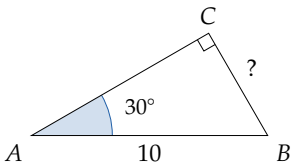
Geometrija

Lapas 3. Lygių trikampių metodas II: statieji trikampiai ir taškų aibės

9 klasė

Klausimas pradžiai. Stačiojo trikampio ABC kampas C status, $\angle A = 30°$, įžambinė $AB = 10$. Koks statinis BC?
Žinome tik vieną kraštinę ir kampus. Atsakymas – 20 įrankyje.



1. Nuo ko pradedame

Iš 1, 2, 2b ir 2c lapų turime įrankius 1–17 ir trikampių lygumo požymius (dvi kraštinės ir kampas tarp jų; kraštinė ir du kampai prie jos; trys kraštinės).

1. Kryžminiai kampai lygūs.
2. Lygiagrečios tiesės $\Leftrightarrow$ vidaus priešiniai (atitinkamieji) kampai lygūs, vidaus vienašalių suma $180°$.
3. Trikampio kampų suma $180°$.
4. Priekampis lygus dviejų jam negretimų kampų sumai.
5. n-kampio kampų suma $(n-2)\cdot 180°$.
6. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs.
7. Du lygūs kampai $\Rightarrow$ trikampis lygiašonis.
8. Lygiašonio pusiaukampinė iš viršūnės yra ir pusiaukraštinė, ir aukštinė (tai ta pati atkarpa: ir pusiaukraštinė ar aukštinė iš viršūnės yra pusiaukampinė).
9. Lygiakraščio kampai po $60°$; lygiašonis su $60°$ kampu – lygiakraštis.
10. Lygiagretainio priešingos kraštinės ir priešingi kampai lygūs; įstrižainės dalija viena kitą pusiau.
11. Lygiagretainis, jei: priešingos kraštinės poromis lygios; viena pora lygi ir lygiagreti; įstrižainės dalija viena kitą pusiau; priešingi kampai poromis lygūs.
12. Stačiakampio įstrižainės lygios; lygiagretainis su stačiu kampu ar lygiomis įstrižainėmis – stačiakampis.
13. Rombo įstrižainės statmenos ir dalija kampus pusiau; lygiagretainis su lygiomis gretimomis kraštinėmis ar statmenomis įstrižainėmis – rombas.
14. Vidurio linija lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei; tiesė per kraštinės vidurį, lygiagreti antrajai, kerta trečiąją viduryje.
15. Pusiaukraštinės kertasi viename taške G, kuris dalija jas santykiu $2:1$ nuo viršūnės.
16. Trapecijos vidurio linija lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei.
17. Lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo lygūs, įstrižainės lygios (ir atvirkščiai).

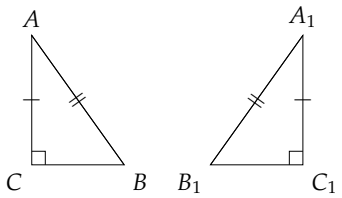
Technikos T1–T9: kampų gaudymas, papildoma lygiagreti tiesė, lygūs trikampiai, pusiaukraštinė dvigubai, atidėk lygią atkarpą, užbaik iki lygiagretainio, centras O, du viduriai $\rightarrow$ vidurio linija, perkelk lygiagrečiai. Šiame lape lygių trikampių metodą taikome **statiesiems** trikampiams ir taškams, **vienodai nutolusiems** nuo taškų ar tiesių.

2. Statieji trikampiai

Stačiojo trikampio dvi kraštinės prie stačiojo kampo – **statiniai**, trečioji – **įžambinė**. Visi statieji kampai lygūs, todėl stačiųjų trikampių lygumo požymiams užtenka dviejų kitų elementų. Stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma 90° (trikampio kampų suma). Todėl du statieji trikampiai su bendru smailiuoju kampu turi lygius ir kitus smailiuosius kampus: pvz., smailiojo trikampio ABC aukštinės AD ir BE su kraštinėmis AC ir BC sudaro lygius kampus: $\angle DAC = \angle EBC = 90° - \angle C$.

Įrankis 18 (stačiųjų trikampių lygumas)

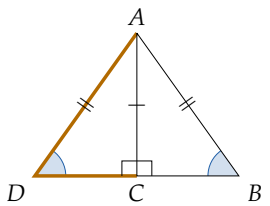
Statieji trikampiai lygūs, jei lygūs:
1. du statiniai;
2. statinis ir atitinkamas smailusis kampas (abiejuose prie statinio arba abiejuose prieš jį);
3. įžambinė ir smailusis kampas;
4. **įžambinė ir statinis** (parodyta brėžinyje).



Požymiai 1–3 išplaukia iš jau žinomų požymių ir kampų sumos – įrodykite patys (Pratimai 3 a, b). Požymio 4 nėra tarp žinomų: tai „dvi kraštinės ir kampas ne tarp jų“. Statiesiems trikampiams jis vis dėlto teisingas. Požymį 4 suvesime į požymį 3.

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

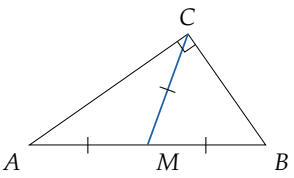
1. Kraštinės BC tęsinyje už C atidedame $CD = C_1B_1$; $\angle ACD = 90°$ (gretutiniai kampai).
2. $\triangle ACD = \triangle A_1C_1B_1$ (du statiniai: $AC = A_1C_1$, $CD = C_1B_1$), todėl $AD = A_1B_1 = AB$ ir $\angle D = \angle B_1$.
3. $\angle B = \angle D$ (kampai prie pagrindo, $AB = AD$), taigi $\angle B = \angle B_1$ ir $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (įžambinė ir smailusis kampas).



■

Įrankis 19 (pusiaukraštinė į įžambinę)

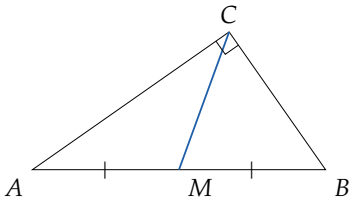
Stačiojo trikampio ($\angle C = 90°$) pusiaukraštinė į įžambinę lygi pusei įžambinės: $CM = AM = MB$. Ir atvirkščiai: jei trikampio pusiaukraštinė CM lygi pusei kraštinės AB, tai $\angle C = 90°$.



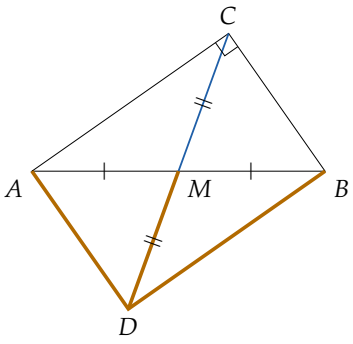
Atvirkštinį teiginį įrodykite patys (Pratimai 3 c).

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Įrodymas.



sąlyga



sprendimas

Idėja (T6). Pratęsiame CM už M iki D: $MD = CM$ – ir gauname stačiakampį.

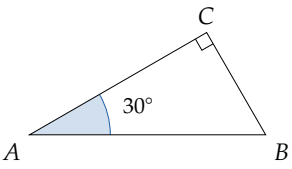
1. Keturkampio $ACBD$ įstrižainės AB ir CD dalija viena kitą pusiau, todėl jis lygiagretainis (lygiagretainio požymis), o kadangi $\angle C = 90°$, – stačiakampis (stačiakampio požymis).
2. Stačiakampio įstrižainės lygios: $CD = AB$, todėl $CM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$.

■

Išvada (pusiaukraštinė į įžambinę padvigubina kampą). $CM = AM$, todėl $\angle ACM = \angle A$ (kampai prie pagrindo) ir $\angle CMB = 2\angle A$ (priekampis).

Įrankis 20 (statinis prieš $30°$ kampą)

Stačiojo trikampio statinis prieš $30°$ kampą lygus pusei įžambinės: jei $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, tai $BC = \frac{1}{2}AB$. Ir atvirkščiai: jei statinis $BC = \frac{1}{2}AB$, tai $\angle A = 30°$.

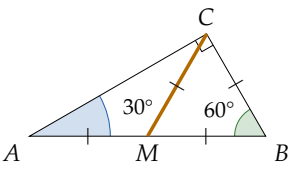


Atvirkštinį teiginį įrodykite patys (Pratimai 3 d).

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. $CM = MB = \frac{1}{2}AB$ (pusiaukraštinė į įžambinę), $\angle B = 90° - 30° = 60°$ (trikampio kampų suma).
2. $\triangle CMB$ – lygiašonis su $60°$ kampu, todėl lygiakraštis (lygiakraštis trikampis): $BC = MB = \frac{1}{2}AB$.

Klausimas pradžiai: $BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.



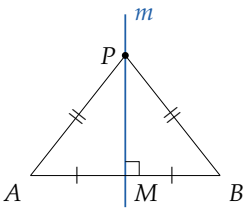
■

3. Taškų aibės

Primename: **atstumas** nuo taško iki tiesės – iš taško nuleisto statmens ilgis; atkarpos **vidurio statmuo** – tiesė, statmena atkarpai ir einanti per jos vidurį.

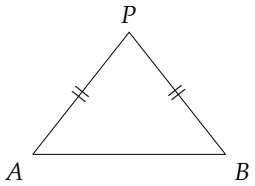
Įrankis 21 (vidurio statmuo)

Taškas P vienodai nutolęs nuo atkarpos AB galų ($PA = PB$) tada ir tik tada, kai jis yra atkarpos AB vidurio statmenyje m.

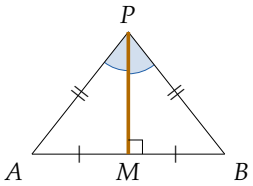


Kad vidurio statmens taškas vienodai nutolęs nuo A ir B, įrodykite patys (Pratimai 3 e). Įrodysime atvirkštinį teiginį.

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



sąlyga



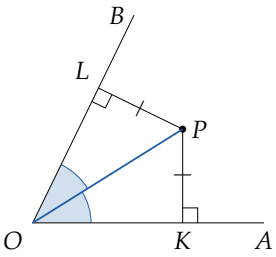
sprendimas

1. Jei P yra tiesėje AB, tai $PA = PB$ tik kai P – atkarpos vidurys; jis vidurio statmenyje.
2. Kitaip trikampis PAB lygiašonis; jo pusiaukampinė PM yra ir pusiaukraštinė, ir aukštinė (lygiašonio pusiaukampinė): $AM = MB$, $PM \perp AB$. Taigi PM – vidurio statmuo, P – jame.

■

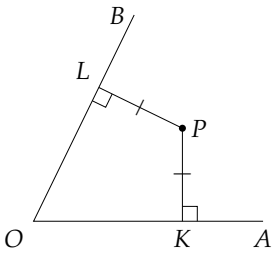
Įrankis 22 (pusiaukampinė)

Kampo AOB **viduje** esantis taškas P vienodai nutolęs nuo kraštinių tiesių ($PK = PL$, $PK \perp OA$, $PL \perp OB$) tada ir tik tada, kai jis yra kampo pusiaukampinėje.

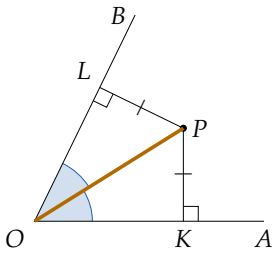


Kad pusiaukampinės taškas vienodai nutolęs nuo kraštinių tiesių, įrodykite patys (Pratimai 3 f). Čia įrodysime atvirkštinį teiginį.

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



sąlyga



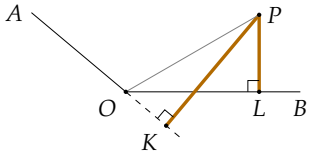
sprendimas

1. $\triangle OKP = \triangle OLP$ (įžambinė ir statinis: OP bendra, $PK = PL$).
2. Todėl $\angle KOP = \angle LOP$, t. y. $\angle AOP = \angle BOP$: OP – pusiaukampinė.

■

Išvada. Tada ir $OK = OL$ ($\triangle OKP = \triangle OLP$): atkarpos nuo kampo viršūnės iki statmenų pagrindų lygios.

Pastaba smalsiems (galima praleisti). Įrodyme tylomis tarėme, kad statmenų pagrindai K, L yra pačiose kraštinėse. Kai kampas AOB bukas, statmens pagrindas gali būti kraštinės **tęsinyje** (brėžinyje – K už taško O). Tada lygūs kampai KOP ir LOP nebūtų kampo AOB dalys. Tačiau kai $PK = PL$, taip nebūna: pvz., iš $\angle KOP = \angle LOP$ išeitų $\angle POA + \angle POB = 180°$, o ši suma lygi $\angle AOB < 180°$ (panašiai atmetamas ir atvejis $K = O$).

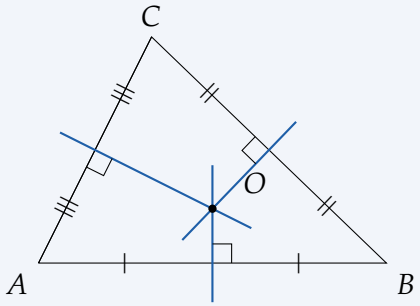


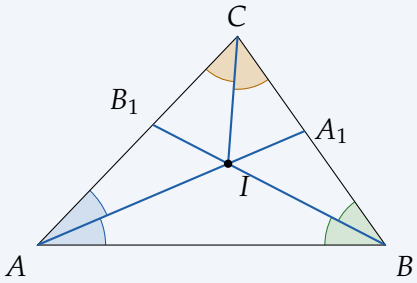
Dėmesio.

- **Kampo viduje** – būtina. Taškas, esantis ne kampo viduje ir vienodai nutolęs nuo kraštinių tiesių, gali būti gretutinio kampo pusiaukampinėje (3 pavyzdys).
- Nepainiokite: vienodai nutolęs nuo dviejų **taškų** ($PA = PB$) – vidurio statmuo; vienodai nutolęs nuo dviejų **tiesių** – pusiaukampinė.

Įrankis 23 (susikirtimo taškai)

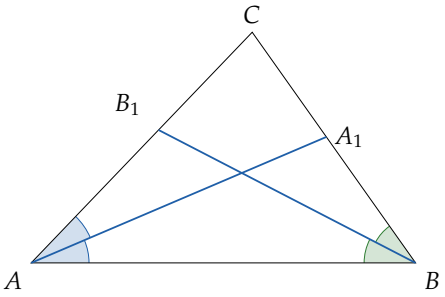
1. Trikampio **vidurio statmenys** kertasi viename taške O; $OA = OB = OC$.
2. Trikampio **pusiaukampinės** kertasi viename taške I, vienodai nutolusiame nuo visų kraštinių.



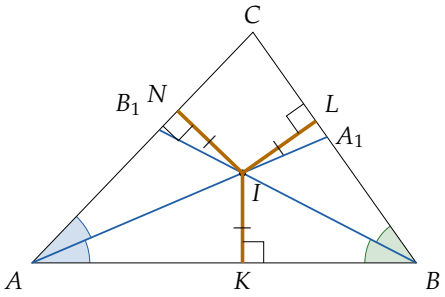


Bukajame trikampyje O yra už trikampio, o stačiajame – įžambinės vidurys M ($MA = MB = MC$: pusiaukraštinė į įžambinę). O ir I – būsimi apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimų centrai (apskritimai – vėliau). Vidurio statmenų atvejį įrodykite patys (Pratimai 3 g).

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



sąlyga



sprendimas

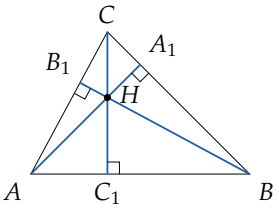
Pusiaukampinės AA_1 ir BB_1 kertasi trikampio viduje, taške I; IK, IL, IN – statmenys kraštinėms.

1. $IK = IN$ ir $IK = IL$ (pusiaukampinė: I – kampų A ir B pusiaukampinėse).
2. $IL = IN$ ir I – kampo C viduje, todėl CI – kampo C pusiaukampinė (pusiaukampinė, atvirkščiai).

■

Įrankis 24 (aukštinių susikirtimas)

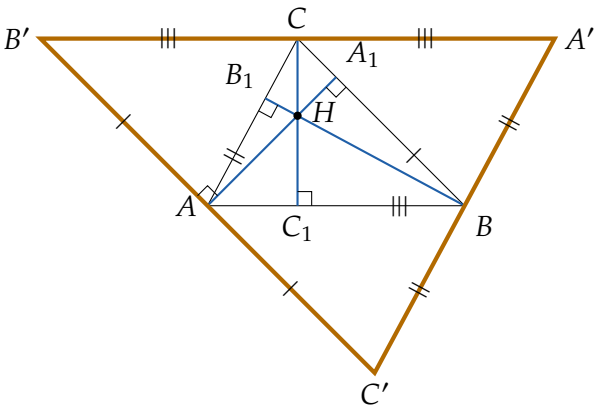
Trikampio aukštinių **tiesės** kertasi viename taške H.



Bukajame trikampyje H yra už trikampio (kertasi aukštinių tęsiniai), stačiajame – stačiojo kampo viršūnė.

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Įrodymas.

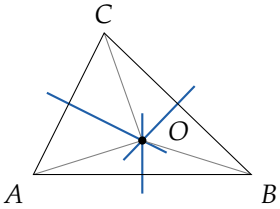


Idėja. Aukštines paverčiame kito trikampio vidurio statmenimis.

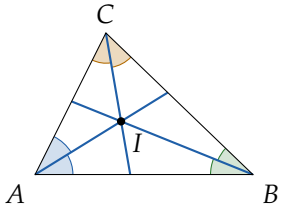
1. Per A, B, C brėžiame tieses, lygiagrečias BC, CA, AB; jos sudaro trikampį $A'B'C'$ (A – kraštinėje $B'C'$ ir t. t.).
2. $ABCB'$ ir $ACBC'$ – lygiagretainiai (priešingos kraštinės poromis lygiagrečios), todėl $AB' = BC = AC'$ (lygiagretainio savybė). Taigi A – atkarpos $B'C'$ vidurys; taip pat B – $A'C'$, C – $A'B'$ vidurys.
3. Aukštinės iš A tiesė statmena BC, o $B'C' \parallel BC$, todėl ji statmena ir $B'C'$ (atitinkamieji kampai): aukštinės iš A tiesė – atkarpos $B'C'$ vidurio statmuo. Taip pat ir kitos dvi.
4. Trikampio $A'B'C'$ vidurio statmenys kertasi viename taške (vidurio statmenų susikirtimas) – jame kertasi ir aukštinių tiesės.

■

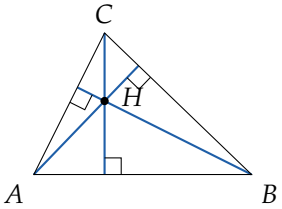
Pamoka. sunkų klausimą paversk jau išspręstu. Apie aukštines nieko nežinojome, bet papildomos lygiagrečios tiesės jas pavertė vidurio statmenimis, o vidurio statmenų susikirtimą jau mokame.
Keturi ypatingieji trikampio taškai (suvestinė). Pusiaukraštinių susikirtimo tašką G jau žinome iš 2c lapo.



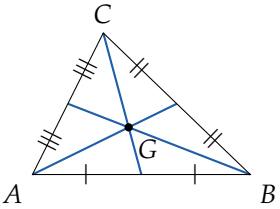
O – vidurio statmenys; $OA = OB = OC$



I – pusiaukampinės; vienodai nutolęs nuo kraštinių



H – aukštinių tiesės



G – pusiaukraštinės; dalija jas santykiu 2 : 1 nuo viršūnės

Lygiakraščiame trikampyje visi keturi taškai sutampa: kiekviena pusiaukampinė yra ir pusiaukraštinė, ir aukštinė, ir guli vidurio statmenyje (lygiašonio pusiaukampinė).

4. Ar teisingas atvirkščias teiginys?

Pratimai 1. Ar teisinga? Jei ne – nurodykite kontrpavyzdį; jei taip – pagrįskite (atsakymai – lapo gale).

a) Statinis prieš 30° kampą: jei $\angle C = 90°$ ir $\angle A = 30°$, tai $BC = \frac{1}{2}AB$. Atvirkštinį teiginį jau žinome: jei $\angle C = 90°$ ir $BC = \frac{1}{2}AB$, tai $\angle A = 30°$. Ar teisingas kitas atvirkštinis teiginys: „Jei trikampyje ABC $\angle A = 30°$ ir $BC = \frac{1}{2}AB$, tai $\angle C = 90°$“?
Užuomina: nubrėžkite aukštinę BH ir palyginkite ją su BC. Ar gali būti $H \neq C$?

b) Lygiakraščiame trikampyje visi keturi ypatingieji taškai O, I, H, G sutampa. Atvirkščiai: jei kurie nors du iš šių taškų sutampa, tai trikampis lygiakraštis.
Užuomina: pakanka įrodyti, kad $AB = AC$ (kitoms kraštinėms – tas pats). Atvejai $H = G$ ir $O = I$ išnagrinėti lapo gale; kitus ($O = H$, $O = G$, $I = H$, $I = G$) išnagrinėkite patys: kokia tiesė eina per A ir sutampančius taškus?

c) Pusiaukampinių susikirtimo taškas I vienodai nutolęs nuo trikampio kraštinių tiesių. Atvirkščiai: jei taškas vienodai nutolęs nuo tiesių AB, BC ir CA, tai jis – pusiaukampinių susikirtimo taškas I.
Užuomina: prisiminkite 3 pavyzdį.

5. Technikos

Technika T10. Atspindys per pusiaukampinę

Signalas: pusiaukampinė, o reikia lyginti atkarpas ar kampus skirtingose kampo pusėse.
Veiksmas: kampo O pusiaukampinė, taškas A vienoje kraštinėje – kitoje kraštinėje atidėk $OB = OA$. Sujunk A ir B su reikiamu pusiaukampinės tašku P: $\triangle OAP = \triangle OBP$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų). Skirtumas nuo T5: T5 signalas – atkarpų suma ar skirtumas, T10 signalas – pusiaukampinė.

Technika T11. Statusis + vidurys

Signalas: statusis kampas ir įžambinės vidurys; arba du statieji trikampiai su bendra įžambine (pvz., dvi aukštinės).
Veiksmas: sujunk įžambinės vidurį su stačiojo kampo viršūne (-ėmis): gausi lygias atkarpas ir lygiašonius trikampius. Atvirkščiai: pusiaukraštinė lygi pusei kraštinės → ieškok stačiojo kampo.

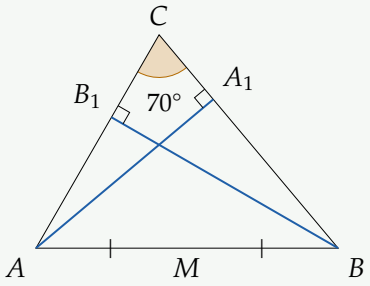
Technika T12. Taškas pusiaukampinėje arba vidurio statmenyje

Signalas: taškas yra pusiaukampinėje arba vidurio statmenyje.
Veiksmas: pusiaukampinėje – nuleisk statmenis į kraštinių tieses (jie lygūs); vidurio statmenyje – sujunk su atkarpos galais (lygiašonis). Atvirkščiai: vienodi atstumai iki tiesių → pusiaukampinė; vienodi atstumai iki taškų → vidurio statmuo.

6. Pavyzdžiai

Pavyzdys 1 (dvi aukštinės)

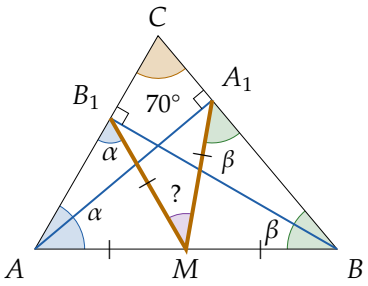
Smailiojo trikampio ABC aukštinės AA_1 ir BB_1, M – kraštinės AB vidurys, $\angle C = 70°$. Įrodykite, kad $MA_1 = MB_1$, ir raskite $\angle A_1MB_1$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. du statieji trikampiai AA_1B ir AB_1B su bendra įžambine AB ir jos vidurys M.

Idėja (T11). sujungiame M su A_1 ir B_1. Pažymėkime $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.



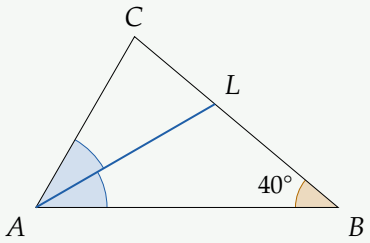
Sprendimas.

1. $MA_1 = MB_1 = MA = MB = \frac{1}{2}AB$ (pusiaukraštinė į įžambinę).
2. $\angle AB_1M = \alpha$, $\angle BA_1M = \beta$ (kampai prie pagrindo), todėl $\angle AMB_1 = 180° - 2\alpha$, $\angle BMA_1 = 180° - 2\beta$ (trikampio kampų suma).
3. $(180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) = 360° - 2 \cdot 110° = 140°$ ($\alpha + \beta = 110°$ – trikampio kampų suma), todėl $\angle A_1MB_1 = 180° - 140° = 40°$.

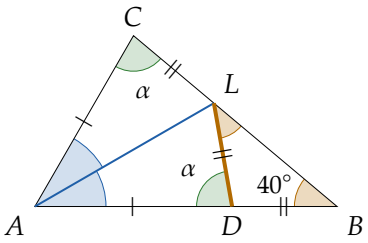
Pamoka. dvi aukštinės – du statieji trikampiai su bendra įžambine; jos vidurys duoda keturias lygias atkarpas.

Pavyzdys 2 (atspindys per pusiaukampinę)

Trikampio ABC pusiaukampinė AL, $AB = AC + CL$, $\angle B = 40°$. Raskite $\angle C$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Ką matau. pusiaukampinė AL; atkarpos AC ir CL – vienoje kampo A pusėje, AB – kitoje.

Idėja (T10). kraštinėje AB atidedame $AD = AC$; tada $DB = AB - AC = CL$. Pažymėkime $\angle C = \alpha$.

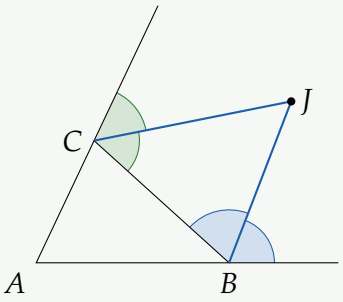
Sprendimas.

1. $\triangle ADL = \triangle ACL$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AD = AC$, AL bendra, $\angle DAL = \angle CAL$), todėl $DL = CL = DB$ ir $\angle ADL = \alpha$.
2. $\angle DLB = \angle B = 40°$ (kampai prie pagrindo, $DL = DB$).
3. $\alpha = 40° + 40° = 80°$ (trikampio DLB priekampis).

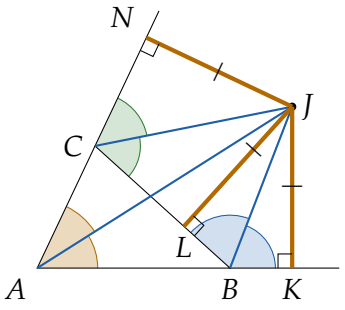
Pamoka. pusiaukampinė – „atspindėk“ vieną kraštinę į kitą; lygūs trikampiai perkelia ir atkarpą, ir kampą.

Pavyzdys 3 (trys pusiaukampinės)

Trikampio ABC priekampių prie B ir C pusiaukampinės kertasi taške J. Įrodykite, kad AJ – kampo BAC pusiaukampinė.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Ką matau. trys pusiaukampinės ir taškas J, esantis dviejose iš jų.

Idėja (T12). taškas pusiaukampinėje – nuleidžiame statmenis JK, JL, JN į tieses AB, BC, CA.

Sprendimas.

1. $JK = JL$ ir $JL = JN$ (pusiaukampinė: J – priekampių prie B ir C pusiaukampinėse). Todėl $JK = JN$.
2. J – kampo BAC viduje, todėl AJ – kampo BAC pusiaukampinė (pusiaukampinė, atvirkščiai).

Pamoka. atstumai matuojami iki **tiesių** (pagrindai K, N – kraštinių tęsiniuose); atvirkštiniam teiginiui būtina „kampo viduje“.

7. Pratimai

Pratimai 2. Atsakykite.

a) Kuriuo požymiu lygūs statieji trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90°$), jei: (1) $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$; (2) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$; (3) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$; (4) $AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$?

b) Raskite klaidą: „Stačiųjų trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ smailieji kampai atitinkamai lygūs, todėl trikampiai lygūs.“

c) Stačiojo trikampio smailusis kampas 30°, įžambinė 14. Raskite statinį prieš 30° kampą.

d) Stačiojo trikampio įžambinė 9. Raskite pusiaukraštinę, nubrėžtą į įžambinę.

e) Trikampio ABC pusiaukraštinė $CM = 5$, $AB = 10$, $\angle A = 35°$. Raskite $\angle B$.

f) Lygiašonio trikampio kampas prieš pagrindą 120°, šoninė kraštinė 8. Raskite aukštinę, nubrėžtą į pagrindą.

g) Trikampio ABC kraštinės AC vidurio statmuo kerta kraštinę BC jos vidiniame taške D, $\angle C = 35°$. Raskite $\angle ADB$.

h) Taškas P yra kampo AOB ($\angle AOB = 80°$) viduje ir vienodai nutolęs nuo jo kraštinių. Raskite $\angle AOP$.

i) Trikampio ABC pusiaukampinės AA_1 ir BB_1 kertasi taške I, $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. Raskite $\angle ICA$.

j) Smailiojo trikampio ABC aukštinės AA_1 ir BB_1 kertasi taške H, $\angle B = 65°$. Raskite $\angle BCH$.

Pratimai 3. Įrodykite (įrankių teiginiai, kurių neįrodėme; sprendimai – lapo gale).

a) Statieji trikampiai lygūs, jei lygūs du statiniai arba statinis ir smailusis kampas (prie jo ar prieš jį).
Užuomina: kampų suma – ir žinomi lygumo požymiai.

b) Statieji trikampiai lygūs, jei lygūs įžambinė ir smailusis kampas.
Užuomina: raskite kitą smailųjį kampą.

c) Jei trikampio ABC pusiaukraštinė CM lygi pusei AB, tai $\angle C = 90°$.
Užuomina: kaip įrodyme: pratęskite CM dvigubai ir gaukite lygiagretainį su lygiomis įstrižainėmis.

d) Jei stačiojo trikampio ($\angle C = 90°$) statinis BC lygus pusei įžambinės AB, tai $\angle A = 30°$.
Užuomina: nubrėžkite pusiaukraštinę CM.

e) Atkarpos AB vidurio statmens taškas P vienodai nutolęs nuo A ir B.
Užuomina: du statieji trikampiai.

f) Kampo pusiaukampinės taškas P vienodai nutolęs nuo kampo kraštinių tiesių.
Užuomina: įžambinė ir smailusis kampas.

g) Trikampio vidurio statmenys kertasi viename taške, vienodai nutolusiame nuo viršūnių.
Užuomina: du vidurio statmenys kertasi taške O; toliau – kaip su pusiaukampinėmis.

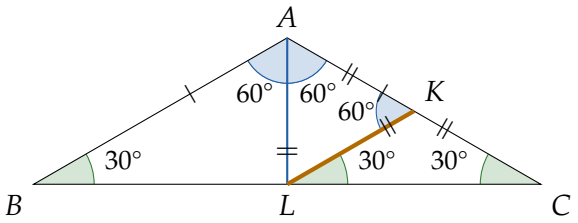
8. Grįžtame

Kai kuriuos ankstesnių lapų uždavinius šio lapo įrankiai išsprendžia trumpiau: lygius trikampius ir papildomas atkarpas, kurių tada ieškojome, dabar pakeičia vienas stačiojo trikampio ar vidurio statmens faktas. Palyginkite sprendimus; paskui išspręskite patys.

Grįžtame *2 lapo 10 uždavinys*

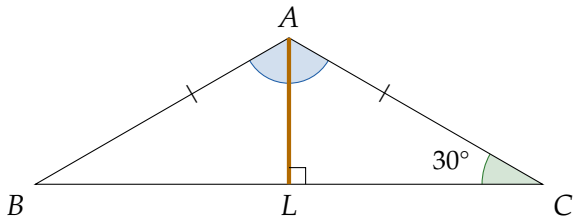
Trikampyje ABC $AB = AC$, $\angle A = 120°$, AL – pusiaukampinė. Įrodykite, kad $AL = \frac{1}{2}AC$.

Anksčiau (2 lapas, T5).



1. Kraštinėje AC atidedame $AK = AL$; $\angle B = \angle C = 30°$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma), $\angle LAC = 60°$ (pusiaukampinė).
2. Trikampis AKL lygiakraštis ($AK = AL$, $\angle KAL = 60°$; lygiakraštis trikampis): $KL = AL$, $\angle AKL = 60°$.
3. $\angle KLC = 60° - 30° = 30° = \angle C$ (trikampio KLC priekampis), todėl $KC = KL$ (lygiašonio trikampio požymis); $AC = AK + KC = 2AL$.

Dabar (statinis prieš 30° kampą).



1. $AL \perp BC$ (lygiašonio pusiaukampinė), $\angle C = 30°$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma).
2. Stačiajame trikampyje ALC statinis AL yra prieš 30° kampą, todėl $AL = \frac{1}{2}AC$ (statinis prieš 30° kampą).

Pamoka. lygiakraštį trikampį 2 lape „statėme“ patys; dabar jis paslėptas įrankyje „statinis prieš 30° kampą“ (jo įrodyme – tas pats lygiakraštis trikampis). Tai tas pat, kas Pratimuose 2 f, tik be skaičių.

Pratimai 4. Išspręskite patys naujais įrankiais (nurodytas lapas ir uždavinio numeris; sprendimai – lapo gale).

a) *(2m lapas, 14 uždavinys.)* Trikampyje ABC $AB = AC$. Taškai D ir E yra atitinkamai kraštinių AB ir AC vidiniai taškai, $BD = CE$. Atkarpos BE ir CD kertasi taške P. Įrodykite, kad tiesės AP ir BC statmenos.
Užuomina: 1) kaip ir anksčiau, įrodykite, kad $PB = PC$. 2) Kurioje tiesėje yra taškai, vienodai nutolę nuo B ir C?

b) *(2c lapas, 14 uždavinys.)* Trikampio ABC pusiaukraštinės BB_1 ir CC_1 kertasi taške G, ir $AG = BC$. Įrodykite, kad $BB_1 \perp CC_1$.
Užuomina: 1) A_1 – kraštinės BC vidurys. Kokio ilgio GA_1? 2) GA_1 – trikampio BGC pusiaukraštinė.

Uždaviniai

Jei brėžinio nėra, nusibraižykite patys.

I. Įgūdžiai

1. Trikampyje ABC $\angle C = 90°$, CM – pusiaukraštinė ($M \in AB$), $\angle CMB = 64°$. Raskite $\angle A$.

2. Trikampyje ABC $\angle C = 90°$, $AB = 26\,\text{cm}$, $BC = 13\,\text{cm}$. Raskite trikampio smailiuosius kampus.

3. Trikampyje ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AB = 18\,\text{cm}$, CD – aukštinė. Raskite BD.

4. Smailiajame trikampyje ABC $\angle A = 50°$, o aukštinės BE ir CF ($E \in AC$, $F \in AB$) lygios. Raskite $\angle B$.

5. Trikampyje ABC $\angle B = 75°$, $\angle C = 40°$. Kraštinės AC vidurio statmuo kerta kraštinę BC taške D. Raskite $\angle BAD$ ir $\angle ADB$.

6. Trikampyje ABC $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. Trikampio viduje esantis taškas P vienodai nutolęs nuo tiesių AB, BC ir CA. Raskite $\angle APB$.

7. Smailiojo trikampio ABC aukštinės BD ir CE ($D \in AC$, $E \in AB$), M – kraštinės BC vidurys. Įrodykite, kad $MD = ME$.

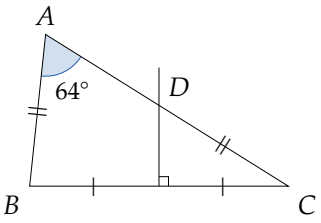
8. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = AD$ ir $CB = CD$. Įrodykite, kad $AC \perp BD$ ir tiesė AC dalija BD pusiau.

9. Taškas D ($D \neq A$) yra kampo BAC pusiaukampinėje, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ ($E \in AB$, $F \in AC$). Įrodykite, kad $AD \perp EF$.

II. Technikos

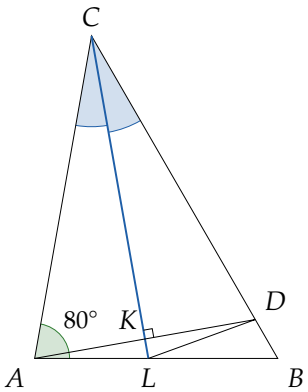
10.

Trikampio ABC kraštinės BC vidurio statmuo kerta kraštinę AC jos vidiniame taške D. $AB = CD$, $\angle BAC = 64°$. Raskite $\angle ACB$ ir $\angle ABC$.



11.

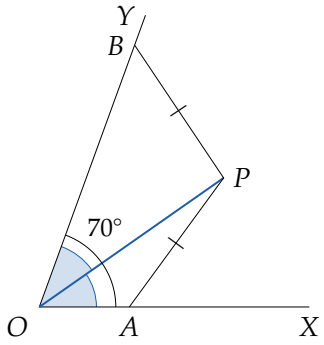
Trikampyje ABC $\angle A = 80°$, $\angle C = 40°$, CL – pusiaukampinė ($L \in AB$). Iš A nuleistas statmuo AK į tiesę CL; tiesė AK kerta kraštinę BC taške D. Raskite $\angle BLD$.



12. Stačiajame trikampyje ABC ($\angle ABC = 90°$) nubrėžta kampo BAC pusiaukampinė AD ($D \in BC$), $CD = 2(AC - AB)$. Raskite trikampio ABC smailiuosius kampus.

13.

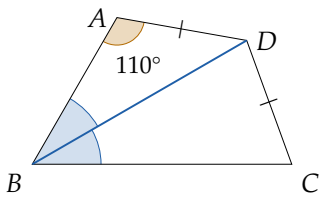
$\angle XOY = 70°$. Taškas P yra šio kampo pusiaukampinėje ($P \neq O$). Taškas A yra spindulyje OX, taškas B – spindulyje OY ($A \neq O$), $PA = PB$ ir $OA < OB$. Raskite $\angle APB$.



14. Trikampyje ABC $\angle A = 100°$, $\angle B = 45°$, $BC = 11$. Kraštinių AB ir AC vidurio statmenys kerta kraštinę BC taškuose D ir E. Raskite $\angle DAE$ ir trikampio ADE perimetrą.

15.

Iškilajame keturkampyje $ABCD$ įstrižainė BD yra kampo ABC pusiaukampinė, $AD = CD$, $\angle BAD = 110°$, o kampai ABC ir BCD smailieji. Raskite $\angle BCD$.



16. Trikampio ABC kraštinės AB vidurio statmuo kerta AB taške D, o kraštinę BC – jos vidurio taške M. Be to, $BM = 2MD$. Raskite trikampio ABC kampus.

17. Trikampyje ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 15°$, CH – aukštinė ($H \in AB$). Įrodykite, kad $CH = \frac{1}{4}AB$.

18. Smailiojo trikampio ABC aukštinės AD ir BE ($D \in BC$, $E \in AC$) kertasi taške H; M – atkarpos CH vidurys, N – kraštinės AB vidurys. Įrodykite, kad $MN \perp DE$.

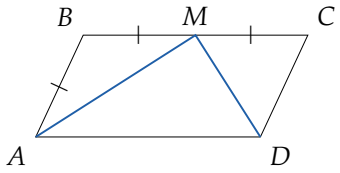
19. Trikampyje ABC $\angle C = 90°$.

a) Kampo ACB viduje nubrėžtas spindulys, sudarantis su CA kampą, lygų $\angle A$; jis kerta įžambinę AB taške P. Įrodykite, kad P – įžambinės vidurys ir $CP = \frac{1}{2}AB$ (tai kitas pusiaukraštinės į įžambinę savybės įrodymas).

b) Raskite kampą tarp pusiaukraštinės CM ir aukštinės CH, jei $\angle A = 35°$.

20.

Lygiagretainio $ABCD$ kraštinė BC dvigubai ilgesnė už kraštinę AB, M – kraštinės BC vidurys. Įrodykite, kad $\angle AMD = 90°$.



III. Sunkesni

21. Trikampyje ABC $\angle C = 90°$, $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$. I – pusiaukampinių susikirtimo taškas; ID, IE, IF – statmenys kraštinėms BC, CA, AB (pagrindai D, E, F – kraštinėse). Raskite atstumą nuo I iki kraštinių.

22. Smailiajame trikampyje ABC $\angle B = 75°$, $\angle C = 40°$, O – kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas (jis yra trikampio viduje), AH – aukštinė ($H \in BC$).

a) Įrodykite, kad $\angle BAH = \angle CAO$.

b) Raskite $\angle HAO$.

23. Smailiojo trikampio ABC aukštinės AD ir CF ($D \in BC$, $F \in AB$) kertasi taške H, ir $BH = AC$.

a) Įrodykite, kad $BH \perp AC$, ir raskite $\angle ABC$.

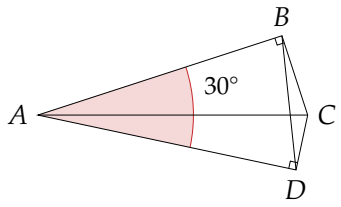
b) M ir N – atkarpų BH ir AC viduriai. Įrodykite, kad $DM = DN$ ir $DM \perp DN$.

24.

Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle BAD = 30°$.

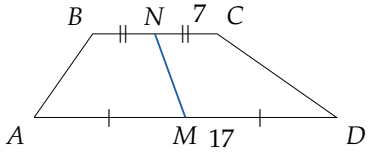
a) Įrodykite, kad įstrižainės BD vidurio statmuo eina per įstrižainės AC vidurį.

b) Įrodykite, kad $AC = 2BD$.



25.

Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 17$ ir $BC = 7$, o kampų prie didesniojo pagrindo suma $\angle A + \angle D = 90°$. M ir N – pagrindų AD ir BC viduriai. Raskite MN.



Papildomi uždaviniai (norintiems)

26. Trikampyje ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Įžambinės AB vidurio statmuo kerta AB taške M, o statinį AC – taške D. Įrodykite, kad $AD = 2DC$.

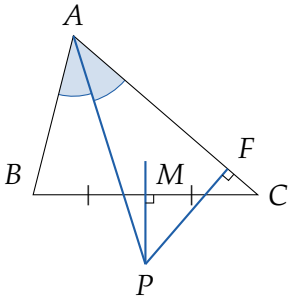
27. Trikampyje ABC $\angle C = 30°$, AD – pusiaukraštinė ($D \in BC$), $\angle ADB = 45°$. Raskite $\angle BAD$.

28.

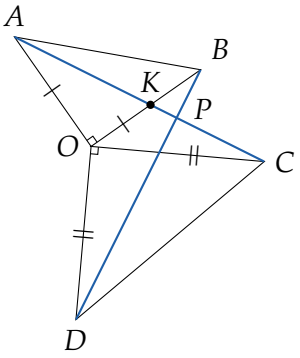
Trikampyje ABC $AB < AC$; kampo BAC pusiaukampinė ir kraštinės BC vidurio statmuo kertasi taške P. Iš P nuleistas statmuo PF į tiesę AC, ir F – atkarpos AC vidinis taškas.

a) Įrodykite, kad $AF = \frac{1}{2}(AB + AC)$ ir $CF = \frac{1}{2}(AC - AB)$.

b) Raskite $\angle ABP + \angle ACP$.



29.

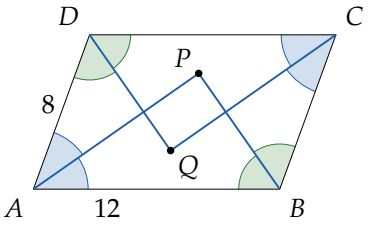


Statieji lygiašoniai trikampiai OAB ir OCD turi bendrą stačiojo kampo viršūnę O ($\angle AOB = \angle COD = 90°$, $OA = OB$, $OC = OD$, $OA \neq OC$); spinduliai OA, OB, OC, OD eina šia tvarka pagal laikrodžio rodyklę, ir $\angle BOC < 90°$. Atkarpos AC ir BD kertasi jų vidiniame taške P, atkarpos AP ir OB – jų vidiniame taške K, o taškas O yra kampo APD viduje.

a) Įrodykite, kad $AC = BD$ ir $AC \perp BD$.

b) Įrodykite, kad PO – kampo APD pusiaukampinė, ir raskite $\angle APO$.

30.

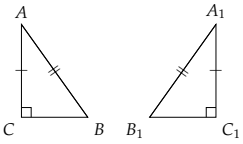


Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės $AB = 12$, $AD = 8$. Kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške P, kampų C ir D pusiaukampinės – taške Q. Raskite PQ.

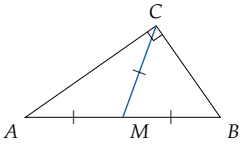
Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

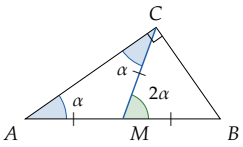
Įrankis 18 *(stačiųjų trikampių lygumas)* statieji lygūs: du statiniai; statinis ir atitinkamas smailusis kampas; įžambinė ir smailusis kampas; įžambinė ir statinis



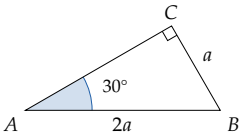
Įrankis 19 *(pusiaukraštinė į įžambinę)* $\angle C = 90^\circ \Leftrightarrow CM = \frac{1}{2}AB$ (pusiaukraštinė į įžambinę)



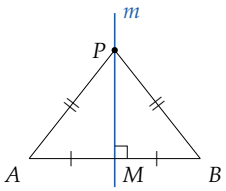
Išvada *(pusiaukraštinė į įžambinę padvigubina kampą)* $CM = AM$, todėl $\angle ACM = \angle A$ ir $\angle CMB = 2\angle A$



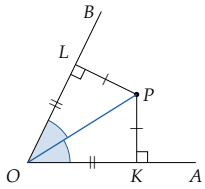
Įrankis 20 *(statinis prieš 30° kampą)* $\angle C = 90^\circ$: $\angle A = 30^\circ \Leftrightarrow BC = \frac{1}{2}AB$



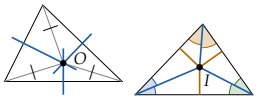
Įrankis 21 *(vidurio statmuo)* $PA = PB \Leftrightarrow P$ – atkarpos AB vidurio statmenyje



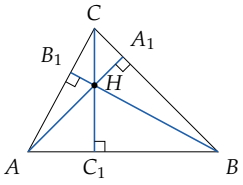
Įrankis 22 *(pusiaukampinė)* P kampo viduje: $PK = PL$ (atstumai iki kraštinių) $\Leftrightarrow P$ – pusiaukampinėje; tada ir $OK = OL$



Įrankis 23 *(susikirtimo taškai)* vidurio statmenys kertasi taške O, $OA = OB = OC$; pusiaukampinės kertasi taške I, vienodai nutolusiame nuo kraštinių



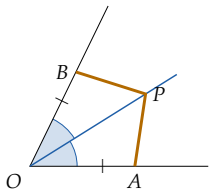
Įrankis 24 *(aukštinių susikirtimas)* aukštinių tiesės kertasi viename taške



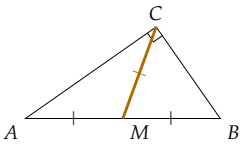
Technikų santrauka

Signalas → veiksmas. Šios technikos padeda rasti sprendimą.

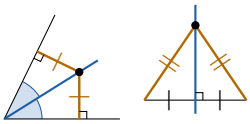
T10 *(Atspindys per pusiaukampinę)* pusiaukampinė → kitoje kraštinėje atidėk $OB = OA$ („atspindys“).



T11 *(Statusis + vidurys)* statusis kampas ir įžambinės vidurys (bendra įžambinė) → sujunk vidurį su stačiojo kampo viršūne.



T12 *(Taškas pusiaukampinėje arba vidurio statmenyje)* taškas pusiaukampinėje → statmenys į kraštines; vidurio statmenyje → sujunk su galais.



Pratimų atsakymai

Pratimai 2. a) (1) du statiniai, (2) įžambinė ir smailusis kampas, (3) įžambinė ir statinis, (4) statinis ir smailusis kampas; b) vien kampai – ne požymis: trikampiai gali būti skirtingo dydžio; c) 7; d) 4,5; e) 55°; f) 4; g) 70°; h) 40°; i) 30°; j) 25°;

Uždavinių atsakymai

1. 32°.
2. $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$.
3. 4,5 cm.
4. 65°.
5. $\angle BAD = 25°$, $\angle ADB = 80°$.
6. 120°.
7. Įrodymas.
8. Įrodymas.
9. Įrodymas.
10. $\angle ACB = 32°$, $\angle ABC = 84°$.
11. 20°.
12. $\angle BAC = 30°$, $\angle ACB = 60°$.
13. 110°.
14. $\angle DAE = 20°$, perimetras 11.
15. 70°.
16. $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$.
17. Įrodymas – lapo gale.
18. Įrodymas – lapo gale.
19. a) įrodymas – lapo gale; b) 20°.
20. Įrodymas – lapo gale.
21. 2.

22. a) įrodymas – lapo gale; b) 35°.

23. a) $\angle ABC = 45°$, įrodymas – lapo gale; b) įrodymas – lapo gale.

24. Įrodymas – lapo gale.

25. 5.

26. Įrodymas – lapo gale.

27. 30°.

28. a) įrodymas – lapo gale; b) 180°.

29. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle APO = 45°$, įrodymas – lapo gale.

30. 4.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) Pusiaukraštinė nubrėžta į stačiojo trikampio įžambinę. 2) Įrodykite, kad trikampis AMC lygiašonis; $\angle CMB$ – jo priekampis.

2. 1) Duoti statinis BC ir įžambinė AB, kampų nėra. 2) Statinis lygus pusei įžambinės – taikykite atvirkštinį teiginį apie 30° kampą.

3. 1) Du statieji trikampiai ABC ir CDB; ar jie turi 30° kampą? 2) Raskite BC, tada $\angle BCD$ ir tą patį faktą pritaikykite trikampiui CDB.

4. 1) Trikampiai BFC ir CEB statieji, jų įžambinė BC bendra. 2) Įrodykite, kad jie lygūs, ir palyginkite kampus prie B ir C.

5. 1) Taškas D yra atkarpos AC vidurio statmenyje. 2) Sujunkite D su A ir ieškokite lygiašonio trikampio.

6. 1) Taškas kampo viduje vienodai nutolęs nuo jo kraštinių. 2) Įrodykite, kad AP ir BP – pusiaukampinės, ir raskite $\angle PAB$ bei $\angle PBA$.

7. 1) Trikampiai BDC ir BEC statieji, BC – jų bendra įžambinė, M – jos vidurys. 2) Sujunkite M su D ir su E.

8. 1) Taškai A ir C vienodai nutolę nuo B ir D. 2) Kurioje tiesėje yra kiekvienas iš jų? Per du taškus eina tik viena tiesė.

9. 1) Taškas pusiaukampinėje; reikia statmenumo (kas dar duoda statmenumą?). 2) Raskite du taškus, vienodai nutolusius nuo E ir F.

10. 1) Taškas D yra atkarpos BC vidurio statmenyje, o lygios atkarpos AB ir CD neturi bendro galo. 2) Sujunkite D su B: gausite du lygiašonius trikampius.

11. 1) Statmuo į pusiaukampinę CL: trikampyje ACD atkarpa CK ir pusiaukampinė, ir aukštinė. 2) Įrodykite, kad $CA = CD$, ir palyginkite trikampius ACL ir DCL.

12. 1) Kampo A pusiaukampinė ir kraštinių AC ir AB skirtumas. 2) Ant įžambinės AC atidėkite tašką E, kad $AE = AB$, ir sujunkite D su E.

13. 1) Taškas pusiaukampinėje ir dvi lygios atkarpos iki kraštinių, bet trikampiai OAP ir OBP nelygūs ($OA \neq OB$). 2) Spindulyje OY atidėkite tašką A', kad $OA' = OA$, ir sujunkite jį su P.

14. 1) Taškai D ir E yra vidurio statmenyse. 2) Sujunkite D ir E su A: gausite du lygiašonius trikampius.

15. 1) Taškas D yra kampo ABC pusiaukampinėje, o lygios atkarpos AD ir CD – skirtingose kampo pusėse. 2) Nuleiskite statmenis DE ir DF į tieses AB ir BC ir palyginkite trikampius DEA ir DFC.

16. 1) D ir M – dviejų kraštinių viduriai; trikampis BDM statusis, ir jo statinis MD lygus pusei

įžambinės. 2) Atkarpa DM – vidurio linija: kam ji lygiagreti? Tiesė, statmena vienai iš lygiagrečių, statmena ir kitai.

17. 1) $15°$ – pusė $30°$, o statinis prieš $30°$ kampą lygus pusei įžambinės. 2) Nubrėžkite pusiaukraštinę CM į įžambinę AB ir raskite $\angle CMA$.

18. 1) Raskite du statiuosius trikampius su įžambine CH ir du – su įžambine AB. 2) Sujunkite M ir N su D ir E; kurie taškai vienodai nutolę nuo D ir E?

19. 1) Lygūs kampai $\angle ACP = \angle A$ yra prie vienos trikampio APC kraštinės. 2) Gausite $PA = PC$; raskite $\angle PCB$ ir palyginkite su $\angle B$. b) dalyje raskite $\angle ACM$ ir $\angle ACH$.

20. 1) Reikia stačiojo kampo, o lygių atkarpų daug: $AB = BM = MC$. Kada pusiaukraštinė duoda statųjį kampą? 2) Pažymėkite kraštinės AD vidurį N ir sujunkite jį su M: koks keturkampis $ABMN$?

21. 1) I vienodai nutolęs nuo visų kraštinių; iš kiekvienos viršūnės eina dvi atkarpos iki statmenų pagrindų. 2) Pažymėkite atstumą r. Įrodykite, kad $CD = CE = r$ (kampas ICD lygus $45°$), ir išreikškite AF, BF per r.

22. 1) O vienodai nutolęs nuo visų trijų viršūnių. 2) Sujunkite O su A, B, C; trijų lygiašonių trikampių kampus prie pagrindų pažymėkite α, β, θ ir raskite $\alpha + \beta + \theta$.

23. 1) H – dviejų aukštinių susikirtimo taškas; BH ir AC – stačiųjų trikampių BHD ir ACD įžambinės. 2) Tiesė BH kerta AC taške E; įrodykite, kad $\triangle BHD = \triangle ACD$. b) dalyje nubrėžkite pusiaukraštines DM ir DN.

24. 1) Statieji trikampiai ABC ir ADC turi bendrą įžambinę AC. 2) Sujunkite AC vidurį M su B ir D; b) dalyje raskite $\angle BMD$ per priekampius.

25. 1) Kampai A ir D toli vienas nuo kito – perkelkite šonines kraštines lygiagrečiai prie taško N (T9). 2) Per N nubrėžkite $NE \parallel AB$ ir $NF \parallel CD$ (E, F – pagrinde AD). Koks trikampis ENF ir kur yra M?

26. 1) Taškas D yra vidurio statmenyje. 2) Sujunkite D su B ir raskite $\angle DBC$.

27. 1) Kampas $30°$ prie C, bet nėra stačiojo trikampio su šiuo kampu. 2) Nuleiskite statmenį BH į tiesę AC: $BH = \frac{1}{2}BC = BD$; sujunkite H su D ir ieškokite lygiakraščio ir lygiašonių trikampių.

28. 1) Taškas P yra ir pusiaukampinėje, ir vidurio statmenyje. 2) Nuleiskite statmenį PE į tiesę AB, sujunkite P su B ir C; palyginkite trikampius PEA ir PFA, PEB ir PFC.

29. 1) Trikampiai OAC ir OBD turi po dvi lygias kraštines prie viršūnės O; b) dalyje O yra kampo APD viduje. 2) Įrodykite, kad $\triangle OAC = \triangle OBD$; kampą APB raskite iš trikampių OAK ir PBK. b) dalyje nuleiskite statmenis $OH_1 \perp AC$ ir $OH_2 \perp BD$.

30. 1) Raskite $\angle APB$; M – kraštinės AB vidurys: kam lygi MP? 2) Įrodykite, kad $MP \parallel AD$; tą patį padarykite su kraštinės CD viduriu N ir tašku Q. Kurioje tiesėje yra P ir Q?

Pratimų ir sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

Pratimai 1 a)

Taip. Nubrėžkime aukštinę BH (H – tiesėje AC; kampas A smailusis, todėl $\angle BAH = 30°$).

1. Stačiajame trikampyje ABH $\angle BAH = 30°$, todėl $BH = \frac{1}{2}AB = BC$ (statinis prieš 30° kampą).
2. Tarkime, kad $H \neq C$. Tada trikampis BHC lygiašonis ($BH = BC$), todėl $\angle BCH = \angle BHC = 90°$ (kampai prie pagrindo): trikampyje būtų du statūs kampai, o to negali būti (trikampio kampų suma).
3. Taigi $H = C$, t. y. $BC \perp AC$ ir $\angle C = 90°$.

Atvirkštinių teiginių gali būti ne vienas: įrankyje sukeitėme vietomis $\angle A = 30°$ ir $BC = \frac{1}{2}AB$, čia – $\angle C = 90°$ ir $BC = \frac{1}{2}AB$.

Pratimai 1 b)

Taip. Pakanka įrodyti, kad $AB = AC$: tą patį samprotavimą pritaikę viršūnei B, gauname $BA = BC$.

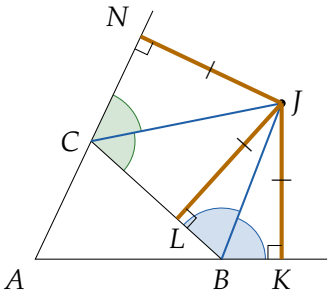
Atvejis $H = G$. Tiesė AG eina per kraštinės BC vidurį A_1 (pusiaukraštinė) ir yra statmena BC (aukštinės tiesė, nes $G = H$). Taigi AA_1 – atkarpos BC vidurio statmuo, todėl $AB = AC$ (vidurio statmuo).

Atvejis $O = I$. Taškas I sutampa su O, todėl $IB = IC$ ir $\angle IBC = \angle ICB$ (kampai prie pagrindo). Kadangi BI ir CI – pusiaukampinės, tai $\angle B = 2\angle IBC = 2\angle ICB = \angle C$ ir $AB = AC$ (lygiašonio trikampio požymis).

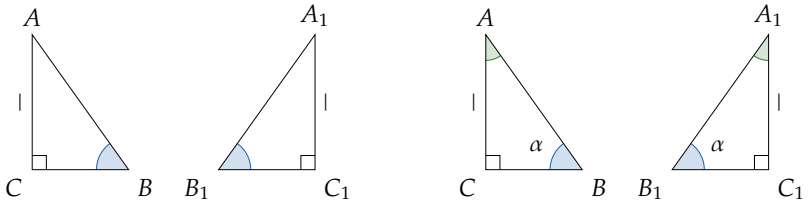
Lygiašoniame, bet ne lygiakraščiame trikampyje visi keturi taškai yra vienoje tiesėje (pagrindo vidurio statmenyje), bet nesutampa.

Pratimai 1 c)

Ne. Kontrpavyzdys – 3 pavyzdžio taškas J (priekampių prie B ir C pusiaukampinių susikirtimo taškas): jis vienodai nutolęs nuo tiesių AB, BC ir CA ($JK = JL = JN$), bet yra už trikampio, todėl $J \neq I$. Teisinga, jei taškas yra trikampio viduje: tada jis yra kiekvieno trikampio kampo viduje, todėl ir visose trijose pusiaukampinėse (pusiaukampinė, atvirkščiai).



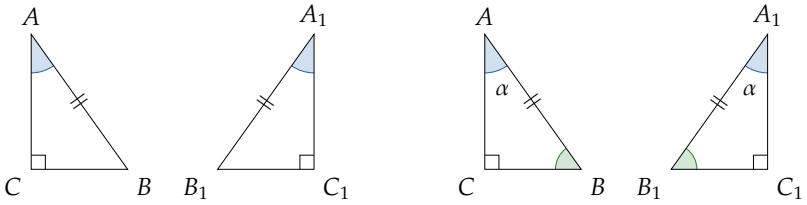
Pratimai 3 a)



sąlyga *sprendimas*

1. Du statiniai: lygūs (dvi kraštinės ir kampas tarp jų – status kampas).
2. Statinis AC ir kampas prie jo $\angle A$: lygūs (kraštinė ir du kampai prie jos: $\angle A$ ir $\angle C = 90°$).
3. Statinis AC ir kampas prieš jį. Pažymėkime $\angle B = \angle B_1 = \alpha$. Tada $\angle A = \angle A_1 = 90° - \alpha$ (trikampio kampų suma) – toliau kaip 2.

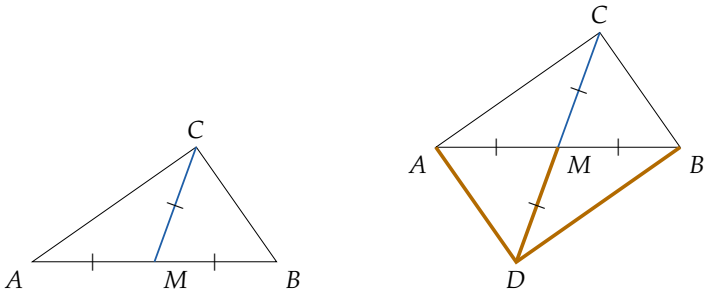
Pratimai 3 b)



sąlyga *sprendimas*

1. Pažymėkime $\angle A = \angle A_1 = \alpha$. Tada $\angle B = \angle B_1 = 90° - \alpha$ (trikampio kampų suma).
2. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (kraštinė ir du kampai prie jos: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$).

Pratimai 3 c)

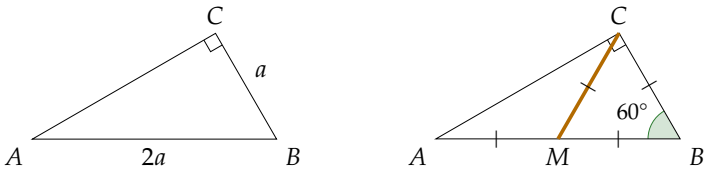


sąlyga *sprendimas*

1. Pratęsiame CM už M iki D: $MD = CM$. Keturkampio $ACBD$ įstrižainės dalija viena kitą pusiau, todėl jis lygiagretainis (lygiagretainio požymis).
2. $CD = 2CM = AB$: lygiagretainio įstrižainės lygios, todėl $ACBD$ – stačiakampis (stačiakampio požymis) ir $\angle C = 90°$.

Kitas būdas. $\angle ACM = \angle A$, $\angle BCM = \angle B$ (kampai prie pagrindo: $MA = MC$, $MB = MC$), todėl $2\angle C = \angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (trikampio kampų suma) ir $\angle C = 90°$.

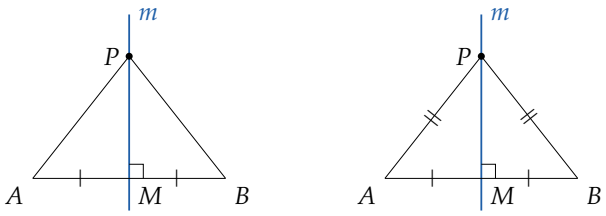
Pratimai 3 d)



sąlyga *sprendimas*

1. $BM = \frac{1}{2}AB = BC$, $CM = \frac{1}{2}AB$ (pusiaukraštinė į įžambinę).
2. $\triangle BCM$ lygiakraštis (trys lygios kraštinės), todėl $\angle B = 60°$ (lygiakraštis trikampis).
3. $\angle A = 90° - 60° = 30°$ (trikampio kampų suma).

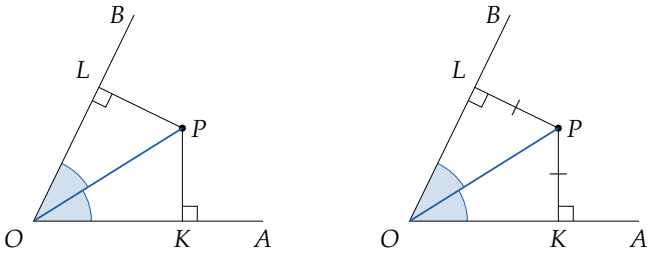
Pratimai 3 e)



sąlyga *sprendimas*

1. $\triangle PMA = \triangle PMB$ (du statiniai: $MA = MB$, PM bendras), todėl $PA = PB$.

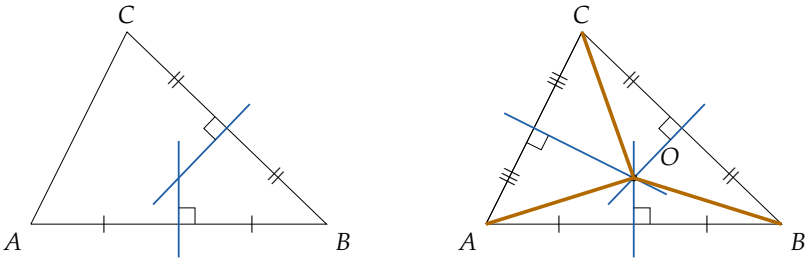
Pratimai 3 f)



sąlyga *sprendimas*

1. $\triangle OKP = \triangle OLP$ (įžambinė ir smailusis kampas: OP bendra, $\angle KOP = \angle LOP$), todėl $PK = PL$.

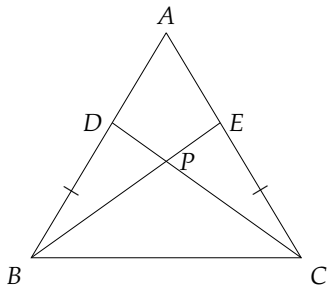
Pratimai 3 g)



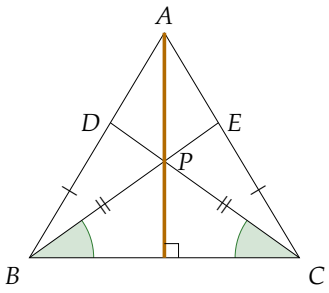
sąlyga *sprendimas*

1. Atkarpų AB ir BC vidurio statmenys m_1 ir m_2 kertasi taške O.
2. $OA = OB$ ($O \in m_1$), $OB = OC$ ($O \in m_2$) (vidurio statmuo), todėl $OA = OC$.
3. O – atkarpos CA vidurio statmenyje (vidurio statmuo, atvirkščiai).

Pratimai 4 a)



sąlyga

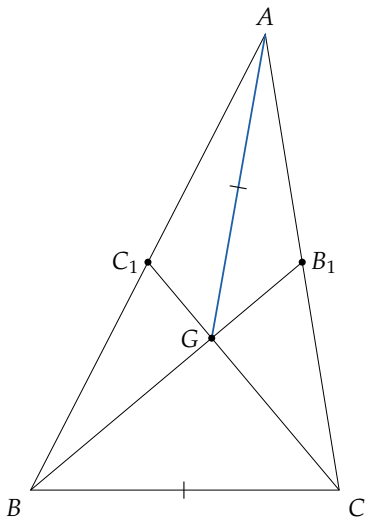


sprendimas

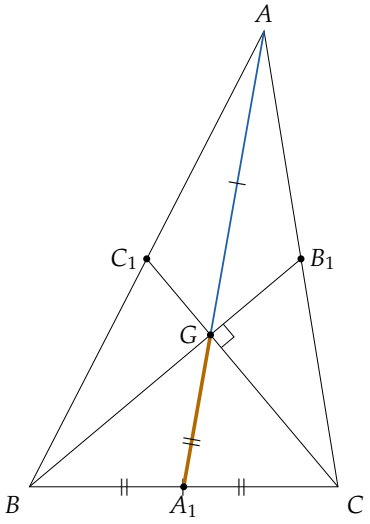
1. Kadangi $\angle DBC = \angle ECB$ (kampai prie pagrindo), tai $\triangle BCD = \triangle CBE$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: BC bendra, $BD = CE$). Taigi $\angle PCB = \angle PBC$ ir $PB = PC$ (lygiašonio trikampio požymis).
2. Kadangi $AB = AC$ ir $PB = PC$, tai skirtingi taškai A ir P yra atkarpos BC vidurio statmenyje (vidurio statmuo). Tiesė AP ir yra tas vidurio statmuo, todėl $AP \perp BC$.

2m lape po $PB = PC$ dar reikėjo lygių trikampių ABP ir ACP (trys kraštinės) ir lygiašonio pusiaukampinės; dabar užtenka vidurio statmens.

Pratimai 4 b)



sąlyga

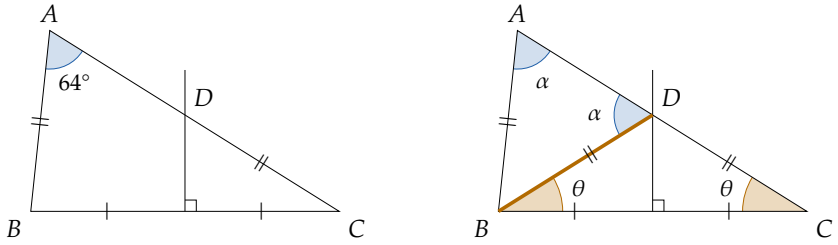


sprendimas

1. Pažymėkime kraštinės BC vidurį A_1. Pusiaukraštinė AA_1 eina per G ir $GA_1 = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}BC$ (pusiaukraštinių susikirtimas, 2 : 1).
2. Trikampio BGC pusiaukraštinė GA_1 lygi pusei kraštinės BC, todėl $\angle BGC = 90°$ (pusiaukraštinė į įžambinę, atvirkščiai), t. y. $BB_1 \perp CC_1$.

2c lape tą patį atvirkštinį teiginį įrodinėjome uždavinio viduje (du lygiašoniai trikampiai ir kampų suma); dabar tai jau įrankis.

10 uždavinys.



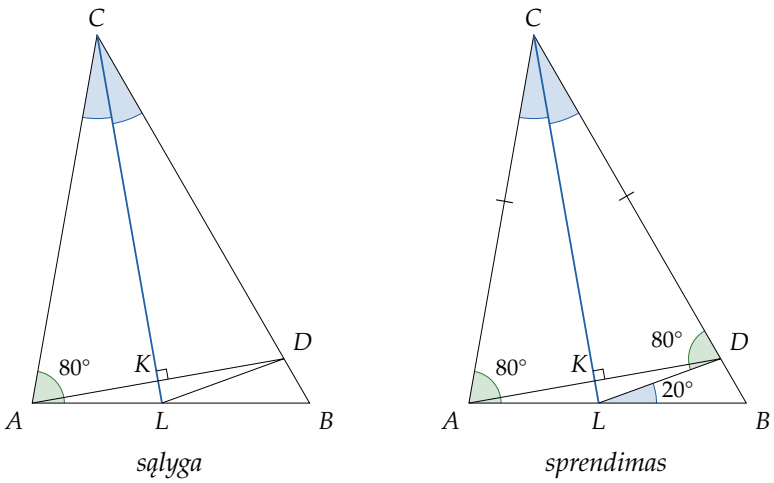
Ką matau. taškas D vidurio statmenyje ir lygios atkarpos be bendro galo.

Idėja (T12). sujungiame D su B: $DB = DC = AB$.

1. $DB = DC$ (vidurio statmuo), todėl $AB = DB$.
2. $\angle ADB = \angle BAD = 64°$ (kampai prie pagrindo, $BA = BD$); pažymėkime juos α.
3. $\angle DBC = \angle DCB$ (kampai prie pagrindo, $DB = DC$); pažymėkime juos θ. Tada $2\theta = \alpha$ (trikampio DBC priekampis), todėl $\angle ACB = \theta = 32°$.
4. $\angle ABC = 180° - 64° - 32° = 84°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. taškas vidurio statmenyje – sujunk jį su atkarpos galais: atsiras lygiašonis trikampis.

11 uždavinys.



Ką matau. pusiaukampinė CL ir statmuo į ją.

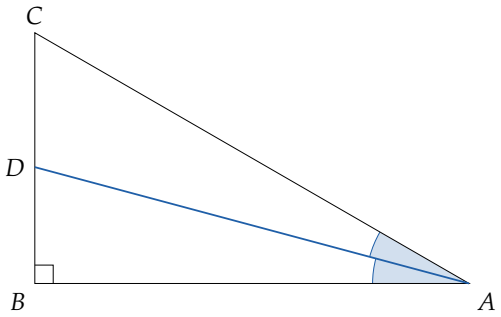
Idėja (T10). taškas D – „taško A atspindys“ per pusiaukampinę: $CD = CA$.

1. $\triangle ACK = \triangle DCK$ (statinis ir smailusis kampas: CK bendras, $\angle ACK = \angle DCK$), todėl $CA = CD$.
2. $\triangle ACL = \triangle DCL$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $CA = CD$, CL bendra, $\angle ACL = \angle DCL$), todėl $\angle CDL = \angle CAL = 80°$.
3. $\angle B = 180° - 80° - 40° = 60°$ (trikampio kampų suma), $\angle BLD = 80° - 60° = 20°$ (trikampio BLD priekampis CDL).

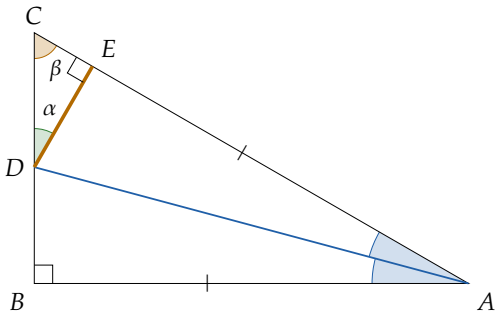
Kitas būdas. $\triangle ACK = \triangle DCK$, todėl ir $AK = KD$: CL – atkarpos AD vidurio statmuo ir $LA = LD$ (vidurio statmuo). $\angle CAK = 90° - 20° = 70°$ (trikampio ACK kampų suma), $\angle LAD = 80° - 70° = 10°$; $\angle LDA = 10°$ (kampai prie pagrindo), todėl $\angle BLD = 10° + 10° = 20°$ (trikampio ALD priekampis).

Pamoka. statmuo į pusiaukampinę „atspindi“ vieną kampo kraštinę į kitą.

12 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

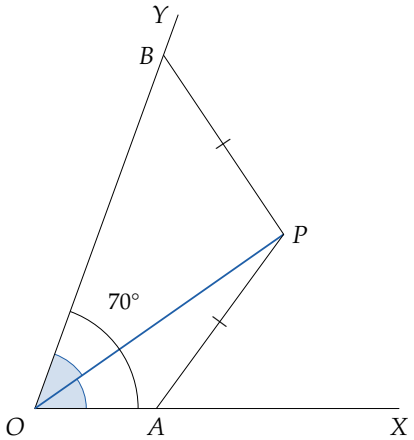
Ką matau. pusiaukampinė AD ir atkarpų skirtumas $AC - AB$.

Idėja (T10). ant AC atidedame $AE = AB$; tada $EC = AC - AB$.

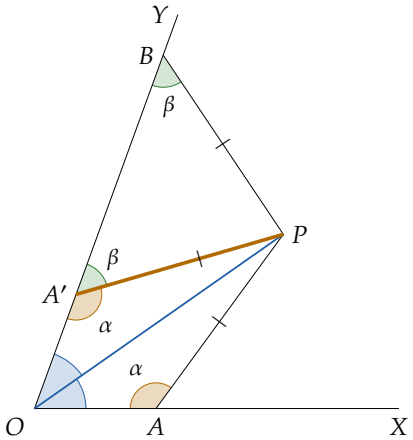
1. $\triangle ABD = \triangle AED$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = AE$, AD bendra, $\angle BAD = \angle EAD$), todėl $\angle AED = \angle ABD = 90°$ ir $\angle DEC = 90°$ (gretutiniai kampai).
2. $EC = AC - AB = \frac{1}{2}CD$, pažymėkime $\angle EDC = \alpha$; tada $\alpha = 30°$ (statinis prieš $30°$ kampą, atvirkščiai; trikampis DEC).
3. Pažymėkime $\angle ACB = \beta$; $\beta = 90° - 30° = 60°$, $\angle BAC = 90° - 60° = 30°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. atspindėjus per pusiaukampinę, kraštinių skirtumas virto atkarpa EC – statiniu.

13 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

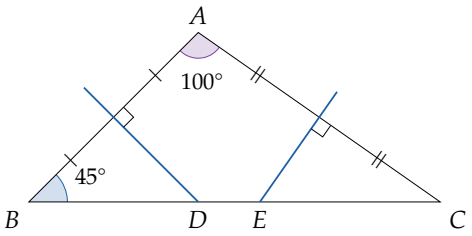
Ką matau. pusiaukampinė ir lygios atkarpos skirtingose kampo pusėse.

Idėja (T10). spindulyje OY atidedame $OA' = OA$.

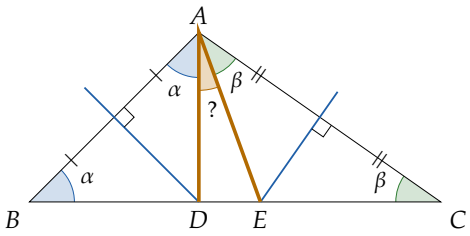
1. $\triangle OAP = \triangle OA'P$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $OA = OA'$, OP bendra, $\angle AOP = \angle A'OP$), todėl $PA' = PA$ ir $\angle OA'P = \angle OAP$; pažymėkime juos α.
2. $PA' = PA = PB$, todėl $\angle PA'B = \angle PBA'$ (kampai prie pagrindo); pažymėkime juos β. A' – tarp O ir B, nes $OA < OB$.
3. $\alpha + \beta = 180°$ (gretutiniai kampai prie A'), todėl $\angle APB = 360° - 70° - 180° = 110°$ (keturkampio $OAPB$ kampų suma).

Pamoka. lygios atkarpos $PA = PB$ dar nereiškia lygių trikampių; atspindys per pusiaukampinę sukuria lygiašonį trikampį $PA'B$.

14 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

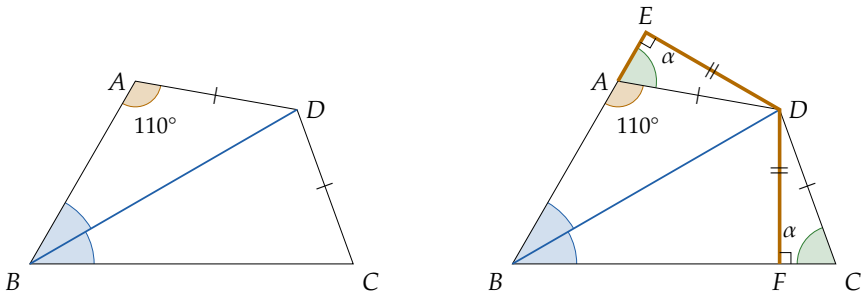
Ką matau. taškai D ir E – vidurio statmenyse.

Idėja (T12). sujungiame juos su atkarpų galais.

1. $DA = DB$ (vidurio statmuo), todėl $\angle DAB = \angle B$ (kampai prie pagrindo); pažymėkime $\angle B = \alpha = 45°$.
2. $\angle C = 180° - 100° - 45° = 35°$ (trikampio kampų suma); $EA = EC$ (vidurio statmuo), todėl $\angle EAC = \angle C$ (kampai prie pagrindo); pažymėkime $\angle EAC = \beta = 35°$.
3. $\angle DAE = 100° - 45° - 35° = 20°$.
4. $P_{ADE} = AD + DE + EA = BD + DE + EC = BC = 11$.

Pamoka. vidurio statmuo „perkelia“ atkarpą: AD virto BD, o AE – EC.

15 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

Ką matau. taškas D – pusiaukampinėje.

Idėja (T12). nuleidžiame statmenis DE ir DF į tieses AB ir BC.

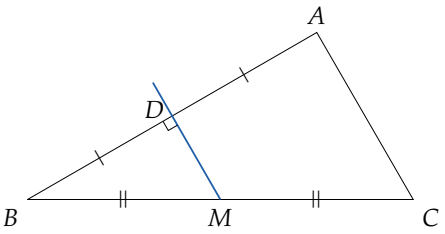
1. $DE = DF$ (pusiaukampinė).
2. E – ne atkarpoje AB (kitaip trikampyje DEA būtų status ir 110° kampai), o jos tęsinyje už A: pažymėkime $\angle DAE = \alpha$; $\alpha = 180° - 110° = 70°$ (gretutiniai kampai).
3. F – atkarpoje BC (kampas BCD smailusis), todėl $\angle DCF = \angle BCD$.
4. $\triangle DEA = \triangle DFC$ (įžambinė ir statinis: $DA = DC$, $DE = DF$), todėl $\angle BCD = \angle DAE = 70°$.

Kitas būdas (T10).

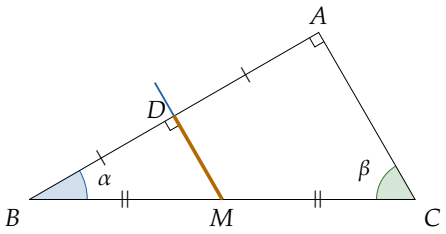
1. Spindulyje BC atidedame $BQ = BA$. $\triangle BAD = \triangle BQD$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $BA = BQ$, BD bendra, $\angle ABD = \angle QBD$), todėl $DQ = DA = DC$ ir $\angle BQD = 110°$.
2. $Q \neq C$ (kampas BCD smailusis). Jei C būtų tarp B ir Q, lygiašonio trikampio DQC kampas prie pagrindo būtų 110° – negali būti (trikampio kampų suma). Taigi Q tarp B ir C, $\angle DQC = 70°$ (gretutiniai kampai).
3. $\angle BCD = \angle DQC = 70°$ (kampai prie pagrindo).

Pamoka. atstumai matuojami iki tiesių: statmens pagrindas gali būti kraštinės tęsinyje, ir tada reikia gretutinio kampo.

16 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. du viduriai D ir M; statusis trikampis BDM, kurio statinis lygus pusei įžambinės.

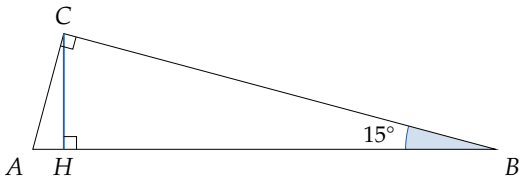
Idėja (T8). DM – trikampio ABC vidurio linija.

1. $DM \parallel AC$ (vidurio linija) ir $DM \perp AB$, todėl $AC \perp AB$ (atitinkamieji kampai): $\angle A = 90°$.
2. Stačiajame trikampyje BDM $MD = \frac{1}{2}BM$, todėl $\angle B = \alpha = 30°$ (statinis prieš $30°$ kampą, atvirkščiai).
3. Pažymėkime $\angle C = \beta$; $\beta = 90° - 30° = 60°$ (trikampio kampų suma).

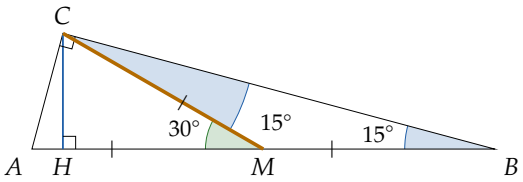
Kitas būdas (T11 atvirkščiai). $MA = MB$ (vidurio statmuo) $= MC$, todėl pusiaukraštinė $AM = \frac{1}{2}BC$ ir $\angle A = 90°$ (pusiaukraštinė į įžambinę, atvirkščiai).

Pamoka. du viduriai – vidurio linija (T8); ji perkelia statmenumą: statmena AB tiesė DM „atneša“ statųjį kampą prie A.

17 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

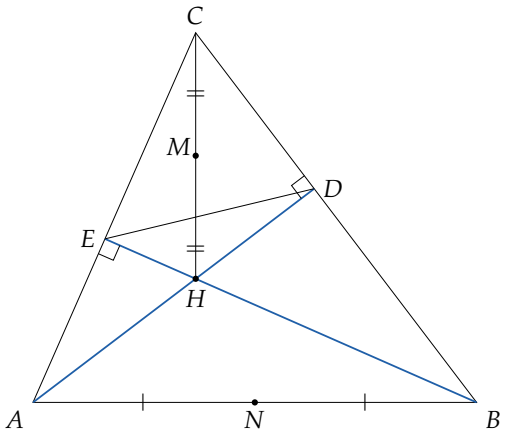
Ką matau. statusis kampas, kampas $15°$ ir įžambinė.

Idėja (T11). M – įžambinės vidurys; sujungiame jį su C.

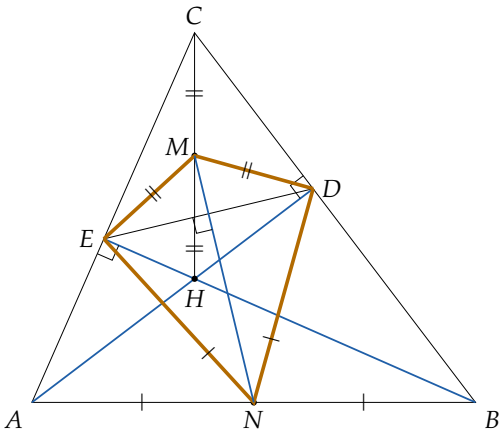
1. $MC = MB = \frac{1}{2}AB$ (pusiaukraštinė į įžambinę), todėl $\angle MCB = \angle B = 15°$ (kampai prie pagrindo).
2. $\angle CMA = 15° + 15° = 30°$ (trikampio CMB priekampis).
3. Stačiajame trikampyje CHM $\angle CMH = 30°$, todėl $CH = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{4}AB$ (statinis prieš $30°$ kampą).

Pamoka. pusiaukraštinė į įžambinę „padvigubina“ kampą prie įžambinės: iš $15°$ gavome $30°$.

18 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

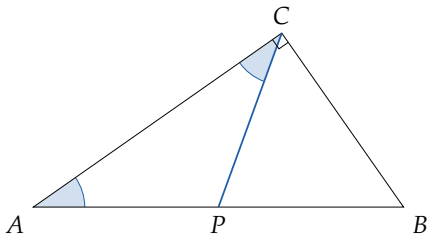
Ką matau. du statieji trikampiai su bendra įžambine CH ir du – su bendra įžambine AB.

Idėja (T11). sujungiame M ir N su D ir E.

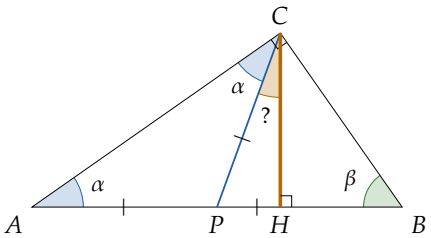
1. $MD = ME = \frac{1}{2}CH$ (pusiaukraštinė į įžambinę; trikampiai CDH ir CEH).
2. $ND = NE = \frac{1}{2}AB$ (pusiaukraštinė į įžambinę; trikampiai ADB ir AEB).
3. M ir N – atkarpos DE vidurio statmenyje (vidurio statmuo, atvirkščiai), todėl tiesė MN – vidurio statmuo: $MN \perp DE$.

Pamoka. du statieji trikampiai su bendra įžambine – jos vidurys vienodai nutolęs nuo stačiųjų kampų viršūnių; du tokie taškai duoda vidurio statmenį.

19 uždavinys.



sąlyga



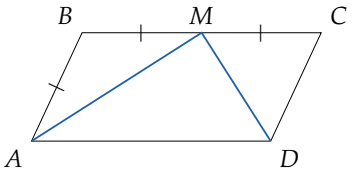
sprendimas

Ką matau. lygūs kampai prie kraštinės AC – lygiašonis trikampis. Pažymėkime $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; $\beta = 90° - \alpha$ (trikampio kampų suma).

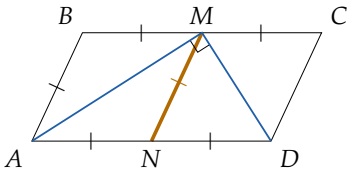
1. a) $\angle PAC = \angle PCA = \alpha$, todėl $PA = PC$ (lygiašonio požymis).
2. $\angle PCB = 90° - \alpha = \beta = \angle B$, todėl $PB = PC$ (lygiašonio požymis).
3. $PA = PB = PC$: P – įžambinės vidurys ir $CP = \frac{1}{2}AB$.
4. b) Pagal a) $P = M$, todėl $\angle ACM = \alpha = 35°$; $\angle ACH = 90° - 35° = 55°$ (trikampio AHC kampų suma).
5. $\angle MCH = \angle ACH - \angle ACM = 55° - 35° = 20°$.

Pamoka. bendrai $\angle MCH = |\angle B - \angle A|$.

20 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. reikia stačiojo kampo; daug lygių atkarpų, lygių pusei BC.

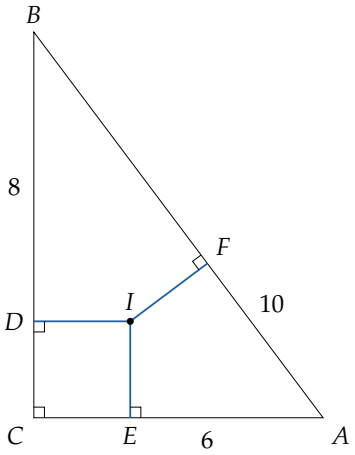
Idėja (T11 atvirkščiai). ieškome trikampio AMD pusiaukraštinės, lygios pusei AD; tam pažymime AD vidurį N.

1. $AN = ND = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = BM = AB$ (lygiagretainio savybė: $AD = BC$).
2. $ABMN$ – lygiagretainis ($BM = AN$, $BM \parallel AN$ – lygiagretainio požymis), todėl $MN = AB$ (lygiagretainio savybė).
3. Trikampio AMD pusiaukraštinė $MN = AN = ND = \frac{1}{2}AD$, todėl $\angle AMD = 90°$ (pusiaukraštinė į įžambinę, atvirkščiai).

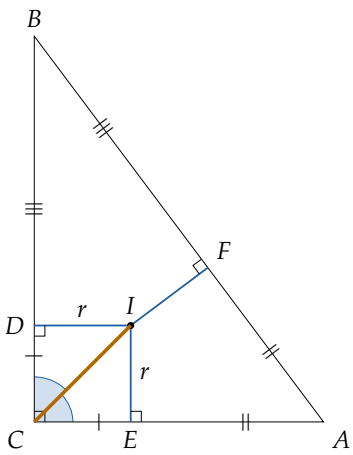
Kitas būdas. $\angle BMA = \angle BAM$ (kampai prie pagrindo, $BA = BM$) ir $\angle BMA = \angle MAD$ (vidaus priešiniai kampai), todėl AM – kampo A pusiaukampinė; taip pat DM – kampo D pusiaukampinė. $\angle A + \angle D = 180°$ (vidaus vienašaliai kampai), todėl $\angle MAD + \angle MDA = 90°$ ir $\angle AMD = 90°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. lygiagretainyje „pusė kraštinės“ – pažymėk vidurį: atsiras lygiagretainis ir pusiaukraštinė, lygi pusei kraštinės.

21 uždavinys.



sąlyga



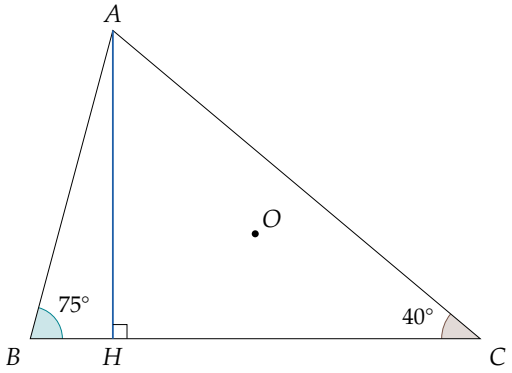
sprendimas

Ką matau. pusiaukampinių susikirtimo taškas ir statmenys į kraštines.

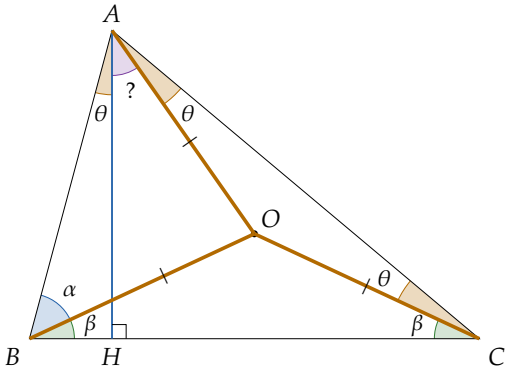
Idėja (T12). iš kiekvienos viršūnės – dvi lygios atkarpos iki statmenų pagrindų; prie C jos lygios r.

1. $ID = IE = IF = r$ (pusiaukampinių susikirtimas). $\angle ICD = \angle ICE = 45°$ (CI – pusiaukampinė), todėl $\angle CID = \angle CIE = 45°$ (trikampio kampų suma) ir $CD = CE = r$ (lygiašonio požymis).
2. $AF = AE = 6 - r$, $BF = BD = 8 - r$ (pusiaukampinė: atkarpos iki statmenų pagrindų lygios).
3. $AF + FB = 10$: $(6 - r) + (8 - r) = 10$, $r = 2$.

22 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

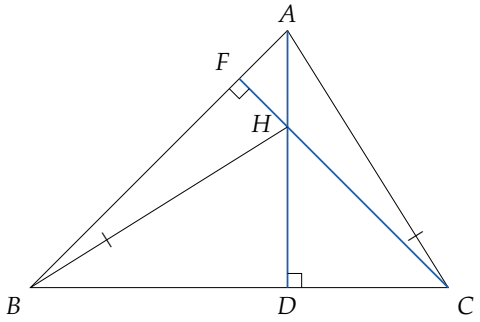
Ką matau. O – vidurio statmenų susikirtimo taškas.

Idėja (T12). sujungiame O su viršūnėmis.

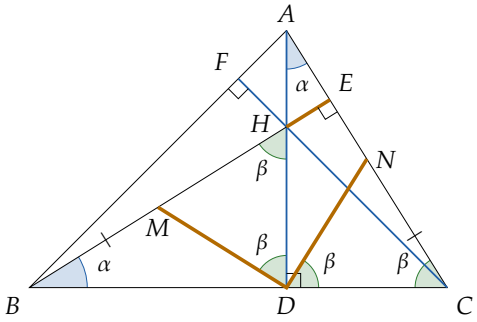
1. $OA = OB = OC$ (vidurio statmenų susikirtimas), todėl lygiašonių trikampių kampai prie pagrindų lygūs; pažymėkime $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$, $\angle OBC = \angle OCB = \beta$, $\angle OCA = \angle OAC = \theta$ (kampai prie pagrindo).
2. O – trikampio viduje, todėl $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 180°$ (trikampio kampų suma), $\alpha + \beta + \theta = 90°$.
3. a) $\angle CAO = \theta = 90° - (\alpha + \beta) = 90° - \angle B$, o $\angle BAH = 90° - \angle B$ (trikampio ABH kampų suma). Taigi $\angle BAH = \angle CAO$.
4. b) $\angle A = 65°$ (trikampio kampų suma), $\angle BAH = \theta = 15°$, $\angle BAO = \alpha = 65° - 15° = 50°$, todėl $\angle HAO = 50° - 15° = 35°$.

Pamoka. bendrai $\angle HAO = |\angle B - \angle C|$; kai $\angle B = \angle C$, aukštinė eina per O.

23 uždavinys.



sąlyga



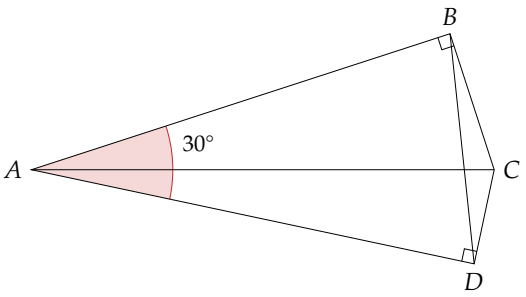
sprendimas

Ką matau. dvi aukštinės; lygios atkarpos BH ir AC – stačiųjų trikampių BHD ir ACD įžambinės.

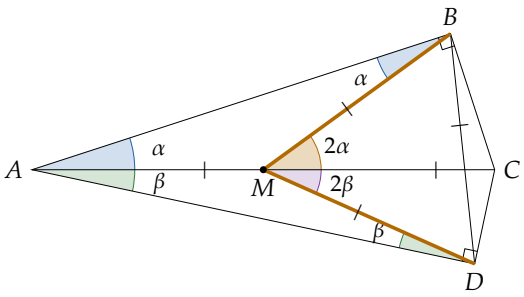
Idėja. tiesė BH – trečioji aukštinė; b) dalyje – T11.

1. a) Tiesė BH kerta AC taške E, ir $BH \perp AC$ (aukštinių susikirtimas): $\angle BEC = 90°$.
2. Pažymėkime $\angle HBD = \alpha$; $\alpha = 90° - \angle C$ (trikampio BEC kampų suma), $\angle CAD = 90° - \angle C = \alpha$ (trikampio ADC kampų suma).
3. $\triangle BHD = \triangle ACD$ (įžambinė ir smailusis kampas: $BH = AC$, $\angle HBD = \angle CAD$), todėl $BD = AD$ ir $\angle BHD = \angle ACD$; pažymėkime juos β.
4. Statusis trikampis ABD lygiašonis, todėl $\angle ABC = 45°$ (kampai prie pagrindo, trikampio kampų suma).
5. b) $DM = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}AC = DN$ (pusiaukraštinė į įžambinę).
6. $\angle MDH = \angle MHD = \beta$ ($MD = MH$), $\angle NDC = \angle NCD = \beta$ ($ND = NC$) (kampai prie pagrindo).
7. $\angle MDN = \angle MDH + \angle HDN = \beta + (90° - \beta) = 90°$.

24 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

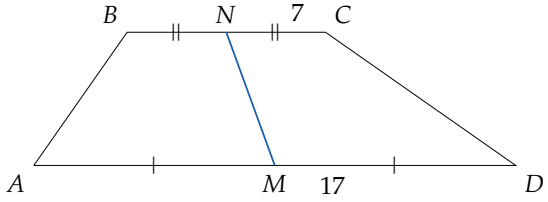
Ką matau. du statieji trikampiai su bendra įžambine AC.

Idėja (T11). M – įžambinės AC vidurys; sujungiame jį su B ir D.

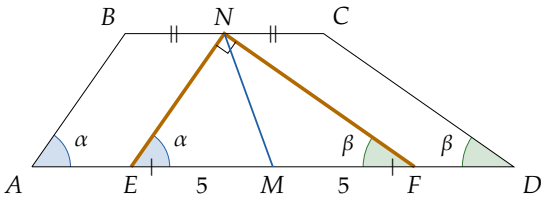
1. a) $MB = MD = MA = MC = \frac{1}{2}AC$ (pusiaukraštinė į įžambinę), todėl M – atkarpos BD vidurio statmenyje (vidurio statmuo, atvirkščiai).
2. b) Pažymėkime $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$; tada $\alpha + \beta = 30°$.
3. $\angle ABM = \alpha$ ($MA = MB$), $\angle ADM = \beta$ ($MA = MD$) (kampai prie pagrindo), todėl $\angle BMC = 2\alpha$, $\angle CMD = 2\beta$ (priekampis).
4. $\angle BMD = 2\alpha + 2\beta = 60°$.
5. Lygiašonis trikampis MBD su 60° kampu – lygiakraštis (lygiakraštis trikampis): $BD = MB = \frac{1}{2}AC$.

Pamoka. bendros įžambinės vidurys vienodai nutolęs nuo visų keturių taškų A, B, C, D.

25 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

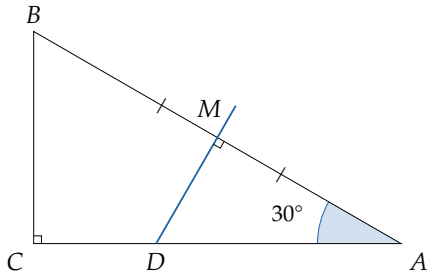
Ką matau. trapecija, kurioje svarbūs kampai prie pagrindo AD, bet jie „atskirti“; du pagrindų viduriai.

Idėja (T9). perkeliame šonines kraštines lygiagrečiai prie N: kampai A ir D susitinka viename trikampyje: per N brėžiame $NE \parallel AB$ ir $NF \parallel CD$ (E,$F \in AD$). Pažymėkime $\angle A = \alpha$, $\angle D = \beta$.

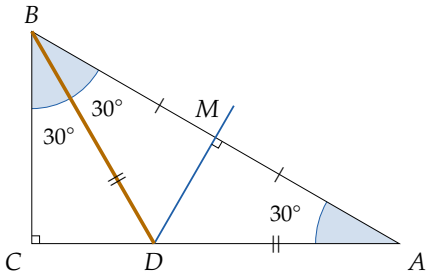
1. $ABNE$ ir $NCDF$ – lygiagretainiai (priešingos kraštinės poromis lygiagrečios), todėl $AE = BN = 3{,}5$ ir $FD = NC = 3{,}5$ (lygiagretainio savybė).
2. $\angle NEF = \alpha$, $\angle NFE = \beta$ (atitinkamieji kampai), todėl $\angle ENF = 180° - 90° = 90°$ (trikampio kampų suma).
3. $AM = MD = 8{,}5$, todėl $EM = MF = 8{,}5 - 3{,}5 = 5$: NM – stačiojo trikampio ENF pusiaukraštinė į įžambinę $EF = 10$, ir $MN = 5$ (pusiaukraštinė į įžambinę).

Pamoka. kampai prie pagrindo trapecijoje atskirti – perkelk šonines lygiagrečiai (T9); bendrai čia $MN = \frac{AD-BC}{2}$.

26 uždavinys.



sąlyga



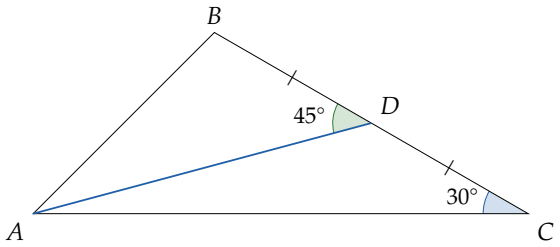
sprendimas

Ką matau. taškas D – vidurio statmenyje.

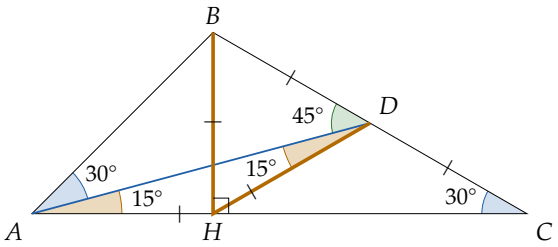
Idėja (T12). sujungiame D su B.

1. $DA = DB$ (vidurio statmuo), todėl $\angle DBA = \angle A = 30°$ (kampai prie pagrindo).
2. $\angle ABC = 60°$ (trikampio kampų suma), todėl $\angle DBC = 60° - 30° = 30°$.
3. Stačiajame trikampyje DCB $DC = \frac{1}{2}DB$ (statinis prieš 30° kampą), todėl $AD = DB = 2DC$.

27 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

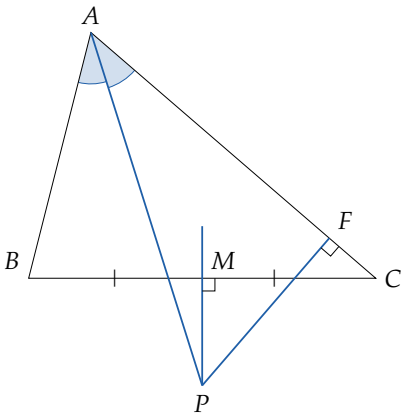
Ką matau. kampas 30°, bet nėra stačiojo trikampio; D – kraštinės BC vidurys.

Idėja. statmuo BH į tiesę AC, tada T11 trikampyje BHC.

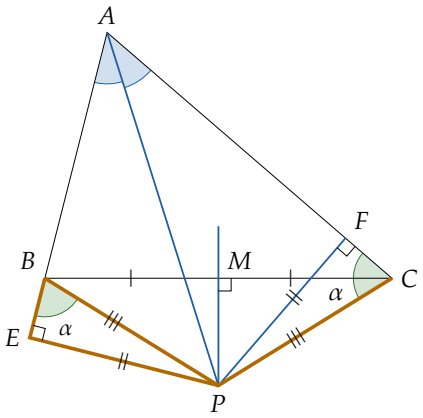
1. Stačiajame trikampyje BHC $BH = \frac{1}{2}BC = BD$ (statinis prieš 30° kampą), $DH = \frac{1}{2}BC = BD$ (pusiaukraštinė į įžambinę).
2. Trikampis BDH lygiakraštis, todėl $\angle BDH = 60°$ (lygiakraštis trikampis); $\angle BDA = 45° < 60°$, todėl H – atkarpoje AC ir $\angle ADH = 60° - 45° = 15°$.
3. $\angle DAC = 45° - 30° = 15°$ (trikampio ADC priekampis ADB), todėl $HA = HD = HB$ (lygiašonio požymis).
4. Statusis trikampis AHB lygiašonis, todėl $\angle HAB = 45°$ (kampai prie pagrindo) ir $\angle BAD = 45° - 15° = 30°$.

Pamoka. kampas 30° be stačiojo trikampio – nuleisk statmenį ir gausi statųjį trikampį su šiuo kampu.

28 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. P – ir pusiaukampinėje, ir vidurio statmenyje.

Idėja (T12). abu veiksmai: statmuo PE į tiesę AB ir atkarpos PB, PC.

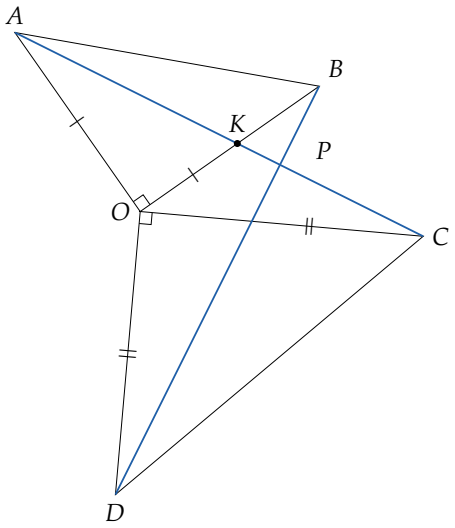
1. a) $PE = PF$, $AE = AF$ (pusiaukampinė).
2. $PB = PC$ (vidurio statmuo). $\triangle PEB = \triangle PFC$ (įžambinė ir statinis: $PB = PC$, $PE = PF$), todėl $BE = CF$ ir $\angle PBE = \angle PCF$; pažymėkime juos α.
3. E – ne atkarpoje AB (kitaip $AB = AE + EB = AF + FC = AC$), todėl B – tarp A ir E: $AF = AE = AB + BE = AB + CF$.
4. $AF + CF = AC$ ir $AF - CF = AB$, todėl $AF = \frac{1}{2}(AB + AC)$, $CF = \frac{1}{2}(AC - AB)$.
5. b) $\angle ABP = 180^\circ - \alpha$ (gretutiniai kampai), $\angle ACP = \angle FCP = \alpha$, todėl $\angle ABP + \angle ACP = 180^\circ$.

Kitas būdas (T10).

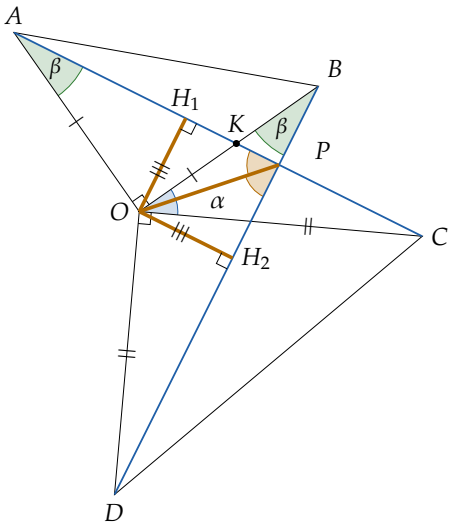
1. Ant AC atidedame $AQ = AB$ ($AB < AC$). $\triangle ABP = \triangle AQP$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $PQ = PB$ ir $\angle ABP = \angle AQP$. $PB = PC$ (vidurio statmuo), taigi $PQ = PC$.
2. $\triangle PFQ = \triangle PFC$ (įžambinė ir statinis: $PQ = PC$, PF bendras), todėl $QF = FC$. Taigi $AF = AB + CF$ ir $AF + CF = AC$: $AF = \frac{1}{2}(AB + AC)$, $CF = \frac{1}{2}(AC - AB)$.
3. $\angle PQC = \angle PCQ$ (kampai prie pagrindo); pažymėkime juos β. Tada $\angle ABP = \angle AQP = 180^\circ - \beta$ (gretutiniai kampai), $\angle ACP = \beta$, todėl $\angle ABP + \angle ACP = 180^\circ$.

Pamoka. taškas ir pusiaukampinėje, ir vidurio statmenyje – naudok abu: dvi poros lygių stačiųjų trikampių.

29 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

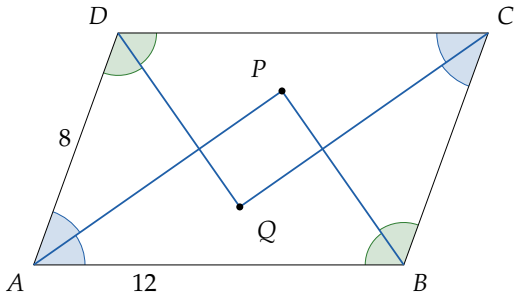
Ką matau. du statieji lygiašoniai trikampiai su bendra viršūne O.

Idėja (T3). lygūs trikampiai OAC ir OBD; b) dalyje – T12 atvirkščiai (vienodi atstumai iki tiesių). Pažymėkime $\angle BOC = \alpha$.

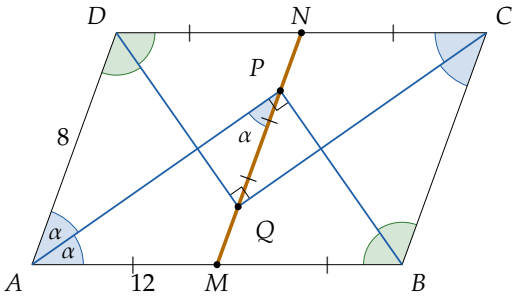
1. a) $\angle AOC = 90° + \alpha = \angle BOD$, todėl $\triangle OAC = \triangle OBD$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $OA = OB$, $OC = OD$). Taigi $AC = BD$ ir $\angle OAC = \angle OBD$; pažymėkime juos β.
2. Trikampiuose OAK ir PBK: $\angle OAK = \angle PBK = \beta$, $\angle AKO = \angle BKP$ (kryžminiai kampai), todėl $\angle BPK = \angle AOK = 90°$ (trikampio kampų suma). Taigi $AC \perp BD$ ir $\angle APD = 90°$ (gretutiniai kampai).
3. b) Nuleidžiame statmenis $OH_1 \perp AC$ ir $OH_2 \perp BD$: $\triangle OH_1A = \triangle OH_2B$ (įžambinė ir smailusis kampas: $OA = OB$, $\angle OAH_1 = \angle OBH_2 = \beta$), todėl $OH_1 = OH_2$.
4. O – kampo APD viduje ir vienodai nutolęs nuo tiesių PA ir PD, todėl PO – kampo APD pusiaukampinė (pusiaukampinė, atvirkščiai), $\angle APO = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$.

Pamoka. lygūs trikampiai su bendra viršūne perkelia kampą: status kampas AOB „persikėlė“ į tašką P.

30 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. pusiaukampinės prie vienos kraštinės – statusis kampas; tada stačiojo trikampio įžambinės vidurys (T11). Pažymėkime $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$.

Idėja (T11). M ir N – kraštinių AB ir CD viduriai; įrodome, kad P ir Q yra tiesėje MN.

1. $2\alpha + 2\beta = 180°$ (vidaus vienašaliai kampai), todėl $\angle APB = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$ (trikampio kampų suma). Taip pat $\angle CQD = 90°$.
2. $MP = MA = 6$ (pusiaukraštinė į įžambinę), todėl $\angle MPA = \angle MAP = \alpha = \angle PAD$ (kampai prie pagrindo), ir $MP \parallel AD$ (lygiagretumo požymis: vidaus priešiniai kampai).
3. $AMND$ – lygiagretainis ($AM = DN$, $AM \parallel DN$ – lygiagretainio požymis), todėl $MN \parallel AD$ ir $MN = AD = 8$. Per M eina tik viena tiesė, lygiagreti AD, todėl P – tiesėje MN.
4. Taip pat $NQ = ND = 6$ ir $NQ \parallel AD$, todėl Q – tiesėje MN. $PQ = MP + NQ - MN = 6 + 6 - 8 = 4$.

Pamoka. bendrai $PQ = |AB - AD|$: pusiaukampinių taškai P ir Q guli „vidurinėje“ lygiagretainio tiesėje MN.