < 8 + 5$ (trikampis AOB; trikampio nelygybė), t. y. $3 < AB < 13$.
3. b) Taip pat $BC < BO + OC = 13$ (trikampis BOC), todėl perimetras $2(AB + BC) < 2 \cdot 26 = 52$ (priešingos kraštinės lygios).
4. $AB + AD > BD = 16$ (trikampis ABD), todėl perimetras $2(AB + AD) > 32$.

Pamoka. lygiagretainio savybės (įstrižainių pusės, lygios priešingos kraštinės) sustiprina bendrą keturkampio nelygybę iš 9 uždavinio: perimetras didesnis net už dvigubą ilgesniąją įstrižainę.

11 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

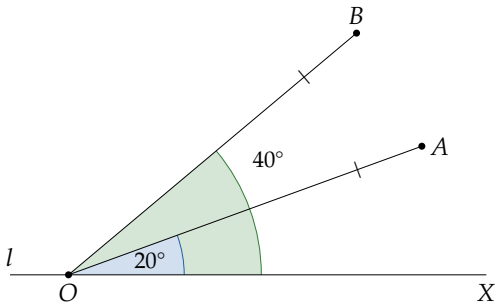
Ką matau. pusiaukraštinė ir dvi kraštinės; du viduriai.

Idėja (T8). N – kraštinės AC vidurys; MN – vidurio linija.

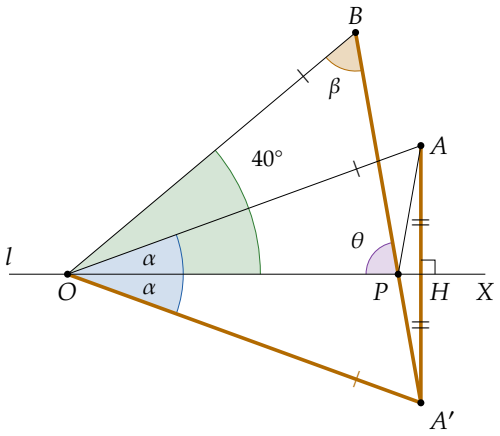
1. $MN = \frac{1}{2}AB = 2{,}5$ (trikampio ABC vidurio linija), $AN = \frac{1}{2}AC = 4{,}5$.
2. Trikampyje AMN: $4{,}5 - 2{,}5 < AM < 4{,}5 + 2{,}5$ (trikampio nelygybė; kraštinė didesnė už kitų dviejų skirtumą), $2 < AM < 7$.
3. Sveikosios reikšmės: 3, 4, 5, 6. Kiekviena tinka: trikampį AMN su kraštinėmis 4,5, 2,5, AM galima nubrėžti, o C gauname pratęsę AN už N ($NC = AN$), B – pratęsę CM už M ($MB = MC$).

Pamoka. du viduriai → vidurio linija: ji sujungia AM su kraštinių pusėmis į vieną trikampį (tą patį duoda ir pusiaukraštinės dvigubinimas iki lygiagretainio).

12 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

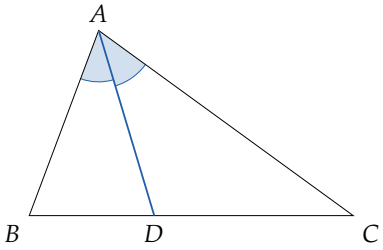
Ką matau. suma $PA + PB$, taškas P – tiesėje l, A ir B – vienoje jos pusėje (kaip upės uždavinyje).

Idėja (T13). atspindime A tiesės l atžvilgiu: A'; laužtė APB virsta tokio pat ilgio laužte $A'PB$.

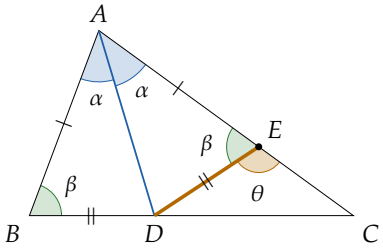
1. a) $AH \perp l$, $HA' = HA$: l – atkarpos AA' vidurio statmuo, todėl $PA = PA'$ kiekvienam $P \in l$ ir $OA' = OA = 9$ (vidurio statmuo).
2. $\angle A'OX = \angle AOX = 20°$ (lygiašonio aukštinė iš viršūnės – ir pusiaukampinė, $OA = OA'$); pažymėkime juos α.
3. $PA + PB = PA' + PB \geq A'B$ (trikampio nelygybė); A' ir B – skirtingose l pusėse, todėl atkarpa $A'B$ kerta l taške P_0, ir kai $P = P_0$, $PA + PB = A'B$.
4. $OA' = OB = 9$, $\angle A'OB = 20° + 40° = 60°$, todėl trikampis $A'OB$ lygiakraštis (lygiašonis su $60°$ kampu): mažiausia suma $A'B = 9$ cm.
5. b) P – atkarpoje $A'B$, todėl $\angle OBP = \angle OBA' = 60°$ (lygiakraščio trikampio kampas); pažymėkime jį β.
6. Pažymėkime $\angle OPB = \theta$. Tada $\theta = 180° - 40° - 60° = 80°$ (trikampio OBP kampų suma).

Pamoka. atspindys ištiesina laužtę; čia ištiesinta atkarpa $A'B$ – lygiakraščio trikampio kraštinė, todėl ją galima rasti be skaičiavimų.

13 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

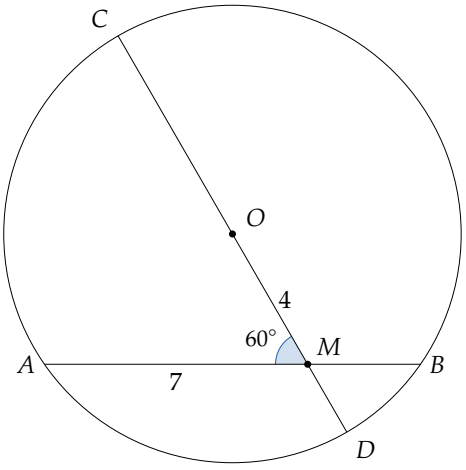
Ką matau. pusiaukampinė ir nelygios kraštinės prie jos kampo.

Idėja (T10). atspindime trikampį ABD per pusiaukampinę: kraštinėje AC atidedame $AE = AB$ ($AC > AB$, todėl E – tarp A ir C).

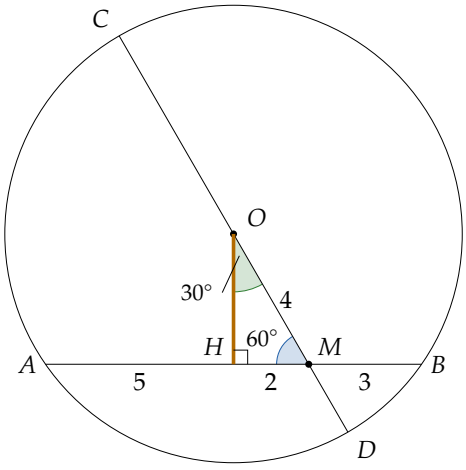
1. $\triangle ABD = \triangle AED$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = AE$, AD bendra, $\angle BAD = \angle EAD$; pažymėkime juos α), todėl $ED = BD$, $\angle AED = \angle ABD$; pažymėkime juos β.
2. a) Pažymėkime $\angle DEC = \theta$. Tada $\theta = 180° - \beta$ (gretutiniai kampai) $= \angle BAC + \angle ACB$ (trikampio ABC kampų suma), todėl $\theta > \angle ACB = \angle DCE$.
3. $CD > ED = BD$ (trikampyje DEC prieš didesnį kampą – didesnė kraštinė).
4. b) $CD < EC + ED$ (trikampio nelygybė, trikampis DEC); $EC = AC - AB$, $ED = BD$, todėl $CD < AC - AB + BD$, t. y. $CD - BD < AC - AB$.

Pamoka. atspindys per pusiaukampinę perkelia BD į ED, o kraštinių skirtumą $AC - AB$ – į atkarpą EC; abi atsiduria viename trikampyje DEC.

14 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

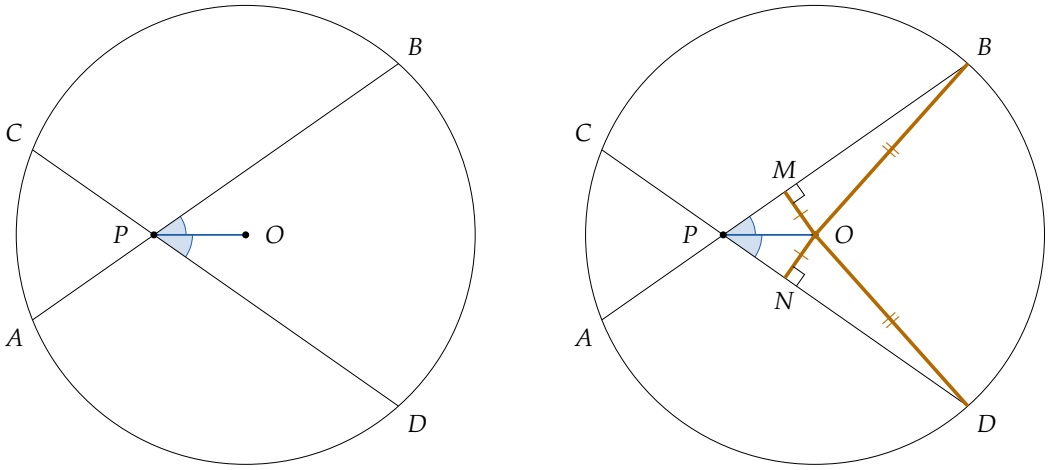
Ką matau. styga ir centras.

Idėja (T15). nuleidžiame statmenį OH į stygą AB.

1. $OH \perp AB$ ($H \in AB$), todėl $AH = HB$ (statmuo iš centro į stygą).
2. $\angle OMH = 60°$, $\angle HOM = 30°$ (trikampio kampų suma), $HM = \frac{1}{2}OM = 2$ (statinis prieš $30°$ kampą).
3. $AM > MB$, todėl $AM > \frac{1}{2}AB = AH$: H – tarp A ir M. $AH = AM - HM = 5$, $HB = 5$, $MB = HB - HM = 3$, $AB = 10$.

Pamoka. kai taško H padėtis keičia atsakymą, ją reikia pagrįsti: kitu atveju (H tarp M ir B) būtų $MB = 11 > AM$.

15 uždavinys.



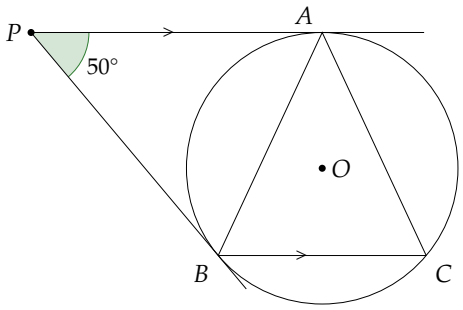
Ką matau. stygos ir centras; centras – pusiaukampinėje, t. y. vienodai nutolęs nuo AB ir CD.

Idėja (T15). nuleidžiame statmenis iš centro į abi stygas.

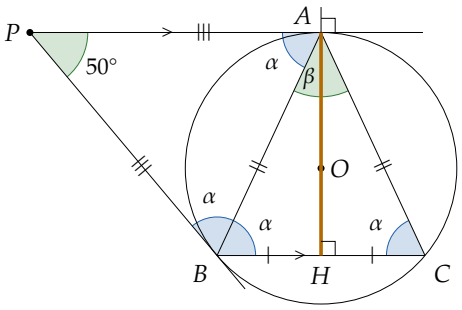
1. $OM \perp AB$, $ON \perp CD$: $MB = \frac{1}{2}AB$, $ND = \frac{1}{2}CD$ (statmuo iš centro į stygą).
2. $\triangle OMP = \triangle ONP$ (įžambinė ir smailusis kampas: OP bendra, $\angle OPM = \angle OPN$), todėl $OM = ON$, $PM = PN$.
3. $\triangle OMB = \triangle OND$ (įžambinė ir statinis: $OB = OD$ – spinduliai, $OM = ON$), todėl $MB = ND$ ir $AB = 2MB = 2ND = CD$.
4. $PB = PM + MB = PN + ND = PD$.

Pamoka. stygos, vienodai nutolusios nuo centro, lygios.

16 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

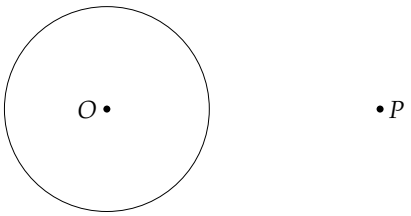
Ką matau. liestinė PA ir jai lygiagreti styga BC.

Idėja (T14). nubrėžiame spindulį OA į lietimosi tašką.

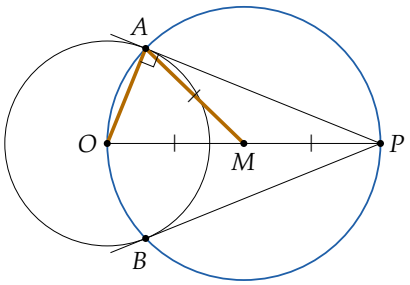
1. a) $OA \perp PA$ (liestinė statmena spinduliui), $BC \parallel PA$, todėl $OA \perp BC$ (vidaus vienašaliai kampai).
2. Tiesė OA dalija stygą BC pusiau (statmuo iš centro į stygą), todėl ji – atkarpos BC vidurio statmuo, ir $AB = AC$ (vidurio statmuo).
3. b) $PA = PB$ (liestinių atkarpos), $\angle PAB = \angle PBA = \frac{1}{2}(180° - 50°) = 65°$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma); pažymėkime juos α.
4. $\angle ABC = \angle PAB = \alpha = 65°$ (vidaus priešiniai kampai, $BC \parallel PA$).
5. $\angle ACB = \angle ABC = 65°$ (kampai prie pagrindo, $AB = AC$), $\angle BAC = 180° - 2 \cdot 65° = 50°$ (trikampio kampų suma); pažymėkime jį β.

Pamoka. liestinė $\longrightarrow$ spindulys: spindulys į lietimosi tašką statmenas liestinei, taigi ir jai lygiagrečiai stygai – tad jo tiesė yra tos stygos vidurio statmuo.

17 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

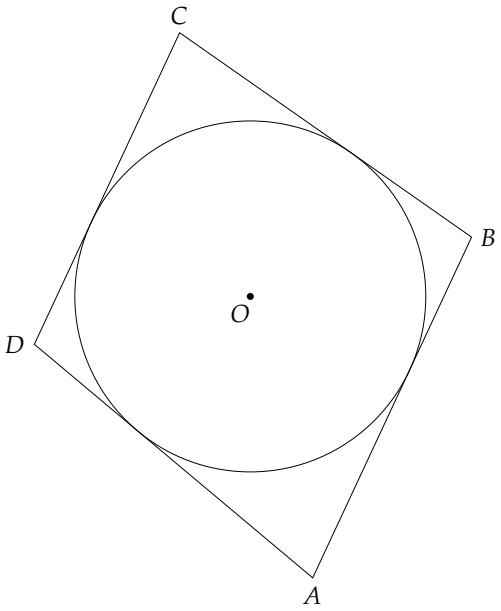
Ką matau. liestinė iš taško – reikia stačiojo kampo prie lietimosi taško.

Idėja (T11). statusis kampas $\Leftrightarrow$ pusiaukraštinė lygi pusei kraštinės: ieškome taškų A, kuriems $MA = MO = MP$.

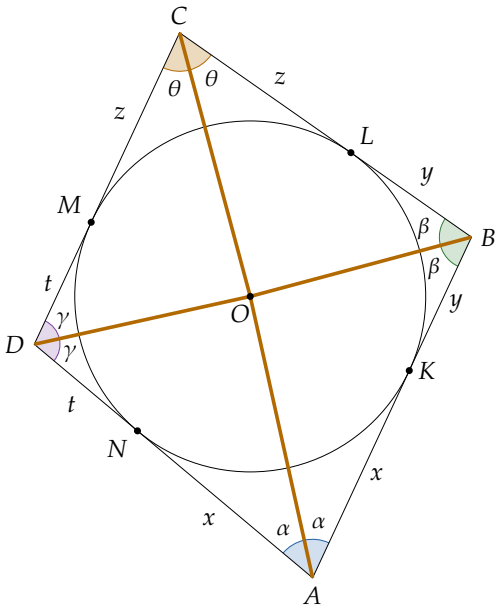
1. Konstravimas: nubrėžiame atkarpos OP vidurio statmenį ir randame jos vidurį M; apskritimas su centru M ir spinduliu MO kerta duotąjį apskritimą taškuose A ir B. Tiesės PA ir PB – ieškomos liestinės.
2. Įrodymas: trikampio OAP pusiaukraštinė $AM = MO = \frac{1}{2}OP$, todėl $\angle OAP = 90°$ (pusiaukraštinė į įžambinę, atvirkščiai).
3. $PA \perp OA$ spindulio gale A, todėl PA – liestinė (liestinė ir spindulys, atvirkščiai). Taip pat PB.

Pamoka. atkarpa OP iš taško A matoma stačiu kampu $\Leftrightarrow$ A yra apskritime, kurio skersmuo OP.

18 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

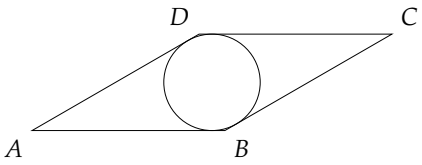
Ką matau. keturkampio kraštinės – apskritimo liestinės; iš kiekvienos viršūnės – dvi liestinių atkarpos.

Idėja (T16, T14). a) liestinių atkarpos iš viršūnių; b) sujungiame O su viršūnėmis.

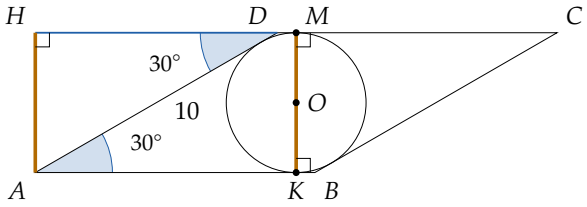
1. a) $AK = AN = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$, $DM = DN = t$ (liestinių atkarpos).
2. $AB + CD = (x + y) + (z + t) = (x + t) + (y + z) = AD + BC$.
3. b) OA, OB, OC, OD – keturkampio kampų pusiaukampinės (liestinių atkarpos). Pažymėkime $\angle BAO = \angle OAD = \alpha$, $\angle CBO = \angle OBA = \beta$, $\angle DCO = \angle OCB = \theta$, $\angle ADO = \angle ODC = \gamma$. Tada $2\alpha + 2\beta + 2\theta + 2\gamma = 360°$ (keturkampio kampų suma) ir $\alpha + \beta + \theta + \gamma = 180°$.
4. $\angle AOB + \angle COD = \big(180° - (\alpha + \beta)\big) + \big(180° - (\theta + \gamma)\big) = 360° - 180° = 180°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių sumos lygios.

19 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

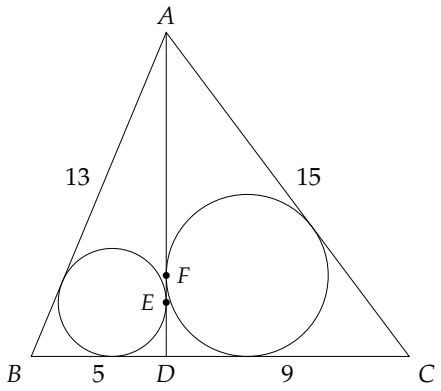
Ką matau. apskritimas liečia keturias kraštines; lygiagretainis.

Idėja. priešingų kraštinių sumos lygios (18 uždavinys); centras – pusiaukampinėse.

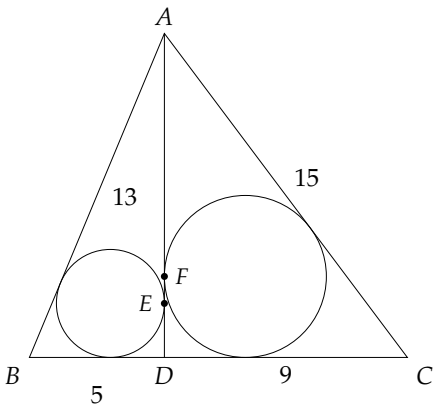
1. a) $AB + CD = BC + DA$ (18 uždavinys), $AB = CD$, $BC = DA$ (lygiagretainio savybės), todėl $2AB = 2BC$: $ABCD$ – rombas (gretimos kraštinės lygios).
2. Centras vienodai nutolęs nuo AB ir AD, nuo BA ir BC, todėl jis – kampų A ir B pusiaukampinėse (pusiaukampinė), t. y. įstrižainėse AC ir BD (rombo įstrižainės dalija kampus pusiau): centras – taškas O.
3. b) Spinduliai $OK \perp AB$, $OM \perp CD$ (liestinė statmena spinduliui), $AB \parallel CD$, todėl K, O, M – vienoje tiesėje, ir $KM = 2r$ – atstumas tarp AB ir CD.
4. $AH \perp CD$ (H – tiesėje CD): $\angle ADH = \angle DAB = 30°$ (vidaus priešiniai kampai), $AH = \frac{1}{2}AD = 5$ (statinis prieš $30°$ kampą); atstumas tarp lygiagrečių visur vienodas, todėl $2r = 5$, $r = 2{,}5\,\text{cm}$.

Pamoka. apskritimą galima įbrėžti tik į tokį lygiagretainį, kuris yra rombas; jo skersmuo lygus rombo aukštinei (atstumui tarp priešingų kraštinių).

20 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

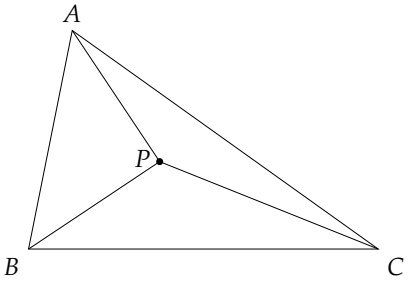
Ką matau. nežinoma AD – abiejų trikampių kraštinė.

Idėja. atkarpa iki lietimosi taško abiejuose trikampiuose.

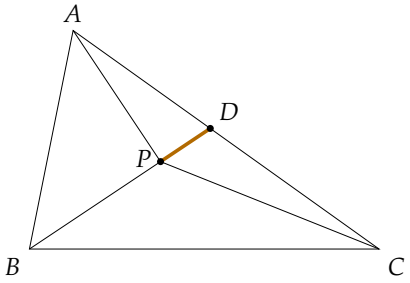
1. $AE = \frac{13+5+AD}{2} - 5 = \frac{8+AD}{2}$ (trikampis ABD; atkarpa iki lietimosi taško).
2. $AF = \frac{15+9+AD}{2} - 9 = \frac{6+AD}{2}$ (trikampis ACD); $AE > AF$, todėl $EF = AE - AF = 1$.

Pamoka. nežinomas ilgis AD išnyko – jo rasti nereikėjo.

21 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

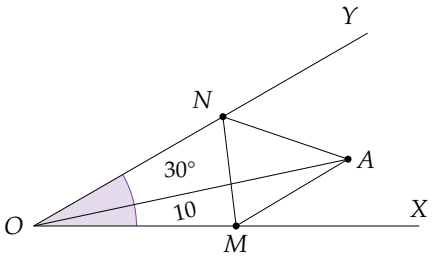
Ką matau. atkarpų sumos – trikampio nelygybė.

Idėja (T13). dešinei nelygybei pratęsiame BP iki kraštinės AC.

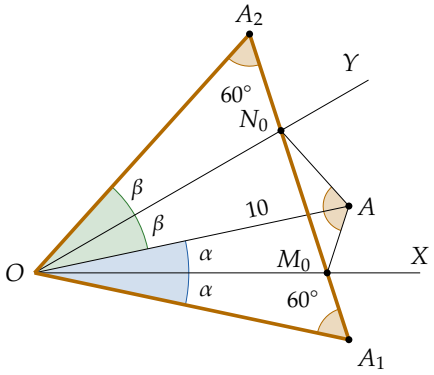
1. $PA+PB > AB, PB+PC > BC, PC+PA > CA$ (trikampio nelygybė). Sudėję: $2(PA+PB+PC) > 2p$, todėl $PA + PB + PC > p$.
2. $AB + AD > BD = BP + PD$, $PD + DC > PC$ (trikampio nelygybė trikampiuose ABD ir PDC).
3. Sudėję: $AB + AD + DC + PD > BP + PD + PC$, t. y. $AB + AC > PB + PC$.
4. Taip pat $BA+BC > PA+PC$ ir $CA+CB > PA+PB$. Sudėję: $2(AB+BC+CA) > 2(PA+PB+PC)$, todėl $PA + PB + PC < 2p$.

Pamoka. atkarpą iš vidinio taško pratęsus iki kraštinės, trikampio nelygybę galima taikyti du kartus.

22 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

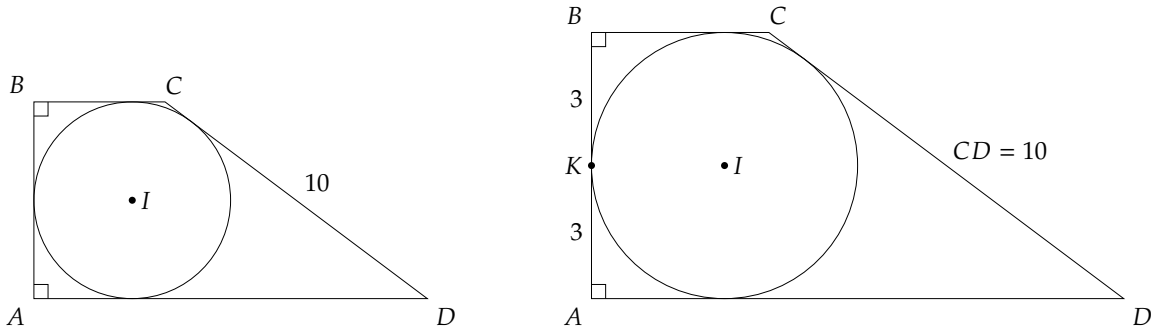
Ką matau. trikampio perimetras – laužtė $AMNA$, kurios viršūnės M, N juda tiesėmis.

Idėja (T13). atspindžiai tiesių atžvilgiu: A_1 – taško A atspindys tiesės OX, A_2 – tiesės OY atžvilgiu.

1. a) OX – atkarpos AA_1 vidurio statmuo, todėl $MA = MA_1$, $OA_1 = OA = 10$ (vidurio statmuo) ir $\angle A_1OX = \angle AOX$ (lygiašonio aukštinė iš viršūnės – ir pusiaukampinė); pažymėkime juos α.
2. Taip pat $NA = NA_2$, $OA_2 = 10$, $\angle A_2OY = \angle AOY$; pažymėkime juos β.
3. $\angle A_1OA_2 = 2\alpha + 2\beta = 60°$, todėl trikampis OA_1A_2 lygiakraštis (lygiašonis su $60°$ kampu), $A_1A_2 = 10$.
4. $AM + MN + NA = A_1M + MN + NA_2 \geq A_1A_2 = 10$ (trikampio nelygybė); lygybė – kai M ir N yra atkarpos A_1A_2 susikirtimo su OX ir OY taškai M_0 ir N_0. Mažiausias perimetras – 10 cm.
5. b) $\angle OA_1M_0 = \angle OA_2N_0 = 60°$ (lygiakraštis trikampis).
6. $\triangle OM_0A = \triangle OM_0A_1$ (trys kraštinės: $OA = OA_1$, $M_0A = M_0A_1$, OM_0 bendra), todėl $\angle OAM_0 = \angle OA_1M_0 = 60°$. Taip pat $\triangle ON_0A = \triangle ON_0A_2$ ir $\angle OAN_0 = 60°$.
7. $\angle M_0AN_0 = 60° + 60° = 120°$.

Pamoka. kelias su dviem „atsimušimais“ – du atspindžiai, ir laužtė virsta tiesia atkarpa.

23 uždavinys.



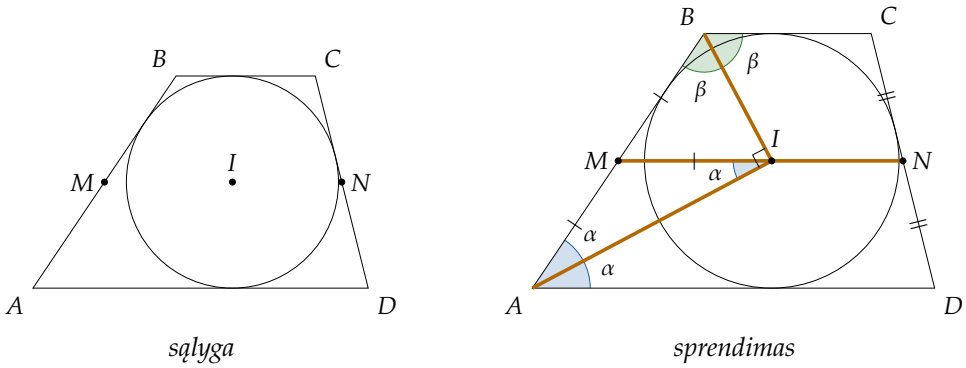
Ką matau. apskritimas liečia visas kraštines; du statieji kampai.

Idėja. prie stačiųjų kampų liestinių atkarpos lygios r; priešingų kraštinių sumos lygios.

1. $AK = BK = r = 3$ (liestinių atkarpos prie stačiojo kampo), $AB = 6$.
2. $BC+DA = AB+CD = 16$ (apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių sumos, 18 uždavinys), perimetras 32.

Pamoka. du įrankiai kartu: prie stačiojo kampo liestinių atkarpos lygios r, o priešingų kraštinių sumos lygios.

24 uždavinys.



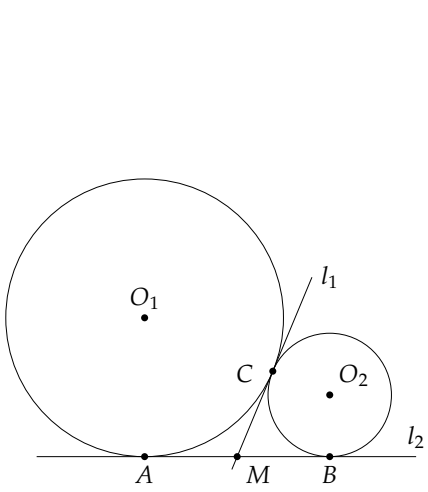
Ką matau. apskritimas liečia keturias kraštines; trapecija; šoninių kraštinių viduriai.

Idėja (T11). AI, BI – pusiaukampinės, $\angle AIB = 90°$; trikampyje AIB – pusiaukraštinė į įžambinę IM.

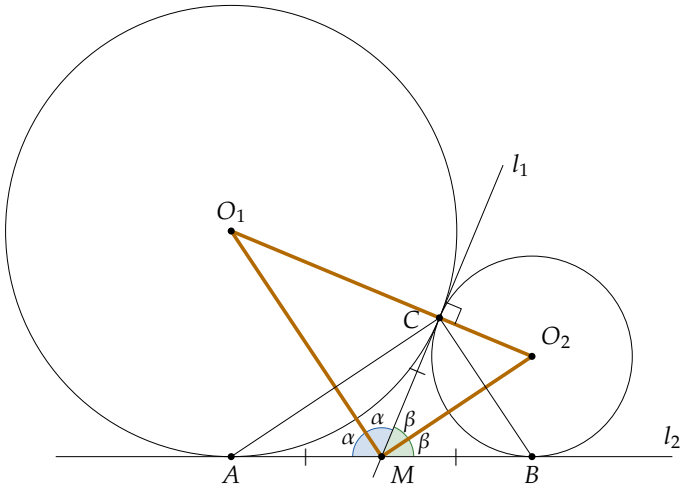
1. a) Pažymėkime $\angle IAD = \angle IAB = \alpha$, $\angle IBA = \angle IBC = \beta$ (liestinių atkarpos: centras – pusiaukampinėse). Tada $2\alpha + 2\beta = 180°$ (vidaus vienašaliai kampai, $AD \parallel BC$).
2. $\angle AIB = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$ (trikampio kampų suma).
3. b) $MI = MA = \frac{1}{2}AB$ (pusiaukraštinė į įžambinę), todėl $\angle MIA = \angle MAI = \alpha = \angle IAD$ (kampai prie pagrindo), ir $MI \parallel AD$ (lygiagretumo požymis: vidaus priešiniai kampai).
4. Per M eina tik viena tiesė, lygiagreti AD, – vidurio linijos tiesė; todėl I yra tiesėje MN. Taip pat $NI = \frac{1}{2}CD$, ir $MN = MI + IN = \frac{AB+CD}{2}$.
5. c) $MN = \frac{7+11}{2} = 9$ (b dalis); $AD + BC = 2MN = 18$ (trapecijos vidurio linija), perimetras $18 + 18 = 36$.

Pamoka. trapecijoje, į kurią įbrėžtas apskritimas, vidurio linija lygi pusei šoninių kraštinių sumos (taip pat matyti iš $AD + BC = AB + CD$), o šoninė kraštinė iš centro matoma stačiu kampu.

25 uždavinys.



sąlyga



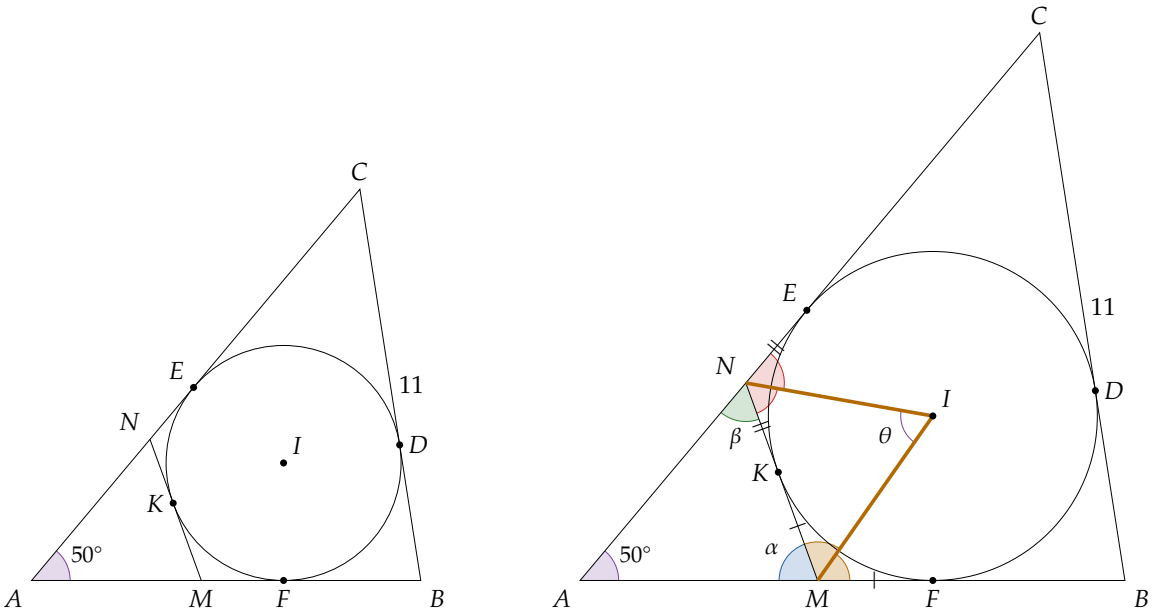
sprendimas

Ką matau. iš taško M – po dvi liestines į kiekvieną apskritimą.

Idėja (T14). spinduliai į lietimosi tašką C; liestinių atkarpos iš M.

1. a) $O_1C \perp l_1$, $O_2C \perp l_1$ (liestinė statmena spinduliui); O_1 ir O_2 – skirtingose l_1 pusėse, todėl $\angle O_1CM + \angle MCO_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$: O_1, C, O_2 – vienoje tiesėje.
2. b) $MA = MC$ ir $MB = MC$ (liestinių atkarpos), todėl $MA = MB = MC = \frac{1}{2}AB$: M – atkarpos AB vidurys.
3. Pusiaukraštinė CM lygi pusei kraštinės AB, todėl $\angle ACB = 90^\circ$ (pusiaukraštinė į įžambinę).
4. c) MO_1 – kampo AMC pusiaukampinė, MO_2 – kampo BMC pusiaukampinė (liestinių atkarpos).
5. Pažymėkime $\angle AMO_1 = \angle O_1MC = \alpha$, $\angle CMO_2 = \angle O_2MB = \beta$. Tada $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ (gretutiniai kampai), todėl $\angle O_1MO_2 = \alpha + \beta = 90^\circ$.

26 uždavinys.

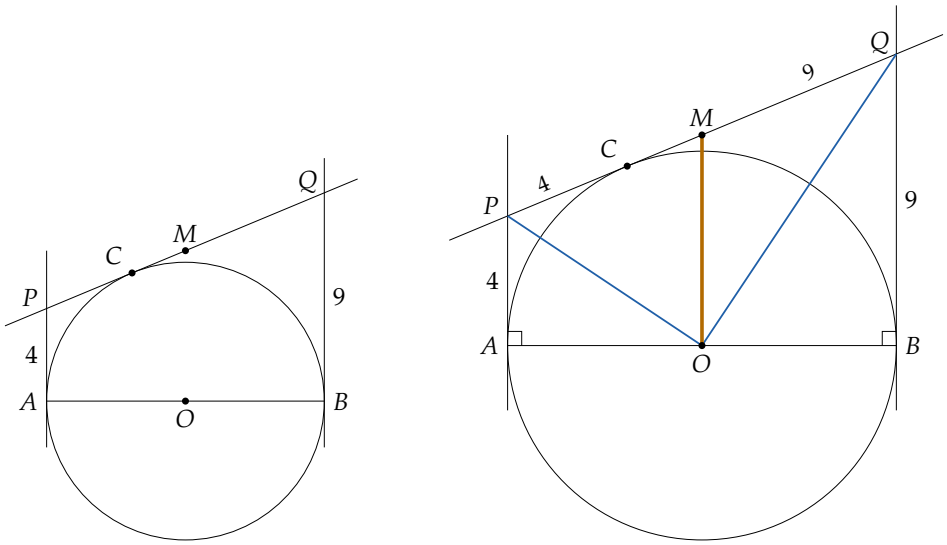


Ką matau. iš A, M, N – po dvi liestinių atkarpas.

Idėja. a) liestinių atkarpos; b) liestinių atkarpos iš M ir N – pusiaukampinės.

1. a) $p = 18$, $AF = AE = p - BC = 18 - 11 = 7$ (atkarpa iki lietimosi taško).
2. $MK = MF$, $NK = NE$ (liestinių atkarpos), todėl $P_{AMN} = AM + MK + KN + NA = (AM + MF) + (NE + NA) = AF + AE = 14\,\text{cm}$.
3. b) Pažymėkime $\angle AMN = \alpha$, $\angle ANM = \beta$. Tada $\alpha + \beta = 130°$ (trikampio AMN kampų suma). MI, NI – kampų $FMN = 180° - \alpha$ ir $ENM = 180° - \beta$ pusiaukampinės (liestinių atkarpos; gretutiniai kampai).
4. $\angle IMN + \angle INM = \frac{1}{2}(360° - 130°) = 115°$, $\angle MIN = 180° - 115° = 65°$ (trikampio MIN kampų suma); pažymėkime jį θ.

27 uždavinys.



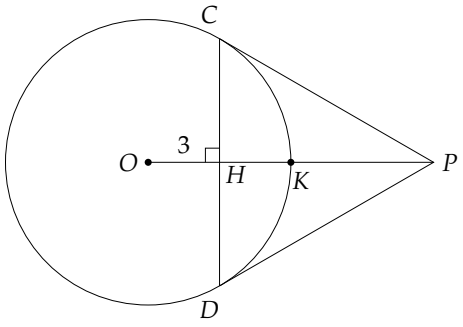
Ką matau. dvi lygiagrečios liestinės ir trečioji; O ir M – viduriai.

Idėja (T14, T8). liestinių atkarpos; OM – trapecijos vidurio linija.

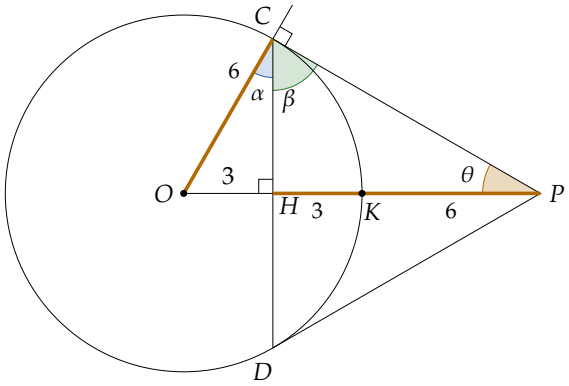
1. a) $PA \perp AB$, $QB \perp AB$ (liestinė statmena spinduliui), todėl $PA \parallel QB$ (vidaus vienašaliai kampai), o $PA \neq QB$: $APQB$ – trapecija.
2. $PC = PA = 4$, $QC = QB = 9$ (liestinių atkarpos), $PQ = 13$.
3. b) O ir M – šoninių kraštinių AB ir PQ viduriai, todėl $OM = \frac{4+9}{2} = 6{,}5$ (trapecijos vidurio linija).
4. c) Trikampio POQ pusiaukraštinė $OM = 6{,}5 = \frac{1}{2}PQ$, todėl $\angle POQ = 90°$ (pusiaukraštinė į įžambinę, atvirkščiai).

Pamoka. dvi lygiagrečios liestinės ir trečioji sudaro trapeciją; jos vidurio linija lygi pusei PQ, todėl PQ iš centro matoma stačiu kampu.

28 uždavinys.



sąlyga



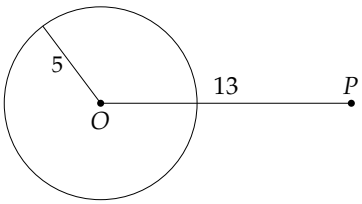
sprendimas

Ką matau. atstumas nuo centro iki stygos lygus pusei spindulio; dvi liestinės.

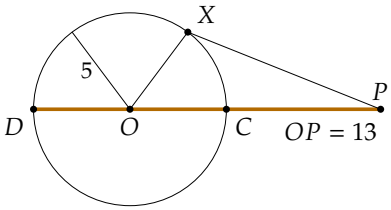
Idėja (T15, T14). statmuo OH į stygą, spindulys OC; b) pusiaukraštinių susikirtimas $2:1$.

1. a) $OH \perp CD$, $OH = 3 = \frac{1}{2}OC$, todėl $\angle OCH = 30°$ (statinis prieš $30°$ kampą, atvirkščiai); pažymėkime jį α.
2. $\angle OCP = 90°$ (liestinė statmena spinduliui), todėl $\angle PCD = 90° - 30° = 60°$ (pažymėkime jį β); $PC = PD$ (liestinių atkarpos) – lygiašonis su $60°$ kampu, todėl PCD lygiakraštis.
3. PO – kampo CPD pusiaukampinė (liestinių atkarpos), $\angle CPO = 30°$ (pažymėkime jį θ), todėl $OP = 2\,OC = 12\,\text{cm}$ (statinis prieš $30°$ kampą).
4. b) Lygiašonio trikampio PCD pusiaukampinė PO yra ir pusiaukraštinė, todėl eina per stygos CD vidurį H ($H \in OP$, $K \in PH$); $PH = 12 - 3 = 9$, $PK = 12 - 6 = 6 = \frac{2}{3}PH$.
5. K dalija pusiaukraštinę PH santykiu $2:1$ nuo viršūnės, todėl K – pusiaukraštinių susikirtimo taškas (pusiaukraštinių susikirtimas). Lygiakraščiame trikampyje pusiaukraštinės yra ir pusiaukampinės (lygiašonio pusiaukampinė), todėl K – įbrėžtinio apskritimo centras (įbrėžtinis apskritimas).

29 uždavinys.



sąlyga



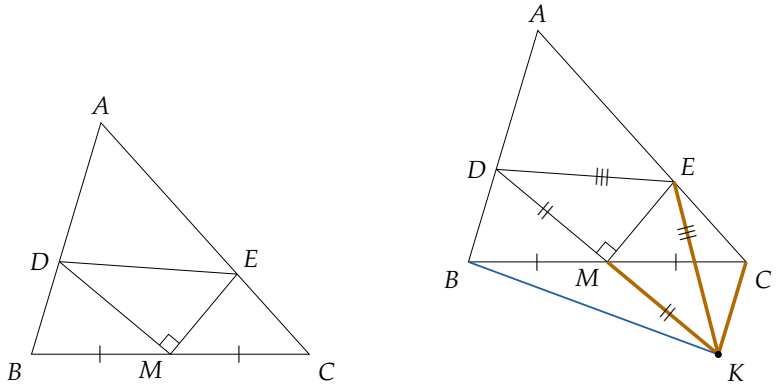
sprendimas

Ką matau. atstumas nuo taško iki kintamo apskritimo taško; žinomi OX ir OP.

Idėja. trikampio nelygybė trikampyje OXP.

1. X – bet kuris apskritimo taškas, $OX = 5$. $PX \geq OP - OX = 8$ (kraštinė didesnė už kitų dviejų skirtumą; trikampis OXP arba X tiesėje OP); lygybė – kai X atkarpoje OP, t. y. $X = C$.
2. $PX \leq PO + OX = 18$ (trikampio nelygybė); lygybė – kai O atkarpoje PX, t. y. $X = D$.
3. $PC = 13 - 5 = 8$, $PD = 13 + 5 = 18$.

30 uždavinys.

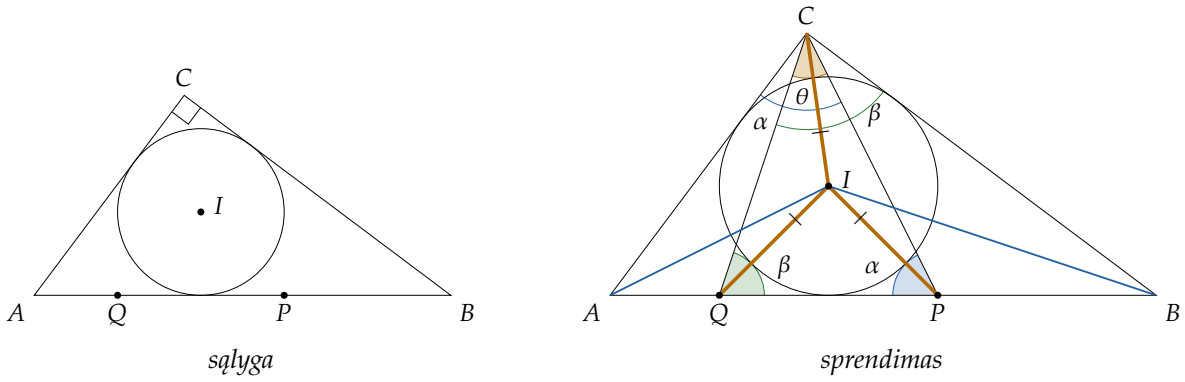


Ką matau. dvi atskiros atkarpos BD ir CE; M – vidurys.

Idėja (T6, T13). pratęsiame DM tiek pat – gauname lygiagretainį: BD „persikelia“ į CK.

1. a) Pratęsiame DM už M: $MK = DM$. $BDCK$ – lygiagretainis (įstrižainės DK ir BC dalija viena kitą pusiau), todėl $CK = BD$ (priešingos kraštinės).
2. $EM \perp DK$ ir $DM = MK$: EM – atkarpos DK vidurio statmuo, todėl $EK = DE$ (vidurio statmuo).
3. $CK + CE > EK$ (trikampio nelygybė), t. y. $BD + CE > DE$.
4. b) $AB + AC = AD + AE + (BD + CE) > AD + AE + DE$.

31 uždavinys.



Ką matau. $AP = AC$, $BQ = BC$ – lygiašoniai trikampiai APC ir BQC; įbrėžtas apskritimas.

Idėja. a) kampai prie pagrindų; b) I – pusiaukampinių susikirtimas.

1. a) $AC + BC > AB$ (trikampio nelygybė), t. y. $AP + BQ > AP + PB$, $BQ > PB$: Q – atkarpoje AP, ir $PQ = AC + BC - AB$.
2. Pažymėkime $\angle ACP = \angle APC = \alpha$, $\angle BCQ = \angle BQC = \beta$ (kampai prie pagrindo), $\angle PCQ = \theta$. Kampas θ įeina ir į α, ir į β, todėl $\alpha + \beta = 90^\circ + \theta$; o $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ (trikampio PCQ kampų suma). Taigi $90^\circ + 2\theta = 180^\circ$, $\theta = 45^\circ$.
3. b) AI, BI, CI – pusiaukampinės (įbrėžtinis apskritimas), $\angle ACI = \angle BCI = 45^\circ$.
4. $\triangle API = \triangle ACI$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AP = AC$, AI bendra, $\angle PAI = \angle CAI$), todėl $IP = IC$, $\angle API = 45^\circ$. Taip pat $IQ = IC$, $\angle BQI = 45^\circ$.
5. $\angle PIQ = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ (trikampio kampų suma); $PQ = AC + BC - AB = 2(p - AB) = 2r$ (1 žingsnis; stačiajame trikampyje $r = p - c$).