Geometrija

Mišinys 1

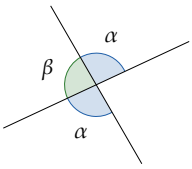
9 klasė

Šiame lape uždaviniai neturi temos: kuriuo keliu eiti, sprendžiate patys. Naudotis galima tik tuo, kas yra įrankių dėžėje.

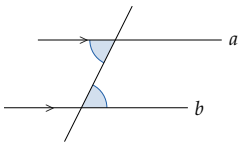
Įrankių dėžė

Faktai.

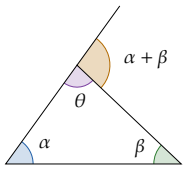
1. **Gretutiniai kampai**: suma 180°. **Kampai aplink tašką**: suma 360°. **Kryžminiai kampai** lygūs.



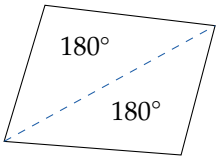
2. **Lygiagrečios tiesės** ir kirstinė: atitinkamieji ir vidaus priešiniai kampai lygūs, vidaus vienašalių suma 180°. Ir atvirkščiai (**lygiagretumo požymis**).



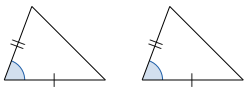
3. **Trikampio kampų suma** 180°; **priekampis** lygus dviejų jam negretimų kampų sumai („kampų siurblys“).



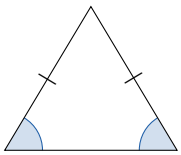
4. Iškilojo **keturkampio kampų suma** 360°, n-kampio – $(n-2)\cdot 180°$.



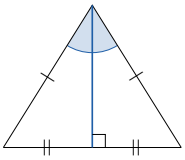
5. **Trikampių lygumas**: dvi kraštinės ir kampas tarp jų; kraštinė ir du kampai prie jos; trys kraštinės.



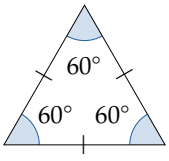
6. **Lygiašonis trikampis**: kampai prie pagrindo lygūs; ir atvirkščiai – du lygūs kampai $\Rightarrow$ lygiašonis (**lygiašonio požymis**).



7. **Lygiašonio pusiaukampinė** iš viršūnės yra ir pusiaukraštinė, ir aukštinė – tai ta pati atkarpa: ir pusiaukraštinė, ir aukštinė iš viršūnės yra pusiaukampinė.

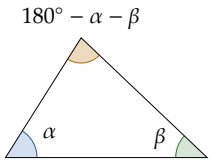


8. **Lygiakraštis trikampis**: kampai po 60°; lygiašonis su 60° kampu – lygiakraštis.

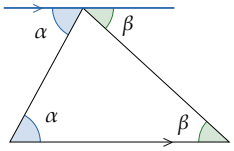


Technikos (signalas → veiksmas).

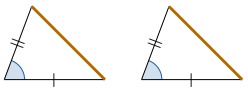
T1. Daug kampų → pažymėkite α, β, kitus išreikškite jais (**kampų gaudymas**).



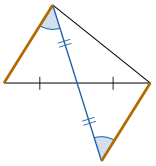
T2. Kampus reikia perkelti ar surinkti → **papildoma lygiagreti tiesė** per viršūnę.



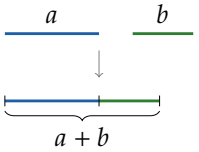
T3. Reikia lygių atkarpų ar kampų → raskite ar sukurkite **lygius trikampius**.



T4. Pusiaukraštinė → **pratęskite ją tiek pat**.



T5. Atkarpų suma ar skirtumas → **atidėkite lygią atkarpą**.



I. Apšilimas

1. Dvi tiesės susikerta, ir vienas iš keturių susidariusių kampų yra 4 kartus mažesnis už jam gretutinį kampą. Raskite visus keturis kampus.

2. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo yra 2 kartus didesnis už kampą prie viršūnės. Raskite kampą prie viršūnės.

3. Trikampyje ABC $\angle A = 47°$, $\angle B = 68°$. Raskite kampą, gretutinį kampui C (priekampį prie viršūnės C).

4. Atkarpos AB ir CD kertasi taške O, kuris yra abiejų atkarpų vidurio taškas. Įrodykite, kad $AC = BD$.

5. Trikampyje ABC $AB = AC$ ir $\angle BAC = 50°$. Taškas P yra trikampio viduje, $\angle PBC = \angle PCB = 20°$. Raskite kampus BAP ir APB.

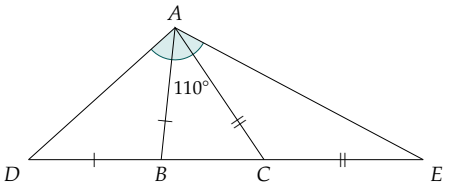
6. Taškas D yra trikampio ABC kraštinės BC vidinis taškas. Duota $AD = AC$, $\angle ABC = 38°$, $\angle BAD = 24°$. Raskite kampą BAC.

II. Pagrindas

7. Taškas D yra trikampio ABC kraštinės BC vidinis taškas. Duota $AB = BD$, $AD = DC$ ir $\angle BAC = 75°$. Raskite kampus ABC ir ACB.

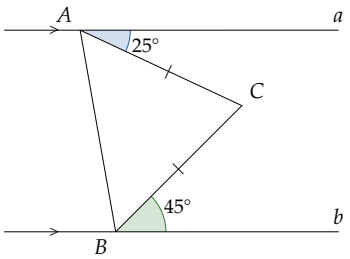
8.

Trikampio ABC kraštinės BC tęsiniuose pažymėti taškai D ir E: D – už B, $BD = BA$; E – už C, $CE = CA$. Žinoma, kad $\angle DAE = 110°$. Raskite $\angle BAC$.



9.

Tiesės $a \parallel b$. Taškas A yra tiesėje a, B – tiesėje b, o C – tarp tiesių, į dešinę nuo A ir B (žr. brėžinį), $CA = CB$. Atkarpa AC su tiese a sudaro 25° kampą, atkarpa BC su tiese b – 45° kampą (abu kampai atsiveria į dešinę). Raskite $\angle CAB$ ir kampą tarp tiesių AB ir a.



10. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = BC = CD$, $\angle ABC = 100°$, $\angle BCD = 60°$. Raskite $\angle BAD$ ir $\angle ADC$.

11. Taškas M – atkarpos BC vidurys. Taškai A ir D yra skirtingose tiesės BC pusėse, $AB \parallel CD$ ir $AB = CD$. Įrodykite, kad atkarpa AD eina per M ir M ją padalija pusiau.

12. Trikampis ABC lygiakraštis. Taškas D – kraštinės BC vidinis taškas, E – kraštinės CA vidinis taškas, $BD = CE$. Atkarpos AD ir BE kertasi taške P. Raskite $\angle APB$.

13. Trikampyje ABC $AB = AC$ ir $\angle BAC < 120°$. Kitoje tiesės AB pusėje nei taškas C nubrėžtas lygiakraštis trikampis ABD. Įrodykite, kad $\angle BCD = 30°$, kad ir koks būtų $\angle BAC$.

14. Trikampyje ABC $AB = AC$. Taškai D ir E yra atitinkamai kraštinių AB ir AC vidiniai taškai, $BD = CE$. Atkarpos BE ir CD kertasi taške P. Įrodykite, kad tiesės AP ir BC statmenos.

15. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = CD$ ir $\angle ABC = \angle BCD$. Įrodykite, kad $AC = BD$ ir $AD \parallel BC$.

16. Trikampiuose ABC ir $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, o pusiaukraštinės AM ir A_1M_1 lygios. Įrodykite, kad $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

III. Rask klaidą

17. Mokinys sprendė uždavinį: „Trikampiuose ABC ir $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1 = 10$, $AC = A_1C_1 = 6{,}5$ ir $\angle B = \angle B_1$. Įrodykite, kad trikampiai lygūs.“ Jo sprendimas:

1) $AB = A_1B_1$ (duota).
2) $AC = A_1C_1$ (duota).
3) $\angle B = \angle B_1$ (duota).
4) Trikampiai lygūs (dvi kraštinės ir kampas tarp jų). ■

Raskite klaidą. Ar teiginys teisingas?

18. Mokinys sprendė uždavinį: „Trikampyje ABC taškas D yra kraštinėje BC ir $\angle BAD = \angle CAD$. Įrodykite, kad $BD = CD$.“ Jo sprendimas:

1) Brėžinyje matyti, kad $AB = AC$.
2) Trikampiuose ABD ir ACD: $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$ (duota), AD bendra.
3) Trikampiai lygūs (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $BD = CD$. ■

Raskite klaidą. Ar teiginys teisingas? Jei ne, kaip jį pataisyti?

IV. Iššūkiai

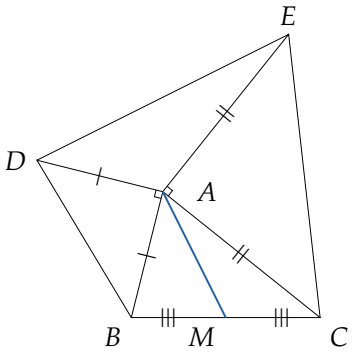
19. Trikampis ABC lygiakraštis. Kraštinės BA tęsinyje už A pažymėtas taškas D, o kraštinėje BC – vidinis taškas E, kad $AD = BE$. Įrodykite, kad $CD = DE$.

20. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = BC = CD$, $\angle ABC = 100°$, $\angle BCD = 140°$. Raskite $\angle BAD$ ir $\angle ADC$.

21.

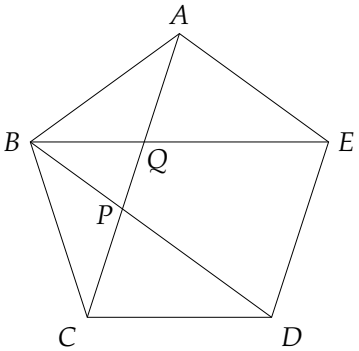
Ant trikampio ABC kraštinių AB ir AC į išorę nubrėžti statieji lygiašoniai trikampiai ABD ir ACE: $AD = AB$, $AE = AC$, $\angle BAD = \angle CAE = 90°$. Kampas BAC smailusis. AM – trikampio ABC pusiaukraštinė.

a) Įrodykite, kad $AM = \frac{1}{2}DE$.
b) Įrodykite, kad tiesė AM statmena DE.



22.

$ABCDE$ – taisyklingasis penkiakampis (visos kraštinės ir visi kampai lygūs). Įstrižainė AC kerta įstrižainę BE taške Q, o įstrižainę BD – taške P. Įrodykite, kad $AC = AB + AQ$ ir $AB = AQ + QP$.
(Visos įstrižainės sudaro penkiakampę žvaigždę: įstrižainė lygi kraštinės ir smaigalio šoninės (atkarpos iš smaigalio viršūnės) sumai, o kraštinė – smaigalio šoninės ir vidinio penkiakampio kraštinės sumai.)



Uždavinių atsakymai

1. 36°, 144°, 36°, 144°.
2. 36°.
3. 115°.
4. Įrodymas.
5. $\angle BAP = 25°$, $\angle APB = 110°$.
6. 80°.
7. $\angle ABC = 80°$, $\angle ACB = 25°$.
8. 40°.
9. $\angle CAB = 55°$; kampas tarp AB ir a – 80°.
10. $\angle BAD = 70°$, $\angle ADC = 130°$.
11. Įrodymas – lapo gale.
12. 120°.
13. Įrodymas – lapo gale.
14. Įrodymas – lapo gale.
15. Įrodymas – lapo gale.
16. Įrodymas – lapo gale.
17. Klaida 4) žingsnyje: kampas B nėra tarp kraštinių AB ir AC. Teiginys klaidingas.
18. Klaida 1) žingsnyje: $AB = AC$ sąlygoje nėra. Kai $AB \neq AC$, tai $BD \neq CD$ – teiginys klaidingas. Pataisa: sąlygoje turi būti dar $AB = AC$.
19. Įrodymas – lapo gale.
20. $\angle BAD = 70°$, $\angle ADC = 50°$.
21. Įrodymas – lapo gale.
22. Įrodymas – lapo gale.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) Ieškomi kampai – gretutiniai ir kryžminiai. 2) Pažymėkite mažesnį kampą α, gretutinį – 4α; likusius gaukite iš kryžminių kampų.
2. 1) Abu kampai prie pagrindo lygūs. 2) Pažymėkite viršūnės kampą α; kampai prie pagrindo – po 2α.
3. 1) Ieškomas kampas – trikampio priekampis. 2) Kampo C ieškoti nebūtina: priekampis lygus dviejų jam negretimų kampų sumai.
4. 1) AC ir BD – trikampių AOC ir BOD kraštinės. 2) Palyginkite trikampius AOC ir BOD; kampai AOC ir BOD – kryžminiai.
5. 1) Atkarpos iš P iki pagrindo galų lygios. 2) Nubrėžkite AP ir palyginkite trikampius ABP ir ACP.
6. 1) Trikampyje ABD žinomi du kampai, o trikampis ADC – lygiašonis. 2) Raskite $\angle ADC$ kaip trikampio ABD priekampį, tada – kampų sumą trikampyje ABC.
7. 1) Atkarpa AD priklauso dviem lygiašoniams trikampiams. 2) Pažymėkite $\angle DAC = \beta$; kampą ADB išreikškite trikampio ADC kampais.
8. 1) $BD = BA$ ir $CE = CA$ – du lygiašoniai trikampiai. 2) Kam lygi kampų D ir E suma trikampyje ADE?

9. 1) Laužtė ACB tarp dviejų lygiagrečių tiesių, o $CA = CB$. 2) Per C nubrėžkite tiesę, lygiagrečią a; raskite $\angle ACB$, tada kampus prie pagrindo AB.

10. 1) Dvi lygios kraštinės ir 60° kampas tarp jų. 2) Nubrėžkite įstrižainę BD.

11. 1) Atkarpa AD kažkur kerta BC – ar ne vidurio taške? 2) Sankirtą pažymėkite O; palyginkite trikampius ABO ir DCO.

12. 1) Lygios atkarpos BD ir CE prigludusios prie lygių kraštinių ir lygių kampų. 2) Įrodykite, kad $\triangle ABD = \triangle BCE$; tada kampą APB raskite iš trikampio ABP.

13. 1) Atkarpos AB, AC ir AD turi bendrą galą A ir visos lygios. 2) Nubrėžkite CD; pažymėkite $\angle ACD = \beta$, $\angle BCD = \theta$ ir sudėkite trikampio BCD kampus.

14. 1) Lygios atkarpos atidėtos nuo lygiašonio trikampio pagrindo galų. 2) Palyginkite trikampius BCD ir CBE, tada nubrėžkite AP.

15. 1) Lygios kraštinės ir lygūs kampai yra, bet trikampių, kuriuose jie būtų kartu, brėžinyje nėra. 2) Nubrėžkite įstrižaines; palyginkite $\triangle ABC$ su $\triangle DCB$, paskui $\triangle BAD$ su $\triangle CDA$.

16. 1) Žinomos trys atkarpos, bet jos nesudaro trikampio, o viena iš jų – pusiaukraštinė. 2) Abiejuose trikampiuose pratęskite pusiaukraštinę už vidurio tiek pat ($MK = AM$, $M_1K_1 = A_1M_1$) ir palyginkite trikampius ABK ir $A_1B_1K_1$.

17. 1) Kurios dvi kraštinės sudaro kampą B? 2) Pabandykite nubrėžti du skirtingus trikampius su tais pačiais duomenimis: iš taško A nubrėžkite dvi lygias atkarpas 6,5 iki to paties kampo B kraštinės.

18. 1) Kurią lygybę mokinys paėmė ne iš sąlygos? 2) Tarkite, kad $AB \neq AC$, bet $BD = CD$: pratęskite AD už D tiek pat ir ieškokite prieštaros.

19. 1) Atkarpa BD yra suma $BA + AD$, o prie B – 60° kampas. 2) Pratęskite BC už C iki F, kad $BF = BD$; trikampis BDF lygiakraštis. Palyginkite $\triangle DBE$ ir $\triangle DFC$.

20. 1) Trys lygios atkarpos iš eilės, o abu duoti kampai didesni už 60°. 2) Nubrėžkite lygiakraštį trikampį BCE (E toje pačioje BC pusėje kaip A) ir įrodykite, kad A, E, D – vienoje tiesėje.

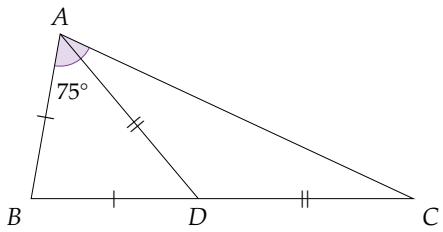
21. 1) Pusiaukraštinė ir du statūs kampai prie A. 2) a) Pratęskite AM už M tiek pat (iki K) ir įrodykite, kad $\triangle ACK = \triangle EAD$ (kampą ACK sudėkite iš $\angle ACB$ ir $\angle BCK$). b) Pratęskite KA už A ir sudėkite kampus prie A.

22. 1) Penkiakampio kampas 108°, o kiekviena įstrižainė su dviem kraštinėmis sudaro lygiašonį trikampį. 2) Raskite trikampių ABP ir QBC kampus; įrodykite, kad $AP = AB$ ir $CQ = AB$, tada atkarpas sudėkite ant AC.

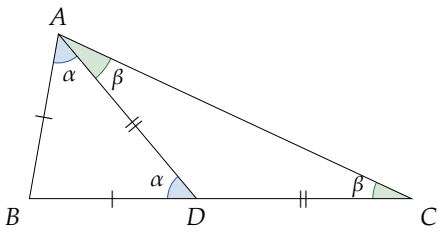
Sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

7 uždavinys.



sąlyga



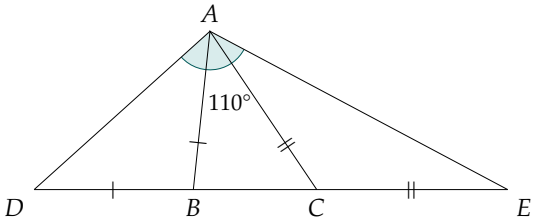
sprendimas

Ką matau. dvi poros lygių atkarpų – du lygiašoniai trikampiai su bendra kraštine AD.

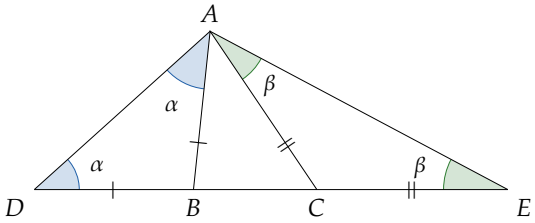
Idėja (T1). kampus prie pagrindų pažymėsime graikiškomis raidėmis.

1. Pažymėkime $\angle BAD = \alpha$ ir $\angle DAC = \beta$. Tada $\angle ADB = \alpha$ (kampai prie pagrindo, $AB = BD$) ir $\angle ACD = \beta$ (kampai prie pagrindo, $AD = DC$).
2. $\alpha = 2\beta$ (trikampio ADC priekampis); $\alpha + \beta = 75°$, todėl $\beta = 25°$, $\alpha = 50°$.
3. $\angle ABC = 180° - 2\alpha = 80°$ (trikampio kampų suma), $\angle ACB = \beta = 25°$.

8 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

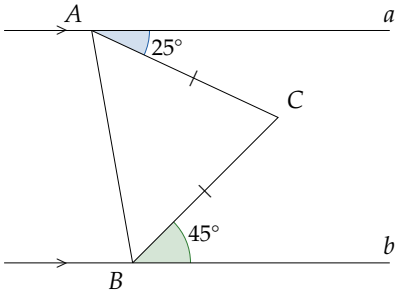
Ką matau. $\angle DAE$ sudarytas iš $\angle BAC$ ir dviejų lygiašonių trikampių kampų prie pagrindo.

Idėja (T1). pažymėkime $\angle D = \alpha$, $\angle E = \beta$.

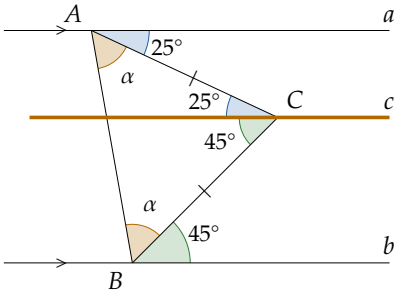
1. $\angle BAD = \alpha$ (kampai prie pagrindo, $BD = BA$), $\angle CAE = \beta$ (kampai prie pagrindo, $CE = CA$).
2. $\alpha + \beta = 180° - 110° = 70°$ (trikampio ADE kampų suma).
3. $\angle BAC = 110° - (\alpha + \beta) = 40°$.

Pamoka. kartais patogiau žiūrėti į didįjį trikampį.

9 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

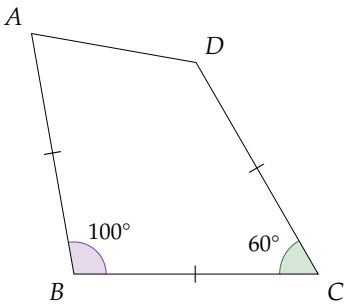
Ką matau. laužtė tarp lygiagrečių tiesių – kampą prie C galima surinkti.

Idėja (T2). per C – papildoma lygiagreti tiesė $c \parallel a$.

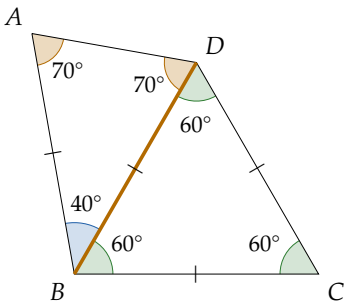
1. $c \parallel b$ (nes $c \parallel a$ ir $a \parallel b$).
2. Kampai tarp CA ir c bei tarp CB ir c lygūs 25° ir 45° (vidaus priešiniai kampai), todėl $\angle ACB = 70°$.
3. Pažymėkime $\angle CAB = \alpha$. Tada $\angle CBA = \alpha$ ir $\alpha = \frac{180°-70°}{2} = 55°$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma).
4. Kampas tarp AB ir a: $25° + \alpha = 80°$.

Kitas būdas (be papildomos linijos). $\angle CAB = \angle CBA$ (kampai prie pagrindo); pažymėkime juos α. Tada $(25° + \alpha) + (45° + \alpha) = 180°$ (vidaus vienašaliai, $a \parallel b$, kirstinė AB), todėl $\alpha = 55°$, o kampas tarp AB ir a – $25° + 55° = 80°$.

10 uždavinys.



sąlyga



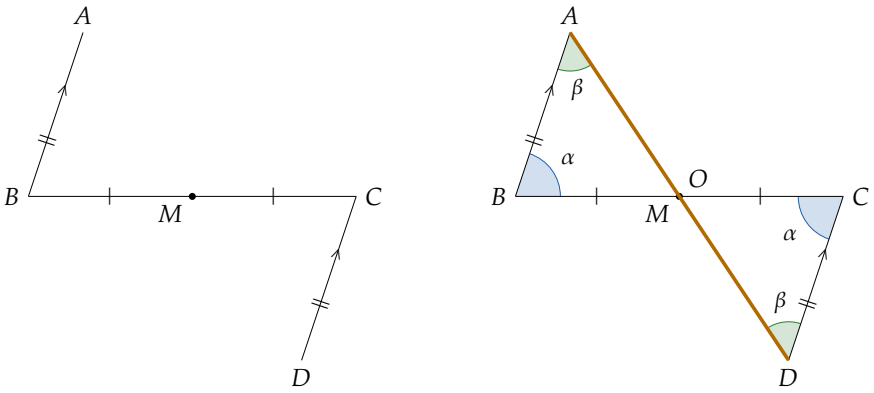
sprendimas

Ką matau. $BC = CD$ ir $\angle C = 60°$ – lygiakraštis trikampis.

Idėja. papildoma linija – įstrižainė BD.

1. $\triangle BCD$ lygiakraštis (lygiašonis su 60° kampu): $BD = BC$, $\angle CBD = \angle BDC = 60°$.
2. $BD = AB$, $\angle ABD = 100° - 60° = 40°$.
3. $\angle BAD = \angle BDA = \frac{180°-40°}{2} = 70°$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma).
4. $\angle ADC = 70° + 60° = 130°$.

11 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

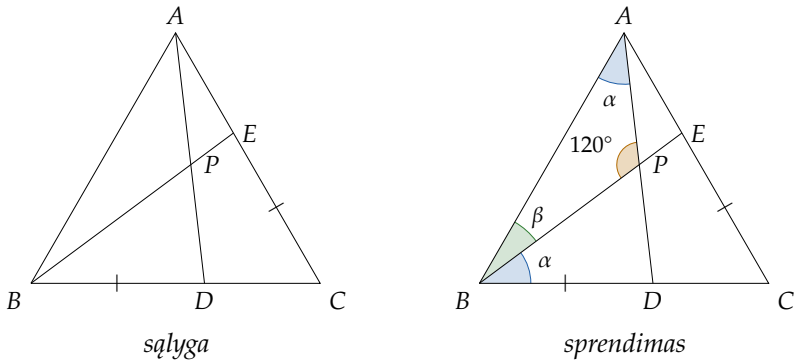
Ką matau. reikia įrodyti, kad tiesė eina per tašką.

Idėja (T3). imame sankirtą O ir įrodome, kad ji ir yra M. A ir D – skirtingose BC pusėse, todėl AD kerta tiesę BC; sankirta – O.

1. $\triangle ABO = \triangle DCO$ (kraštinė ir du kampai prie jos: $AB = DC$, $\angle ABO = \angle DCO$, $\angle BAO = \angle CDO$ – vidaus priešiniai kampai, $AB \parallel CD$; pažymėkime juos α ir β).
2. $BO = CO$ ir $AO = DO$ (atitinkamosios kraštinės).
3. O – atkarpos BC vidurys, t. y. $O = M$: AD eina per M ir $AM = MD$.

Pamoka. reikia įrodyti, kad tiesė eina per tašką – imk sankirtą ir įrodyk, kad ji ir yra tas taškas.

12 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

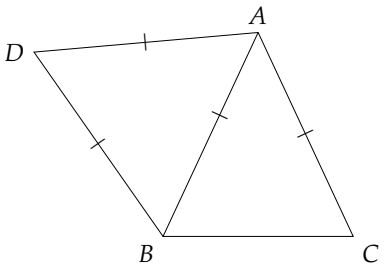
Ką matau. lygios atkarpos BD, CE ir lygiakraščio kraštinės bei 60° kampai prie jų.

Idėja (T3, T1). lygūs trikampiai ABD ir BCE duoda lygius kampus; toliau – kampų gaudymas.

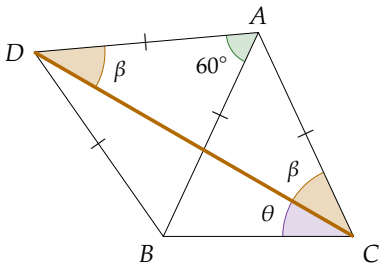
1. $\triangle ABD = \triangle BCE$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = BC$, $BD = CE$, $\angle ABD = \angle BCE = 60°$), todėl $\angle BAD = \angle CBE$; pažymėkime juos α.
2. Pažymėkime $\angle ABP = \beta$. Tada $\beta = 60° - \alpha$ (lygiakraštis trikampis).
3. $\angle APB = 180° - \alpha - \beta = 180° - \alpha - (60° - \alpha) = 120°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. α susiprastino – todėl atsakymas nepriklauso nuo taško D padėties.

13 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

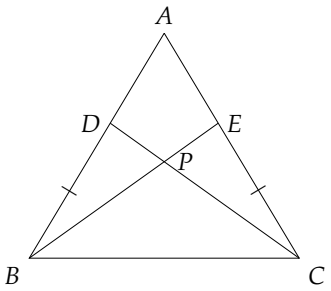
Ką matau. $AD = AB = AC$ – trys lygios atkarpos su bendru galu A.

Idėja (T1). pažymėkime $\angle ACD = \beta$, $\angle BCD = \theta$; sudedame trikampio BCD kampus.

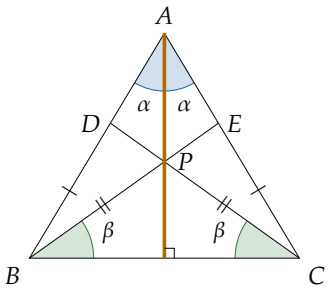
1. $AD = AB = AC$ (lygiakraštis trikampis), todėl $\angle ADC = \angle ACD = \beta$ (kampai prie pagrindo).
2. $\angle ABC = \angle ACB = \beta + \theta$ (kampai prie pagrindo, $AB = AC$).
3. Trikampyje BCD: $\angle BDC = 60° - \beta$, $\angle DBC = 60° + \beta + \theta$; $(60° - \beta) + (60° + \beta + \theta) + \theta = 180°$ (trikampio kampų suma), $\theta = 30°$.

Pamoka. lygiašonis trikampis gali slėptis tarp atkarpų, kurios „atrodo nesusijusios“ – svarbu, kad jos lygios ir turi bendrą galą. Kampas β susiprastino – todėl atsakymas nepriklauso nuo $\angle BAC$.

14 uždavinys.



sąlyga



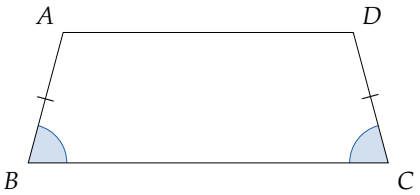
sprendimas

Ką matau. lygios atkarpos BD ir CE prie lygiašonio trikampio pagrindo galų.

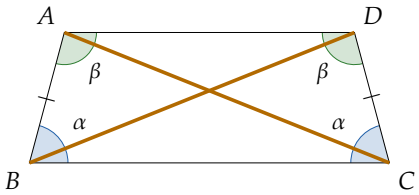
Idėja (T3). du kartus lygūs trikampiai: pirmiausia BCD ir CBE, paskui ABP ir ACP.

1. $\angle DBC = \angle ECB$ (kampai prie pagrindo).
2. $\triangle BCD = \triangle CBE$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: BC bendra, $BD = CE$), todėl $\angle PCB = \angle PBC$ (pažymėkime juos β) ir $PB = PC$ (lygiašonio požymis).
3. $\triangle ABP = \triangle ACP$ (trys kraštinės: $AB = AC$, $PB = PC$, AP bendra), todėl $\angle BAP = \angle CAP$; pažymėkime juos α.
4. AP – lygiašonio trikampio ABC pusiaukampinė, todėl $AP \perp BC$ (lygiašonio pusiaukampinė).

15 uždavinys.



sąlyga



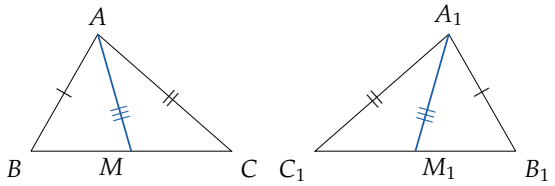
sprendimas

Ką matau. lygios kraštinės ir lygūs kampai, bet trikampių nėra.

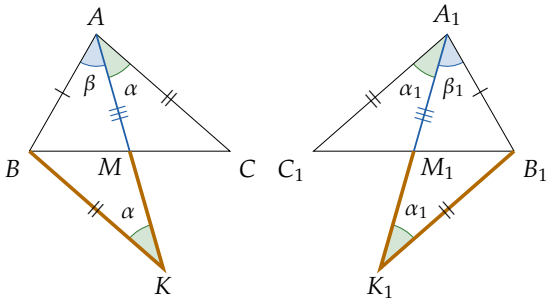
Idėja (T3). įstrižainės sukuria dvi poras trikampių; lygiagretumą duoda kampų suma.

1. $\triangle ABC = \triangle DCB$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = DC$, BC bendra, $\angle ABC = \angle DCB$), todėl $AC = DB$; pažymėkime $\angle ABC = \alpha$.
2. $\triangle BAD = \triangle CDA$ (trys kraštinės: $AB = DC$, $BD = CA$, AD bendra), todėl $\angle BAD = \angle CDA$; pažymėkime juos β.
3. $2\alpha + 2\beta = 360°$ (keturkampio kampų suma), $\alpha + \beta = 180°$.
4. Kampai α ir β – vidaus vienašaliai (kirstinė AB), jų suma 180°, todėl $AD \parallel BC$ (lygiagretumo požymis).

16 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

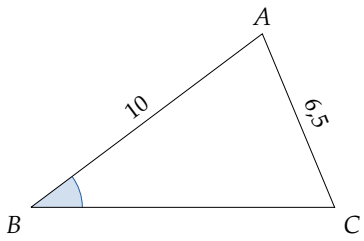
Ką matau. trys atkarpos nesudaro trikampio; viena iš jų – pusiaukraštinė.

Idėja (T4). pusiaukraštinę pratęsiame tiek pat ($MK = AM$, $M_1K_1 = A_1M_1$) – atsiranda trikampis ABK iš trijų žinomų atkarpų.

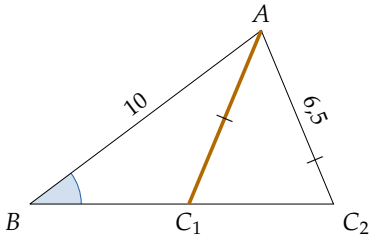
1. $\triangle AMC = \triangle KMB$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AM = KM$, $CM = BM$, kryžminiai kampai), todėl $BK = AC$ ir $\angle BKA = \angle CAM$; pažymėkime juos α. Taip pat $B_1K_1 = A_1C_1$ ir $\angle B_1K_1A_1 = \angle C_1A_1M_1$; pažymėkime juos α_1.
2. $\triangle ABK = \triangle A_1B_1K_1$ (trys kraštinės: $AB = A_1B_1$, $BK = AC = A_1C_1 = B_1K_1$, $AK = 2AM = 2A_1M_1 = A_1K_1$), todėl $\angle BAK = \angle B_1A_1K_1$; pažymėkime juos β ir β_1, tada $\beta = \beta_1$ ir $\alpha = \alpha_1$.
3. $\angle BAC = \alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = \angle B_1A_1C_1$.
4. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$).

Pamoka. pratęsta pusiaukraštinė perkelia kraštinę AC į BK – trys žinomos atkarpos sudaro trikampį.

17 uždavinys.



sąlyga

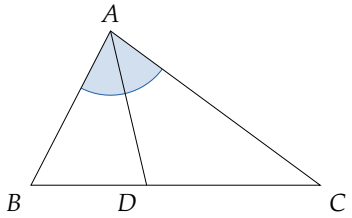


sprendimas

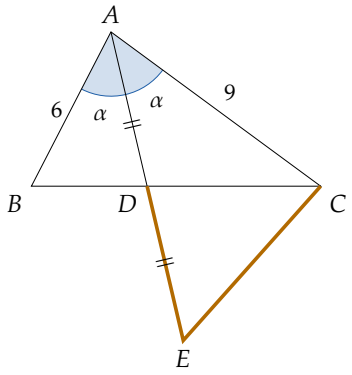
1. Kampą B sudaro kraštinės BA ir BC, o duotos AB ir AC: kampas ne tarp jų, todėl 4) žingsnis (dvi kraštinės ir kampas tarp jų) netinka.
2. Kontrpavyzdys: lygiašonis trikampis AC_1C_2, $AC_1 = AC_2 = 6{,}5$; pagrindo C_1C_2 tęsinyje už C_1 pažymime tašką B, kad $AB = 10$.
3. Trikampiuose ABC_1 ir ABC_2: AB bendra, $AC_1 = AC_2$, $\angle B$ bendras, bet $BC_1 \neq BC_2$ (BC_1 – tik atkarpos BC_2 dalis), todėl trikampiai nelygūs. Teiginys klaidingas.

Pamoka. dvi kraštinės ir kampas ne tarp jų – ne požymis: tokių trikampių gali būti du.

18 uždavinys.



sąlyga



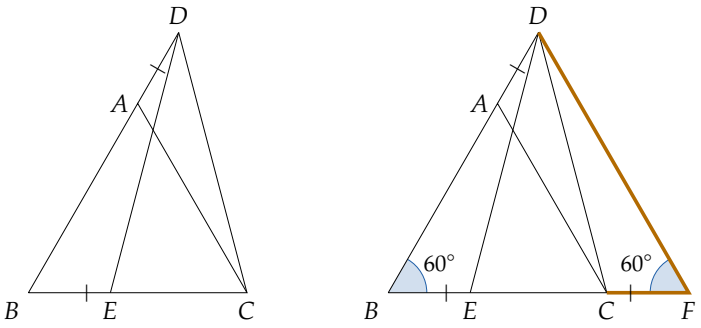
sprendimas

1. Mokinio 1) žingsnis remiasi brėžiniu, ne sąlyga: lygybės $AB = AC$ sąlygoje nėra.
2. Tegu $AB \neq AC$, bet $BD = CD$. Pratęsiame AD už D iki E, $DE = AD$. $\triangle ABD = \triangle ECD$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $BD = CD$, $AD = ED$, kryžminiai kampai), todėl $CE = AB$ ir $\angle CED = \angle BAD$; pažymėkime juos α.
3. $\angle CAE = \angle CEA = \alpha$, todėl $AC = CE = AB$ (lygiašonio požymis) – prieštara. Taigi kai $AB \neq AC$, $BD \neq CD$: teiginys klaidingas.
4. Pataisa: pridėjus sąlygą $AB = AC$, 2)–3) žingsniai teisingi.

Pamoka. brėžinys – ne įrodymas: lygybė turi būti sąlygoje arba įrodyta. Brėžinyje $AB = 6$, $AC = 9$ – matyti, kad $BD \neq CD$.

Kitas būdas (konkretus kontrpavyzdys). Trikampyje $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 90°$, AD – pusiaukampinė. $\angle BAD = 30° = \angle B$, todėl $AD = BD$ (lygiašonio požymis). Jei būtų $BD = CD$, tai $AD = CD$ ir $\angle DAC = \angle C$ (kampai prie pagrindo), bet $30° \neq 90°$.

19 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

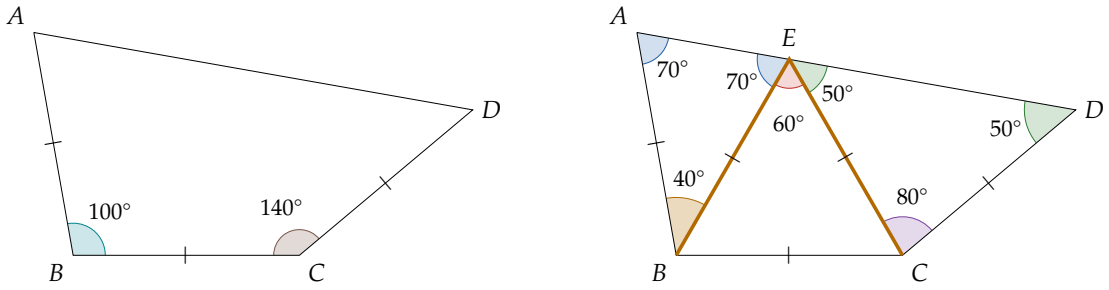
Ką matau. atkarpa $BD = BA + AD$ – suma, o prie B kampas 60°.

Idėja (T5). atidedame $BF = BD$ spindulyje BC: atsiranda lygiakraštis trikampis BDF.

1. Pratęsiame BC už C iki F, $BF = BD$. $\triangle BDF$ lygiakraštis (lygiašonis su 60° kampu): $DF = DB$, $\angle DFB = 60°$.
2. $CF = BF - BC = BD - BA = AD = BE$.
3. $\triangle DBE = \triangle DFC$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $DB = DF$, $BE = FC$, $\angle DBE = \angle DFC = 60°$), todėl $DE = DC$.

Pamoka. atkarpų suma $BA + AD$ – signalas atidėti lygią atkarpą ir „užbaigti“ lygiakraštį trikampį.

20 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

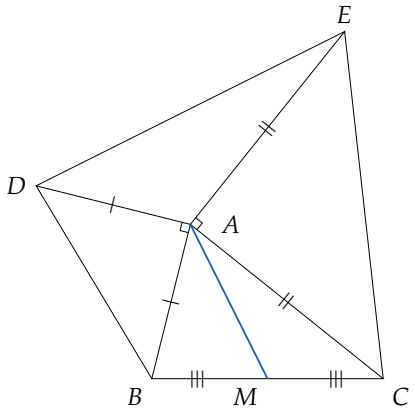
Ką matau. trys lygios atkarpos; $100° - 60°$ ir $140° - 60°$ – lygiašonių trikampių viršūnių kampai.

Idėja. papildomas lygiakraštis trikampis BCE – atsiranda dar dvi lygios atkarpos $BE = CE = BC$.

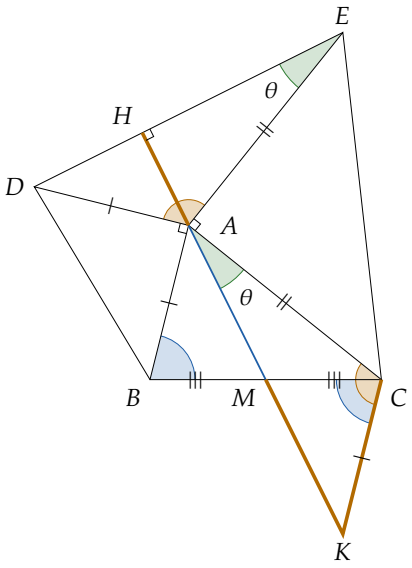
1. Lygiakraštis $\triangle BCE$ (E toje pačioje BC pusėje kaip A): $BE = CE = BC$, $\angle EBC = \angle ECB = 60°$.
2. $\triangle ABE$: $AB = BE$, $\angle ABE = 100° - 60° = 40°$, todėl $\angle BAE = \angle BEA = 70°$ (kampai prie pagrindo, trikampio kampų suma).
3. $\triangle DCE$: $CD = CE$, $\angle ECD = 140° - 60° = 80°$, todėl $\angle CED = \angle CDE = 50°$ (kampai prie pagrindo, trikampio kampų suma).
4. $\angle AEB + \angle BEC + \angle CED = 70° + 60° + 50° = 180°$, todėl A, E, D – vienoje tiesėje, E – atkarpoje AD.
5. $\angle BAD = \angle BAE = 70°$, $\angle ADC = \angle EDC = 50°$. (Patikra: $100° + 140° + 70° + 50° = 360°$.)

Pamoka. „negražius“ kampus prie lygių kraštinių dažnai išgelbsti atidėtas lygiakraštis trikampis.

21 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

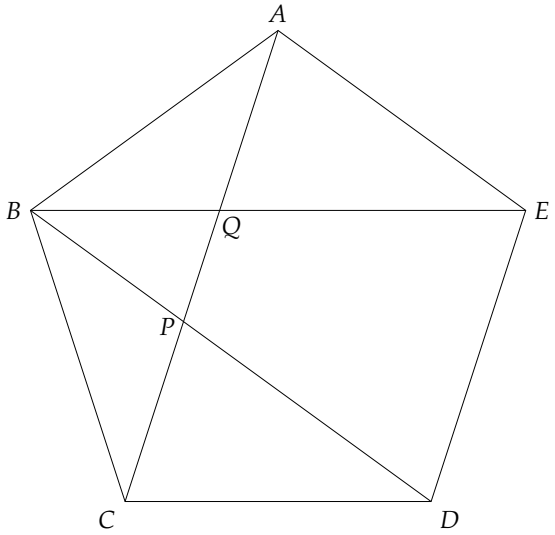
Ką matau. pusiaukraštinė ir „pusė atkarpos“; prie A – du statūs kampai.

Idėja (T4). pratęsiame AM už M tiek pat: $MK = AM$; tada lygūs trikampiai ACK ir EAD. Pažymėkime $\alpha = \angle BAC$, $\theta = \angle CAK$; dydžio $180^\circ - \alpha$ kampai brėžinyje – be raidės.

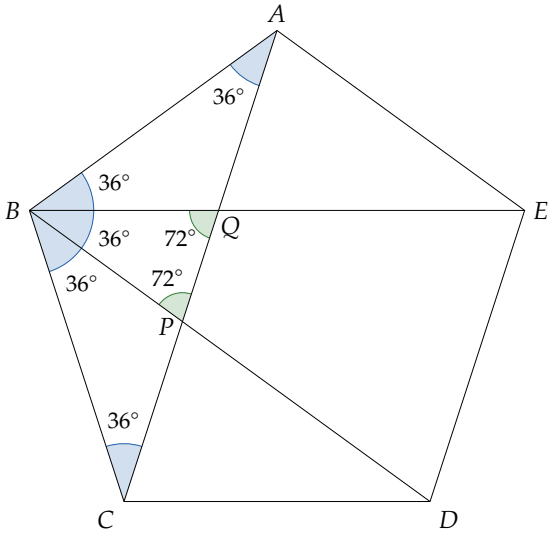
1. $\triangle ABM = \triangle KCM$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $BM = CM$, $AM = KM$, kryžminiai kampai), todėl $CK = AB = AD$ ir $\angle MCK = \angle B$.
2. $\angle ACK = \angle C + \angle B = 180^\circ - \alpha$ (trikampio ABC kampų suma); $\angle DAE = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$ (kampai aplink tašką).
3. a) $\triangle ACK = \triangle EAD$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AC = EA$, $CK = AD$, $\angle ACK = \angle EAD$), todėl $DE = AK = 2AM$ ir $\angle AED = \angle CAK = \theta$.
4. b) Pratęskime KA už A; ji kerta DE taške H. $\angle EAK = 90^\circ + \theta$, todėl $\angle EAH = 90^\circ - \theta$ (gretutiniai kampai).
5. $\triangle AHE$: $\angle AHE = 180^\circ - (90^\circ - \theta) - \theta = 90^\circ$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. Teiginys teisingas ir bukam kampui A (tada brėžinys kitoks).

22 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. daug lygiašonių trikampių su kampais 36° ir 72°.

Idėja (T1). visus kampus išreiškiame skaičiais, lygias atkarpas gauname iš lygiašonio požymio.

1. Penkiakampio kampas $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$ (n-kampio kampų suma).
2. $\triangle ABC$: $AB = BC$, todėl $\angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ (kampai prie pagrindo, trikampio kampų suma). Taip pat $\angle ABE = 36^\circ$ ($\triangle ABE$) ir $\angle CBD = 36^\circ$ ($\triangle BCD$); brėžinyje prie B – trys kampai po 36°.
3. $\triangle ABP$: $\angle ABP = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, $\angle APB = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ (trikampio kampų suma), todėl $AP = AB$ (lygiašonio požymis).
4. $\triangle QBC$: $\angle QBC = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, $\angle BQC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ (trikampio kampų suma), todėl $CQ = CB = AB$ (lygiašonio požymis).
5. Taškai išsidėstę tvarka A, Q, P, C, todėl $AC = AQ + QC = AQ + AB$; $AB = AP = AQ + QP$.

Pamoka. iš to dar $PC = AC - AP = AC - AB = AQ$ – visų smaigalių šoninės lygios.