Geometrija

Lapas 2c. Lygių trikampių metodas III: vidurio linija ir trapecija

9 klasė

Apšilimas (5 min.)

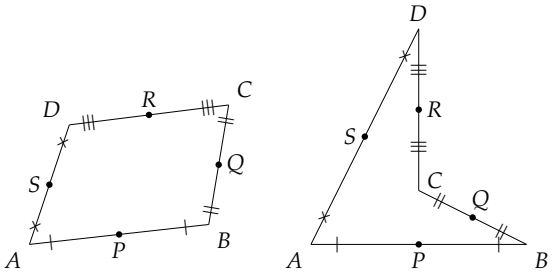
Pratimai 1. Prisiminkite 1–02b lapus (atsakymai – lapo gale).

a) Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinės AB ir CD lygiagrečios ir lygios, $\angle A = 70°$. Įrodykite, kad $AD \parallel BC$, ir raskite kampus B, C, D.

b) M – trikampio ABC kraštinės BC vidurys. Atkarpos AM tęsinyje už M pažymėtas taškas D, $MD = AM$; $AB = 9$, $\angle BAC = 100°$. Kuris keturkampis – lygiagretainis? Raskite CD ir $\angle ABD$.

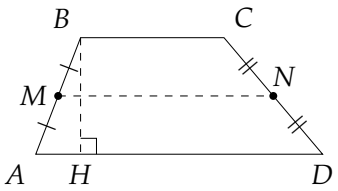
c) Trikampyje ABC $AB = AC$. Kampas tarp kraštinės BA tęsinio už A ir kraštinės AC lygus 110°. Raskite trikampio ABC kampus.

Vidurių keturkampis. Nubrėžkite bet kokį keturkampį (pabandykite ir neiškilą!) ir sujunkite gretimų kraštinių vidurius. Ką gavote? O kada gausite rombą? Stačiakampį?
Atsakymas – 1 pavyzdyje.



1. Nuo ko pradedame

Žodynas. **Trapecija** – keturkampis, kurio *tik viena* pora priešingų kraštinių lygiagreti ($AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$). Lygiagrečios kraštinės – **pagrindai**, kitos dvi – **šoninės kraštinės**. **Lygiašonė** trapecija – šoninės kraštinės lygios; **stačioji** – viena šoninė kraštinė statmena pagrindams. **Trapecijos vidurio linija** – atkarpa MN, jungianti šoninių kraštinių vidurius; **aukštinė** – statmuo BH iš vieno pagrindo taško į kito pagrindo tiesę. **Trikampio vidurio linija** – atkarpa, jungianti dviejų kraštinių vidurius.



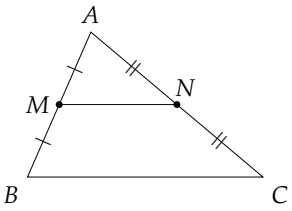
Iš 1–02b lapų. Per tašką, nesantį tiesėje, eina tik viena tiesė, lygiagreti tai tiesei (aksioma; toliau – „per tašką – viena lygiagreti tiesė“). Lygiagretainio savybės: priešingos kraštinės lygios, priešingi kampai lygūs, įstrižainės dalija viena kitą pusiau. Iškilasis keturkampis – lygiagretainis, jei (a) priešingos kraštinės poromis lygios; (b) viena pora lygi ir lygiagreti; (c) įstrižainės dalija viena kitą pusiau; (d) priešingi kampai poromis lygūs. T6: pusiaukraštinę pratęsk tiek pat – gausi lygiagretainį. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs, ir atvirkščiai.

Metodas. Visi šio lapo faktai išplaukia iš lygiagretainio: papildoma atkarpa ar lygiagreti tiesė užbaigia lygiagretainį (T6), o jo savybės (per lygius trikampius) duoda vidurio linijos ir trapecijos savybes.

2. Vidurio linija ir trapecija

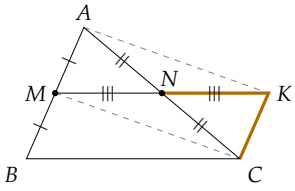
Įrankis 14 (trikampio vidurio linija)

Trikampio vidurio linija lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei: jei M ir N – kraštinių AB ir AC viduriai, tai $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}BC$.



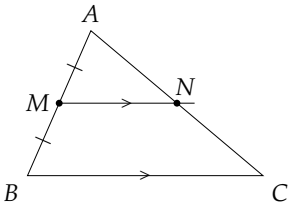
Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. Atkarpą MN pratęsiame už N tiek pat: $NK = MN$ (T6: pratęsiame tiek pat). $AMCK$ – lygiagretainis (požymis: įstrižainės AC ir MK dalija viena kitą pusiau), todėl $CK = AM = MB$ ir $CK \parallel AB$ (lygiagretainio savybė).
2. $CK = MB$ ir $CK \parallel MB$, todėl $MBCK$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti).
3. $MK \parallel BC$, $MK = BC$ (lygiagretainio savybė), todėl $MN \parallel BC$ ir $MN = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2}BC$.



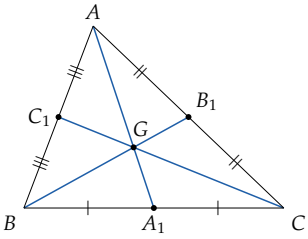
■

Išvada (atvirkštinė). Tiesė, einanti per trikampio ABC kraštinės AB vidurį M lygiagrečiai BC, kerta kraštinę AC jos viduryje.
Kodėl. Tegu N' – kraštinės AC vidurys. $MN' \parallel BC$ (trikampio vidurio linija). Per tašką – viena lygiagreti tiesė, todėl duotoji tiesė ir yra MN': ji kerta AC taške N', t. y. viduryje.



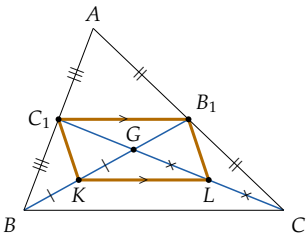
Įrankis 15 (pusiaukraštinių susikirtimas)

Trys trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1, BB_1, CC_1 kertasi viename taške G, kuris dalija kiekvieną pusiaukraštinę santykiu $2:1$, skaičiuojant nuo viršūnės: $AG = 2GA_1$, $BG = 2GB_1$, $CG = 2GC_1$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. Pusiaukraštinės BB_1 ir CC_1 kertasi taške G; K ir L – atkarpų BG ir CG viduriai.
2. $C_1B_1 \parallel BC$, $C_1B_1 = \frac{1}{2}BC$ (vidurio linija $\triangle ABC$); $KL \parallel BC$, $KL = \frac{1}{2}BC$ (vidurio linija $\triangle GBC$). Todėl C_1B_1LK – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti).
3. Jo įstrižainės C_1L ir B_1K guli tiesėse CC_1 ir BB_1, todėl kertasi taške G ir dalija viena kitą pusiau (lygiagretainio savybė): $KG = GB_1$, $C_1G = GL$.

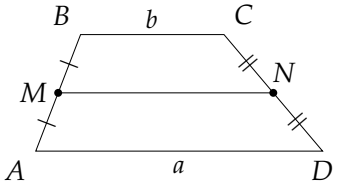


■

Užbaikite patys (Pratimai 4 a, b): kodėl $BG = 2GB_1$ ir kodėl trečioji pusiaukraštinė AA_1 eina per tą patį tašką G.

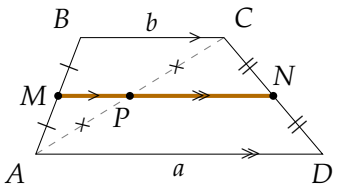
Įrankis 16 (trapecijos vidurio linija)

Trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD = a$, $BC = b$) vidurio linija MN lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei: $MN \parallel AD$, $MN = \frac{a+b}{2}$.



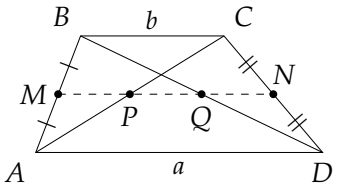
Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. P – įstrižainės AC vidurys. $MP \parallel BC$, $MP = \frac{b}{2}$ (vidurio linija $\triangle ABC$); $PN \parallel AD$, $PN = \frac{a}{2}$ (vidurio linija $\triangle ACD$).
2. $BC \parallel AD$, todėl ir $MP \parallel AD$. Per P eina tik viena tiesė, lygiagreti AD (per tašką – viena lygiagreti tiesė), todėl M, P, N – vienoje tiesėje: $MN \parallel AD$, $MN = MP + PN = \frac{a+b}{2}$.



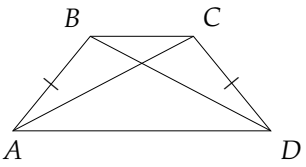
■

Išvada (įstrižainių viduriai). Trapecijos $ABCD$ ($AD = a > BC = b$) įstrižainių viduriai P ir Q yra vidurio linijoje MN, ir $PQ = \frac{a-b}{2}$. Įrodykite patys (Pratimai 3 c; padės ką tik pateiktas įrodymas).



Įrankis 17 (lygiašonė trapecija)

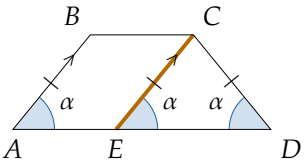
Lygiašonės trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB = CD$) kampai prie pagrindo lygūs: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$; įstrižainės lygios: $AC = BD$.
Požymiai. Trapecija yra lygiašonė, jei (a) jos kampai prie pagrindo lygūs arba (b) jos įstrižainės lygios.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

Kampai. Tegu AD – ilgesnysis pagrindas. Per C nubrėžiame $CE \parallel AB$, $E \in AD$.

1. $ABCE$ – lygiagretainis (apibrėžimas), todėl $CE = AB = CD$ (lygiagretainio savybė); $\angle CED = \angle A = \alpha$ (atitinkamieji kampai, $CE \parallel AB$).
2. $\triangle ECD$ lygiašonis, todėl $\angle D = \angle CED = \alpha$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo). $\angle B = \angle C = 180° - \alpha$ (vidaus vienašaliai kampai).

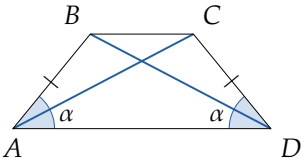


Požymis (a). Atvirkščiai: jei $\angle A = \angle D = \alpha$, tai $\angle CED = \alpha = \angle D$, todėl $CD = CE = AB$ (lygiašonio trikampio požymis).

■

Įrodymas.

Įstrižainės. $\triangle ABD = \triangle DCA$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = DC$, AD bendra, $\angle BAD = \angle CDA = \alpha$), todėl $BD = CA$.

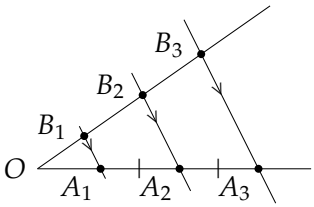


■

Požymį (b) įrodykite patys (Pratimai 4 c).

Dėmesio. sąlyga „$AD \parallel BC$, $AB = CD$“ dar nereiškia lygiašonės trapecijos: tokį keturkampį gali sudaryti ir lygiagretainis. Todėl požymiuose sakome „trapecija“ (tik viena pora lygiagrečių kraštinių).

Išvada (lygių atkarpų teorema). Jei lygiagrečios tiesės vienoje kampo kraštinėje atkerta lygias atkarpas ($A_1A_2 = A_2A_3$), tai ir kitoje kraštinėje jos atkerta lygias atkarpas ($B_1B_2 = B_2B_3$). Įrodykite patys (Pratimai 3 f); ten pat – kaip skriestuvu ir liniuote padalyti atkarpą į n lygių dalių.



Dar viena išvada – bet kurio keturkampio kraštinių vidurių keturkampis (Varinjono teorema) – 1 pavyzdyje.

3. Ar teisingas atvirkščias teiginys?

Pratimai 2. Ar teisinga? Jei ne – nurodykite kontrpavyzdį; jei taip – pagrįskite (atsakymai – lapo gale).

a) Lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo lygūs. Atvirkščiai: jei trapecijos kampai prie pagrindo lygūs, tai ji lygiašonė.
Užuomina: per C – tiesė, lygiagreti AB, iki ilgesniojo pagrindo AD.

b) Lygiašonės trapecijos įstrižainės lygios. Ar teisinga: „Jei keturkampio $ABCD$ įstrižainės lygios ir $AD \parallel BC$, tai $ABCD$ – lygiašonė trapecija“?
Užuomina: kuris keturkampis su lygiomis įstrižainėmis turi *dvi* poras lygiagrečių kraštinių?

c) Vidurio linija lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei. Ar teisinga: „Jei M – trikampio ABC kraštinės AB taškas, N – kraštinės AC taškas, $MN \parallel BC$ ir $MN = \frac{1}{2}BC$, tai MN – vidurio linija“?
Užuomina: D – kraštinės BC vidurys. Koks keturkampis $MNDB$?

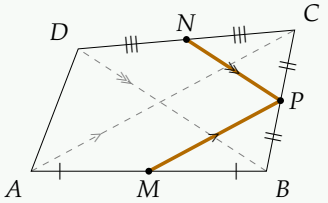
d) Ar teisinga: „Jei M – trikampio ABC kraštinės AB vidurys, $N \in AC$ ir $MN = \frac{1}{2}BC$, tai N – kraštinės AC vidurys“?
Užuomina: trikampis su $AB = 6$, $AC = 4$, $\angle A = 60°$; ant AC atidėkite $AN = 1$ ir palyginkite MN su vidurio linija.

e) Raskite klaidą. Mokinys „įrodė“: „Lygiašonės trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB = CD$) įstrižainės lygios. 1) Trikampiuose ABD ir DCA $AB = DC$. 2) AD – bendra. 3) Todėl $\triangle ABD = \triangle DCA$ ir $BD = CA$.“ Ar teiginys teisingas?
Užuomina: kiek elementų reikia trikampių lygumo požymiui?

4. Technikos

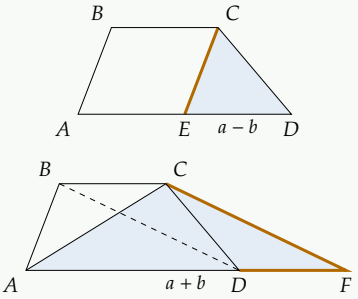
Technika T8. Du viduriai → vidurio linija

Signalas: uždavinyje du ar daugiau vidurių (arba vidurys ir lygiagreti tiesė, arba „pusė“, „dvigubai“).
Veiksmas: rask trikampį, kuriame tie taškai – dviejų kraštinių, einančių iš vienos viršūnės, viduriai, ir imk vidurio liniją (lygiagreti trečiajai kraštinei, lygi jos pusei). Tokio trikampio nėra – nubrėžk įstrižainę arba pridėk trečią vidurį (P brėžinyje): gausi dvi vidurio linijas. Vienas vidurys ir lygiagreti tiesė – atvirkštinė išvada: antrasis taškas irgi vidurys.



Technika T9. Perkelk lygiagrečiai

Signalas: trapecija ($AD = a > BC = b$), kurioje šoninės kraštinės ar įstrižainės „atskirtos“ nuo pagrindų: duotos šoninės kraštinės ar kampai prie pagrindų, arba įstrižainės kartu su pagrindais.
Veiksmas: (T6 (ii) trapecijoje) šoninės ar kampai – per viršūnę C nubrėžk $CE \parallel AB$: $ABCE$ – lygiagretainis, o trikampyje ECD yra abi šoninės kraštinės, pagrindų skirtumas $a - b$ ir abu kampai prie pagrindo. Įstrižainės – per C nubrėžk $CF \parallel BD$: $BCFD$ – lygiagretainis, o trikampyje ACF yra abi įstrižainės ir pagrindų suma $a + b$.

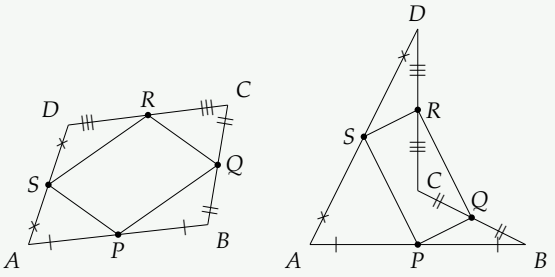


5. Pavyzdžiai

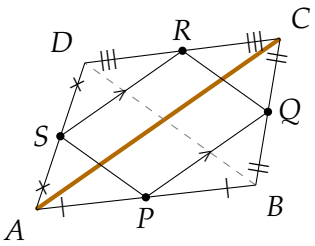
Pavyzdys 1 (vidurių keturkampis)

$ABCD$ – bet koks keturkampis (iškilasis ar neiškilasis), P, Q, R, S – kraštinių AB, BC, CD, DA viduriai.

a) Įrodykite, kad $PQRS$ – lygiagretainis.
b) Kada jis rombas? Kada stačiakampis?



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Juodraštis

Ką turiu? Keturis vidurius (T8). **Ko noriu?** PQ ir SR – lygios ir lygiagrečios.
PQ jungia du vidurius – bet kurio trikampio? Trikampio nėra.
Nubrėžiu įstrižainę AC: trikampiuose ABC ir ADC – po vidurio liniją, abi lygiagrečios AC.
Įstrižainė – „tiltas“ tarp dviejų vidurių porų.

Švarraštis.

a) $PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{1}{2}AC$ (vidurio linija $\triangle ABC$); $SR \parallel AC$, $SR = \frac{1}{2}AC$ (vidurio linija $\triangle ADC$). $PQ \parallel SR$, $PQ = SR$, todėl $PQRS$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti). Taip pat $QR \parallel BD$, $QR = \frac{1}{2}BD$.
b) Jei $AC = BD$, tai $PQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = QR$, todėl $PQRS$ – rombas (rombo požymis: lygios gretimos kraštinės).
Jei $AC \perp BD$, tai $PQ \perp QR$ ($PQ \parallel AC$, $QR \parallel BD$), todėl $PQRS$ – stačiakampis (stačiakampio požymis: status kampas).

Pamoka. du viduriai, bet trikampio nėra? Nubrėžk įstrižainę – ji sujungia dvi vidurio linijas.

Pastaba smalsiems (galima praleisti). Neiškilajame keturkampyje įrodymas tas pats: PQ ir SR abi lygiagrečios AC ir nukreiptos ta pačia kryptimi, todėl požymis tinka.

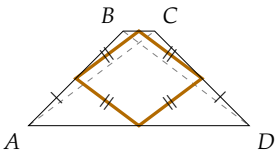
Ar teisingas atvirkščias teiginys? (1 pavyzdžio tęsinys; jei ne – kontrpavyzdys, jei taip – pagrindimas.)

c) Stačiakampio įstrižainės lygios, todėl jo vidurių keturkampis – rombas (b dalis). Ar teisinga: „Jei vidurių keturkampis – rombas, tai pradinis keturkampis – stačiakampis“?
Užuomina: koks keturkampis, ne stačiakampis, turi lygias įstrižaines?

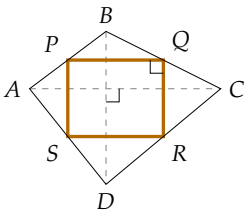
d) Jei keturkampio įstrižainės statmenos, jo vidurių keturkampis – stačiakampis (b dalis). Ar teisinga: „Jei vidurių keturkampis – stačiakampis, tai pradinio keturkampio įstrižainės statmenos“?
Užuomina: kam lygiagrečios gretimos vidurių keturkampio kraštinės?

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

c) Ne. Lygiašonė trapecija $ABCD$: $AC = BD$ (lygiašonės trapecijos įstrižainės), todėl visos vidurių keturkampio kraštinės lygios $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$ (trikampio vidurio linija) – jis rombas, o $ABCD$ – ne stačiakampis. O štai „jei vidurių keturkampis – rombas, tai įstrižainės lygios“ – teisinga: $AC = 2PQ = 2QR = BD$.



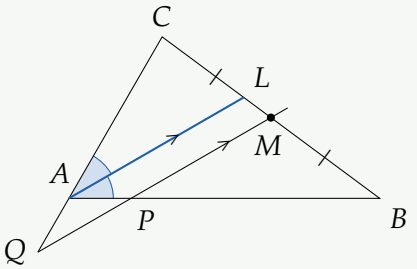
d) Taip. Tegu P, Q, R, S – kraštinių AB, BC, CD, DA viduriai. $PQ \parallel AC$, $QR \parallel BD$ (trikampio vidurio linija) ir $PQ \perp QR$. Tiesė, statmena vienai iš lygiagrečių tiesių, statmena ir kitai: $QR \perp PQ$ ir $PQ \parallel AC$, todėl $QR \perp AC$; $AC \perp QR$ ir $QR \parallel BD$, todėl $AC \perp BD$.



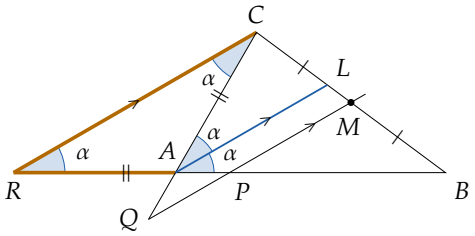
Pavyzdys 2 (vidurys ir lygiagreti tiesė)

Grįžtame *2 lapo 24 uždavinys*

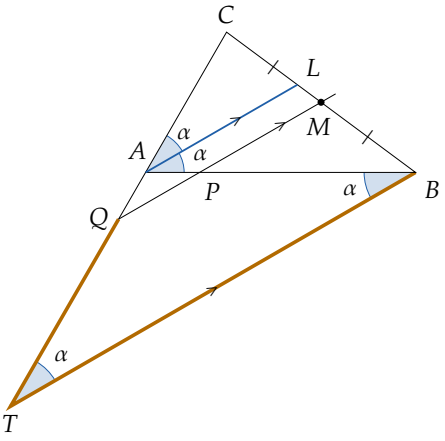
Trikampyje ABC $AB > AC$, AL – pusiaukampinė, M – kraštinės BC vidurys. Tiesė, einanti per M lygiagrečiai AL, kerta kraštinę AB taške P, o tiesę AC – taške Q. Įrodykite, kad $BP = CQ = \frac{AB+AC}{2}$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



BP



CQ

Juodraštis (mąstome nuo galo)

Ko noriu? $BP = \frac{AB+AC}{2}$ – pusė sumos.
← Sumą gaunu, jei AC padedu į AB tęsinį: $BR = AB + AC$. Tada reikia, kad P būtų BR vidurys.
← M – BC vidurys ir $MP \parallel AL$. Jei $RC \parallel AL$, tai P – vidurys (atvirkštinė išvada, T8). Ar $RC \parallel AL$? $\triangle ARC$ lygiašonis...

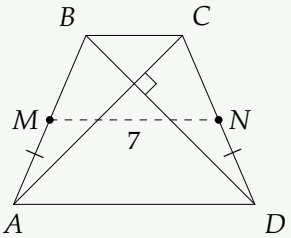
Švarraštis. Pažymėkime $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$.

1. R – kraštinės BA tęsinyje už A, $AR = AC$. $\angle ARC = \angle ACR = \alpha$ (lygiašonis trikampis; priekampis $2\alpha = \angle ARC + \angle ACR$).
2. $\angle BRC = \alpha = \angle BAL$, todėl $RC \parallel AL \parallel MP$ (lygiagretumo požymis: atitinkamieji kampai).
3. $\triangle BRC$: M – BC vidurys, $MP \parallel RC$, todėl P – BR vidurys (atvirkštinė išvada): $BP = \frac{1}{2}BR = \frac{AB+AC}{2}$.
4. Taip pat su T kraštinės CA tęsinyje už A, $AT = AB$: $BT \parallel AL \parallel MQ$, todėl Q – CT vidurys ir $CQ = \frac{AC+AB}{2}$.

Pamoka. reikia sumos pusės? Sudėk atkarpas į vieną tiesę ir ieškok vidurio linijos. Palyginimas su 2 lapo sprendimu – 7-ajame skyriuje.

Pavyzdys 3 (perkelk įstrižainę)

Lygiašonės trapecijos įstrižainės statmenos, vidurio linija lygi 7 cm. Raskite trapecijos aukštinę.

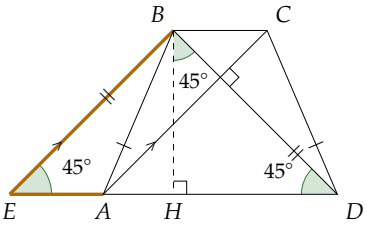


Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. duotos įstrižainių savybės ir pagrindų suma (vidurio linija) – jos „atskirtos“.

Idėja (T9). per B – tiesė, lygiagreti AC, iki tiesės AD.

Sprendimas.



1. $BE \parallel AC$, E – tiesėje DA už A. $EBCA$ – lygiagretainis (apibrėžimas), todėl $EA = BC$, $BE = AC = BD$ (lygiagretainio savybė; lygiašonės trapecijos įstrižainės). $ED = AD + BC = 2 \cdot 7 = 14$ (trapecijos vidurio linija).
2. $\angle EBD = 90°$ ($BE \parallel AC \perp BD$), todėl $\triangle EBD$ – statusis lygiašonis, $\angle E = \angle D = 45°$.
3. Aukštinė BH – ir pusiaukraštinė (lygiašonio trikampio aukštinė), todėl $HD = 7$. $\angle HBD = 90° - 45° = 45° = \angle D$, todėl $BH = HD = 7$ cm (lygiašonio trikampio požymis).

Pamoka. įstrižainės ir pagrindų suma – perkelk įstrižainę: atsiranda trikampis su kraštine $a + b$.

6. Pratimai

Pratimai 3. Apskaičiuokite arba įrodykite (atsakymai ir sprendimai – lapo gale).

a) Trikampio ABC kraštinės $AB = 14$, $BC = 18$, $CA = 22$; D, E, F – kraštinių AB, BC, CA viduriai. 1) Raskite trikampio DEF kraštines ir perimetrą. 2) Kito trikampio vidurių trikampio perimetras 15. Koks to trikampio perimetras?

b) Trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$) šoninių kraštinių AB ir CD viduriai – M ir N. 1) $AD = 15$, $BC = 7$. Raskite MN. 2) $MN = 12$, pagrindų santykis $3 : 5$. Raskite pagrindus. 3) $AD = 15$, $BC = 9$; įstrižainė BD kerta MN taške P. Raskite MP ir PN.
Užuomina: 3) $MN \parallel AD$: kas yra taškas P atkarpoje BD (atvirkštinė išvada)? Tada – vidurio linijos $\triangle ABD$ ir $\triangle BCD$.

c) Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = a > BC = b$; M, N – šoninių kraštinių AB, CD viduriai; P, Q – įstrižainių AC, BD viduriai. 1) Įrodykite, kad P ir Q yra atkarpoje MN ir $PQ = \frac{a-b}{2}$. 2) Pagrindai 17 ir 9. Raskite PQ. 3) Ilgesnysis pagrindas 14, $PQ = 3$. Raskite trumpesnįjį.
Užuomina: 1) dalis – kaip 16 įrankio įrodyme, tik su abiem įstrižainėmis: kurios atkarpos – vidurio linijos trikampiuose ABC ir ABD?

d) Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 10$, $BC = 4$, šoninės kraštinės $AB = CD = 6$. Raskite trapecijos kampus ir vidurio liniją.
Užuomina: T9: $CE \parallel AB$, $E \in AD$.

e) Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1, BB_1, CC_1 kertasi taške G. 1) $AA_1 = 9$. Raskite AG ir GA_1. 2) $BG = 8$. Raskite BB_1. 3) $GC_1 = 5$. Raskite CC_1. 4) Kokią pusiaukraštinių ilgių sumos dalį sudaro $AG + BG + CG$?

f) Lygių atkarpų teorema ir atkarpos dalijimas. 1) Kampo su viršūne O vienoje kraštinėje paeiliui pažymėti taškai A_1, A_2, A_3 (ne viršūnėje O), $A_1A_2 = A_2A_3$. Per juos nubrėžtos lygiagrečios tiesės kerta kitą kraštinę taškuose B_1, B_2, B_3. Įrodykite, kad $B_1B_2 = B_2B_3$. 2) Skriestuvu ir liniuote padalykite atkarpą AB į 3 lygias dalis. 3) Padalykite 7 cm atkarpą į 5 lygias dalis. Koks dalies ilgis?
Užuomina: 1) dalis: koks keturkampis $A_1A_3B_3B_1$? Kas jame A_2B_2? 2) dalis: pagalbinis spindulys iš A su trimis lygiomis atkarpomis.

Pratimai 4. Įrodykite (teiginiai, kurių teorijoje neįrodėme iki galo; sprendimai – lapo gale).

a) Užbaikite 15 įrankio įrodymą: įrodykite, kad $BG = 2GB_1$.
Užuomina: kokios atkarpos lygios: BK, KG, GB_1?

b) Užbaikite 15 įrankio įrodymą: įrodykite, kad trečioji pusiaukraštinė AA_1 eina per tą patį tašką G.
Užuomina: pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1 kertasi taške G'. Kokiu santykiu G' dalija BB_1?

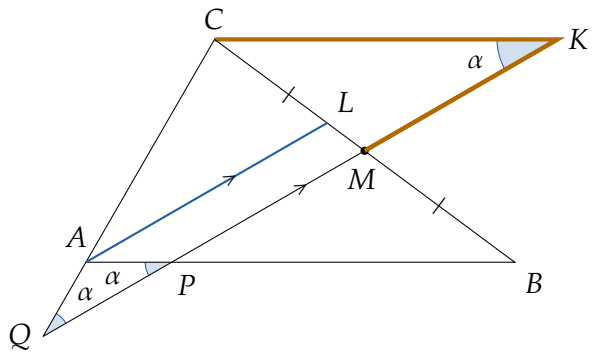
c) Jei trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$) įstrižainės lygios, tai ji lygiašonė (požymis (b)).
Užuomina: 1) T9: perkelkite įstrižainę. 2) Per B – tiesė, lygiagreti AC; ji kerta tiesę DA už A taške E. Koks trikampis EBD?

7. Grįžtame

Kai kuriuos ankstesnių lapų uždavinius vidurio linija išsprendžia trumpiau: lygius trikampius ir lygiagretainius, kuriuos tada ieškojome, dabar pakeičia vienas vidurio linijos faktas. Palyginkite sprendimus; paskui išspręskite patys.

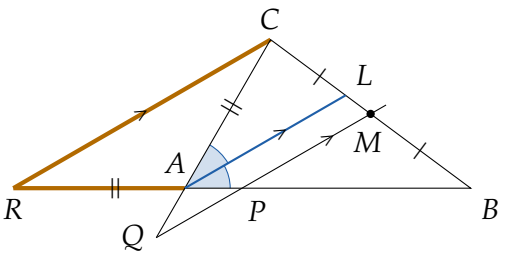
Grįžtame *2 lapo 24 uždavinys (2 pavyzdys)*

Anksčiau (2 lapas, T2).



1. Pažymėkime $\angle APQ = \angle AQP = \alpha$. Tada $AP = AQ$ (lygiašonis: kampai prie P ir Q lygūs).
2. $CK \parallel AB$: $\triangle BMP = \triangle CMK$ (kraštinė ir du kampai), todėl $BP = CK$.
3. $CK = CQ$ (lygiašonis), todėl $BP = CQ$.
4. $BP + CQ = (AB - AP) + (AC + AQ) = AB + AC$.

Dabar (vidurio linija).



1. $AR = AC$: $RC \parallel AL \parallel MP$ (lygiašonis, priekampis).
2. P – BR vidurys (atvirkštinė išvada): $BP = \frac{AB+AC}{2}$.
3. CQ – tas pats su T, $AT = AB$.

Pamoka. 2 lape $BP = CQ$ ir sumą gavome atskirai (keturi žingsniai ir „gudri“ suma); dabar BP ir CQ randame kiekvieną atskirai ta pačia idėja.

Pratimai 5. Išspręskite patys naujais įrankiais (nurodytas lapas ir uždavinio numeris; sprendimai – lapo gale).

a) *(02b lapas, 17 uždavinys.)* Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas taškas D, kraštinėje AC – taškas E (ne viršūnės), $BD = CE$. M ir N – atkarpų BC ir DE viduriai. Įrodykite, kad tiesė MN sudaro lygius kampus su tiesėmis AB ir AC.
Užuomina: 1) du viduriai M ir N, bet ne viename trikampyje (T8). 2) K – atkarpos BE vidurys.

b) *(2 lapas, 20 uždavinys.)* Trikampyje ABC $AB = AC$. Kraštinėje AB pažymėtas taškas D, o kraštinės AC tęsinyje už C – taškas E, kad $BD = CE$. Atkarpa DE kerta BC taške F. Įrodykite, kad $DF = FE$.
Užuomina: 1) Reikia, kad F būtų vidurys: gal jį duos atvirkštinė išvada (T8: vidurys ir lygiagreti tiesė)? Kurio trikampio kraštinės vidurys galėtų būti C? 2) Atkarpoje CA atidėkite $CK = CE$. Kas yra C

atkarpoje KE? Ar $DK \parallel BC$?

Uždaviniai

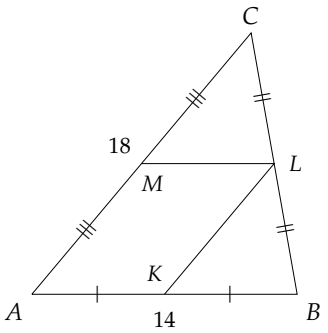
Jei brėžinio nėra, nusibraižykite patys.

I. Įgūdžiai

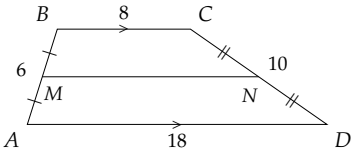
1. Trikampio ABC kraštinių AB, BC ir AC viduriai – taškai K, L ir M.

a) Įrodykite, kad $AKLM$ – lygiagretainis.

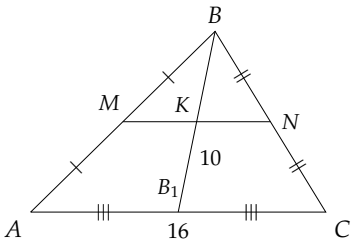
b) $AB = 14$, $AC = 18$. Raskite lygiagretainio $AKLM$ perimetrą.



2. Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 18$ ir $BC = 8$, šoninės kraštinės $AB = 6$ ir $CD = 10$. Taškai M ir N – šoninių kraštinių AB ir CD viduriai. Raskite trapecijų $MBCN$ ir $AMND$ perimetrus.



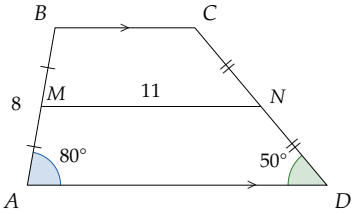
3. BB_1 – trikampio ABC pusiaukraštinė, M ir N – kraštinių AB ir BC viduriai. Atkarpa MN kerta BB_1 taške K. Raskite MN, BK, MK ir KN, jei $AC = 16$, $BB_1 = 10$.



II. Tilteliai

Šiuose uždaviniuose du žingsniai: atpažinkite arba nubrėžkite vidurio liniją, lygiagretainį ar pusiaukraštines, tada pasinaudokite jų savybe.

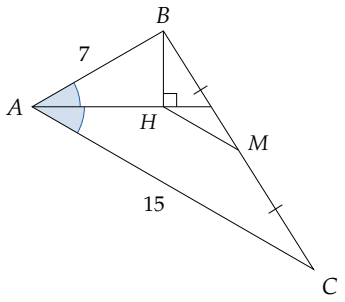
4. Trapecijos $ABCD$ pagrindai AD ir BC, $AD > BC$, $\angle A = 80°$, $\angle D = 50°$, šoninė kraštinė $AB = 8$, o vidurio linija lygi 11. Raskite trapecijos pagrindus.



5. Trikampyje ABC $AB < AC$. Iš viršūnės B į kampo A pusiaukampinę nuleistas statmuo BH (H – pusiaukampinės taškas), M – kraštinės BC vidurys.

a) Įrodykite, kad $HM \parallel AC$.

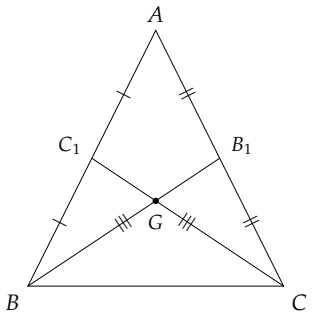
b) Raskite HM, jei $AB = 7$, $AC = 15$.



6. Trikampio ABC pusiaukraštinės BB_1 ir CC_1 lygios ir kertasi taške G.

a) Įrodykite, kad $AB = AC$.

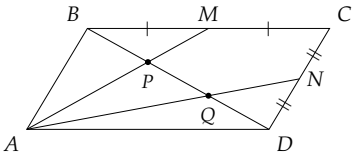
b) Įrodykite, kad tiesė AG statmena kraštinei BC.



7. $ABCD$ – lygiagretainis, M ir N – kraštinių BC ir CD viduriai. Atkarpos AM ir AN kerta įstrižainę BD taškuose P ir Q.

a) Įrodykite, kad $BP = PQ = QD$.

b) Įrodykite, kad tiesė CP kerta kraštinę AB jos viduryje.



III. Technikos

8. AA_1, BB_1, CC_1 – trikampio ABC pusiaukraštinės. Atkarpa C_1B_1 pratęsta už taško B_1 iki taško K taip, kad $B_1K = C_1B_1$. Įrodykite, kad $AK = CC_1$ ir $A_1K = BB_1$. (Taigi iš bet kurio trikampio pusiaukraštinių galima sudaryti trikampį – tai trikampis AA_1K.)

9. AM – trikampio ABC pusiaukraštinė, P – atkarpos AM vidurys. Tiesė BP kerta kraštinę AC taške K.

a) Įrodykite, kad $AK = \frac{1}{3}AC$.

b) Įrodykite, kad $BP = 3PK$.

10. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės $AC = BD = 10$ kertasi taške O, $\angle AOB = 120°$. M ir N – kraštinių AB ir CD viduriai. Raskite MN.

11. Trapecijoje $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AD = 9$, $BC = 5$. Kampo BAD pusiaukampinė eina per šoninės kraštinės CD vidurį M.

a) Raskite AB.

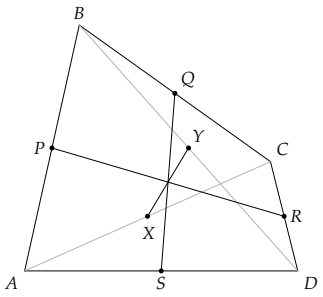
b) Įrodykite, kad BM – kampo ABC pusiaukampinė, ir raskite $\angle AMB$.

12. Lygiašonėje trapecijoje $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB = CD$) įstrižainė AC lygi pagrindų sumai, $\angle ABC = 110°$.

a) Raskite kampą tarp įstrižainių.

b) Raskite $\angle ACD$ ir $\angle BAC$.

13. Iškilojo keturkampio $ABCD$ jokios dvi kraštinės nelygiagrečios. P, Q, R, S – kraštinių AB, BC, CD, DA viduriai, X ir Y – įstrižainių AC ir BD viduriai. Įrodykite, kad atkarpos PR, QS ir XY kertasi viename taške ir šis taškas – kiekvienos jų vidurys.



IV. Sunkesni

14. Trikampio ABC pusiaukraštinės BB_1 ir CC_1 kertasi taške G, ir $AG = BC$. Įrodykite, kad $BB_1 \perp CC_1$.

15. Trapecijoje $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AD = 2BC$. Šoninių kraštinių AB ir DC tęsiniai kertasi taške Z, įstrižainės – taške O; E ir F – pagrindų AD ir BC viduriai.

a) Įrodykite, kad B ir C – atkarpų ZA ir ZD viduriai.
b) Įrodykite, kad taškai Z, F, O, E yra vienoje tiesėje ir $BO : OD = 1 : 2$.

Papildomi uždaviniai (norintiems)

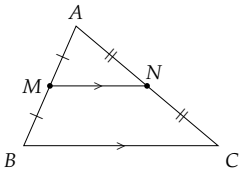
16. Trikampyje ABC ($AC > AB$) M ir N – kraštinių AB ir BC viduriai. Kampo BAC pusiaukampinė kerta atkarpą MN taške K.

a) Įrodykite, kad $\angle AKB = 90^\circ$.
b) $AB = 8$, $AC = 14$. Raskite KN.

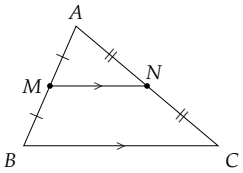
Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

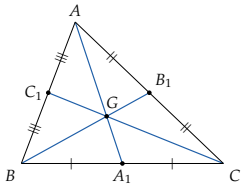
Įrankis 14 *(trikampio vidurio linija)* trikampio vidurio linija lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei



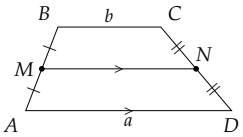
Išvada *(atvirkštinė)* tiesė per kraštinės vidurį, lygiagreti antrajai kraštinei, kerta trečiąją jos viduryje



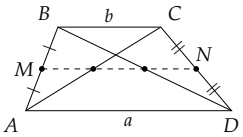
Įrankis 15 *(pusiaukraštinių susikirtimas)* trys pusiaukraštinės kertasi viename taške G; $AG : GA_1 = BG : GB_1 = CG : GC_1 = 2 : 1$



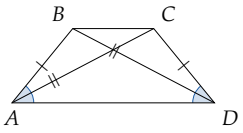
Įrankis 16 *(trapecijos vidurio linija)* trapecijos vidurio linija lygiagreti pagrindams ir lygi $\frac{a+b}{2}$



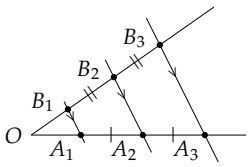
Išvada *(įstrižainių viduriai)* trapecijos ($AD = a > BC = b$) įstrižainių viduriai P, Q – vidurio linijoje, $PQ = \frac{a-b}{2}$



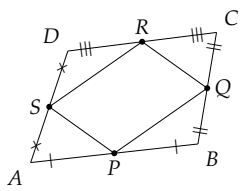
Įrankis 17 *(lygiašonė trapecija)* lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo lygūs, įstrižainės lygios; trapecija su lygiais kampais prie pagrindo arba lygiomis įstrižainėmis – lygiašonė



Išvada *(lygių atkarpų teorema)* lygiagrečios tiesės, vienoje kampo kraštinėje atkertančios lygias atkarpas, ir kitoje atkerta lygias; taip atkarpa dalijama į n lygių dalių



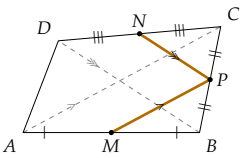
Išvada *(Varinjonas)* bet kurio keturkampio kraštinių vidurių keturkampis – lygiagretainis, jo kraštinės lygiagrečios įstrižainėms ir lygios jų pusėms; rombas $\Leftrightarrow$ įstrižainės lygios, stačiakampis $\Leftrightarrow$ statmenos



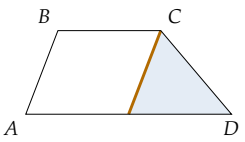
Technikų santrauka

Signalas → veiksmas. Šios technikos padeda rasti sprendimą.

T8 *(Du viduriai → vidurio linija)* du viduriai (vidurys ir lygiagreti) → vidurio linija; trikampio nėra – įstrižainė arba trečias vidurys.



T9 *(Perkelk lygiagrečiai)* trapecija, šoninės / įstrižainės atskirtos nuo pagrindų → per viršūnę lygiagrečiai šoninei (trikampis su $a - b$) ar įstrižainei (trikampis su $a + b$).



Pratimų atsakymai

Pratimai 1. a) $ABCD$ – lygiagretainis (viena pora lygi ir lygiagreti); $\angle B = \angle D = 110°$, $\angle C = 70°$; b) $ABDC$; $CD = 9$, $\angle ABD = 80°$; c) $\angle A = 70°$, $\angle B = \angle C = 55°$

Pratimai 3. a) 1) $DE = 11$, $EF = 7$, $FD = 9$, perimetras 27; 2) 30; b) 1) 11; 2) 9 ir 15; 3) $MP = 7{,}5$, $PN = 4{,}5$; c) 2) 4; 3) 8; d) 60°, 60°, 120°, 120°; vidurio linija 7; e) 1) 6 ir 3; 2) 12; 3) 15; 4) $\frac{2}{3}$; f) 3) 1,4 cm

Uždavinių atsakymai

1. a) įrodymas; b) 32.
2. 29 ir 39.
3. $MN = 8$, $BK = 5$, $MK = KN = 4$.
4. $BC = 7$, $AD = 15$.
5. a) įrodymas – lapo gale; b) $HM = 4$.
6. a), b) įrodymai – lapo gale.
7. a), b) įrodymai – lapo gale.
8. Įrodymas – lapo gale.
9. a), b) įrodymai – lapo gale.
10. $MN = 5$.
11. a) $AB = 14$; b) $\angle AMB = 90°$ (įrodymas – lapo gale).
12. a) 60°; b) $\angle ACD = 50°$, $\angle BAC = 10°$.
13. Įrodymas – lapo gale.
14. Įrodymas – lapo gale.
15. a), b) įrodymai – lapo gale.
16. a) įrodymas – lapo gale; b) $KN = 3$.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) Atkarpos KL ir LM jungia dviejų kraštinių vidurius. 2) Kurioms kraštinėms jos lygiagrečios ir kam lygios?

2. 1) Kas yra atkarpa MN? Kam ji lygi? 2) Kam lygios šoninių kraštinių pusės?

3. 1) Kam lygiagreti MN? 2) Trikampyje ABB_1 taškas M – kraštinės vidurys, o $MK \parallel AB_1$.

4. 1) Duoti abu kampai prie pagrindo ir šoninė kraštinė – kokia technika (T9)? Kas atsitinka, perkėlus šoninę kraštinę lygiagrečiai? 2) Per C nubrėžkite $CE \parallel AB$ ($E \in AD$): koks keturkampis $ABCE$, kokie trikampio ECD kampai? Kam lygi ED?

5. 1) M – vidurys; antrojo vidurio trūksta (T8). Pusiaukampinė ir jai statmena tiesė – koks trikampis čia „slepiasi“? 2) Pratęskite BH iki kraštinės AC (taškas K). Palyginkite trikampius ABH ir AKH. Kuri atkarpa yra trikampio BKC vidurio linija?

6. 1) Kokią pusiaukraštinės dalį sudaro GB, o kokią – GB_1? 2) Palyginkite trikampius GBC_1 ir GCB_1. b) dalyje: per kurį kraštinės BC tašką eina tiesė AG?

7. 1) AM ir AN eina iš viršūnės į kraštinių vidurius – kaip pusiaukraštinės. Kokių trikampių? 2) Nubrėžkite įstrižainę AC: kurios atkarpos yra trikampių ABC ir ACD pusiaukraštinės? Trikampio ABC pusiaukraštinės kertasi taške P, trikampio ACD – taške Q: taikykite santykį $2:1$ ir trečiosios pusiaukraštinės savybę.

8. 1) B_1 – ir AC, ir C_1K vidurys; C_1B_1 – vidurio linija. 2) Kokie keturkampiai AC_1CK ir BA_1KB_1?

9. 1) Trikampyje BKC yra tik vienas vidurys M – trūksta antrojo (T8). 2) N – atkarpos KC vidurys; paskui – trikampis AMN.

10. 1) Du viduriai – ne viename trikampyje, o duotos įstrižainės (T8). 2) P – kraštinės BC vidurys: kam lygiagrečios ir lygios MP ir PN?

11. 1) Šoninės kraštinės vidurys M – trūksta antrojo (T8); pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė – lygiašonis trikampis. 2) N – kraštinės AB vidurys. Palyginkite NA, NM ir NB.

12. 1) Įstrižainė ir pagrindų suma – „atskirtos“ (T9). 2) Per C nubrėžkite tiesę, lygiagrečią BD; ji kerta tiesę AD taške E (už D). Koks trikampis ACE?

13. 1) Iš šešių vidurių sudarykite lygiagretainius; ieškokite bendros įstrižainės (T8, T7). 2) Keturkampiai $PQRS$ ir $PXRY$ turi bendrą įstrižainę PR: įrodykite, kad abu – lygiagretainiai.

14. 1) AG – trečiosios pusiaukraštinės dalis; kokia? 2) A_1 – BC vidurys: palyginkite GA_1 su BA_1 ir A_1C.

15. 1) $BC \parallel AD$ ir $BC = \frac{1}{2}AD$ – prisiminkite atvirkščią teiginį apie vidurio liniją (Pratimai 2 c) teiginys, 3 skyrius). 2) b) Kas yra AC ir DB trikampyje ZAD? O BC?

16. 1) $MN \parallel AC$ ir pusiaukampinė – lygiašonis trikampis. 2) Palyginkite MA, MK ir MB.

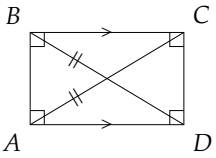
Pratimų ir sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

Pratimai 2 a)

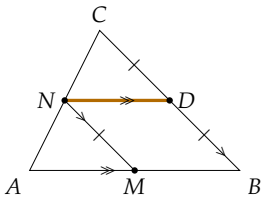
Taip. Tai lygiašonės trapecijos požymis (a), įrodytas 2-ajame skyriuje: $CE \parallel AB$, $ABCE$ – lygiagretainis, $\angle CED = \angle A = \angle D$, todėl $CD = CE = AB$ (lygiašonio trikampio požymis).

Pratimai 2 b)



Ne visada. Stačiakampis $ABCD$: $AD \parallel BC$, $AC = BD$ (stačiakampio įstrižainės), bet ir $AB \parallel CD$ – tai ne trapecija. Jei $ABCD$ tikrai trapecija ($AB \nparallel CD$) – taip (lygiašonės trapecijos požymis (b); jį įrodysite Pratimuose 4 c).

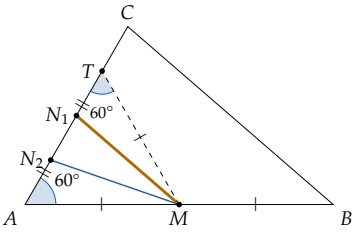
Pratimai 2 c)



Taip. Tegu D – kraštinės BC vidurys.

1. $MN \parallel BD$ ir $MN = BD$, todėl $MNDB$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti), ir $DN \parallel AB$.
2. D – BC vidurys, $DN \parallel AB$, todėl N – AC vidurys (atvirkštinė vidurio linijos išvada); N – vidurys, $NM \parallel BC$, todėl ir M – AB vidurys (ta pati išvada).

Pratimai 2 d)



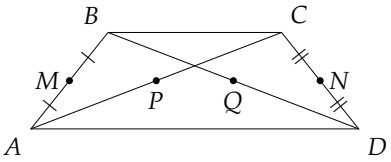
Ne. Kontrpavyzdys: $AB = 6$, $AC = 4$, $\angle A = 60°$; N_1 – AC vidurys ($AN_1 = 2$), $MN_1 = \frac{1}{2}BC$ (vidurio linija).

1. $T \in AC$, $AT = 3 = AM$: $\triangle AMT$ lygiašonis su $60°$ kampu, todėl lygiakraštis: $MT = AM$, $\angle MTA = 60°$.
2. $N_2 \in AC$, $AN_2 = 1 = TN_1$. $\triangle AMN_2 = \triangle TMN_1$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $MN_2 = MN_1 = \frac{1}{2}BC$, bet N_2 – ne vidurys.

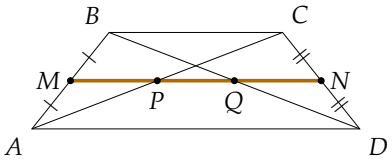
Pratimai 2 e)

Teiginys teisingas, įrodymas – ne: dviejų lygių kraštinių nepakanka, lygumo požymiui trūksta trečio elemento. Trūksta lygybės $\angle BAD = \angle CDA$ (lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo); ją pridėjus, $\triangle ABD = \triangle DCA$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $BD = CA$.

Pratimai 3 c)



sąlyga

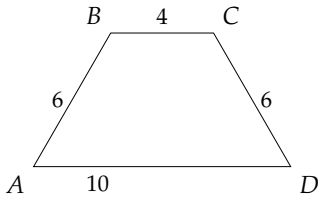


sprendimas

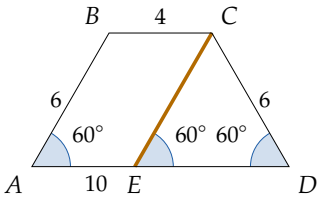
1) 16 įrankio įrodyme parodėme: P yra atkarpoje MN, $MP = \frac{b}{2}$ (vidurio linija $\triangle ABC$). Tas pats su įstrižaine BD: Q yra atkarpoje MN, $MQ = \frac{a}{2}$ (vidurio linija $\triangle ABD$), $QN = \frac{b}{2}$ (vidurio linija $\triangle BCD$).
$MP = \frac{b}{2} < \frac{a}{2} = MQ$, todėl P yra tarp M ir Q: $PQ = MQ - MP = \frac{a-b}{2}$.

2) $\frac{17-9}{2} = 4$. 3) $14 - 2 \cdot 3 = 8$.

Pratimai 3 d)



sąlyga

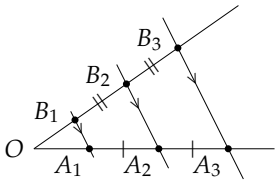


sprendimas

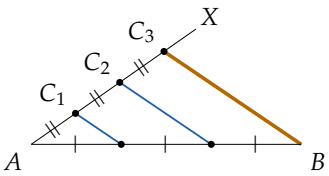
Brėžiame $CE \parallel AB$, $E \in AD$.

1. $ABCE$ – lygiagretainis (apibrėžimas), todėl $CE = AB = 6$, $AE = BC = 4$, $ED = 6$: $\triangle ECD$ lygiakraštis, $\angle D = 60° = \angle CED = \angle A$ (atitinkamieji kampai).
2. $\angle B = \angle C = 180° - 60° = 120°$ (vidaus vienašaliai kampai); vidurio linija $\frac{10+4}{2} = 7$.

Pratimai 3 f)



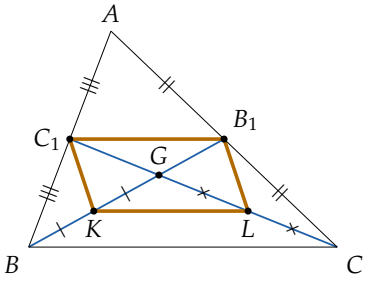
1)



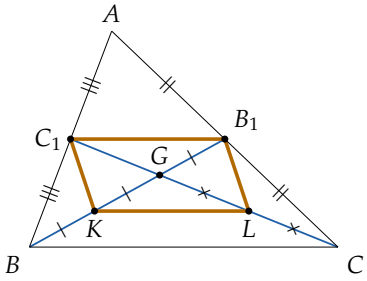
2)

1) $A_1A_3B_3B_1$ – trapecija ($A_1B_1 \parallel A_3B_3$), A_2 – šoninės kraštinės A_1A_3 vidurys. Jos vidurio linija per A_2 lygiagreti pagrindams (trapecijos vidurio linija); per tašką – viena lygiagreti tiesė, todėl tai A_2B_2, ir B_2 – B_1B_3 vidurys.
2) Spindulyje AX atidedame $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$, sujungiame C_3 su B, per C_1 ir C_2 brėžiame tieses, lygiagrečias C_3B (kaip 02b lape); jos kerta AB taškuose D_1 ir D_2. Jos dalija AB į 3 lygias dalis: pirmoji ir antroji dalys lygios pagal atvirkštinę vidurio linijos išvadą ($\triangle AC_2D_2$), antroji ir trečioji – pagal 1).
3) Tas pats su 5 atkarpomis: $7 : 5 = 1{,}4$ cm.

Pratimai 4 a)



sąlyga



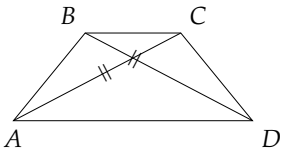
sprendimas

$BK = KG$ (K – BG vidurys), $KG = GB_1$ (lygiagretainio C_1B_1LK įstrižainės dalija viena kitą pusiau), todėl $BK = KG = GB_1$ ir $BG = 2GB_1$.

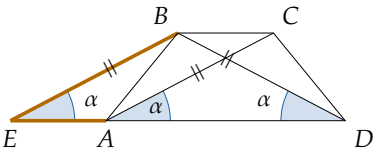
Pratimai 4 b)

Pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1 kertasi taške G'. Tuo pačiu įrodymu (tik su pusiaukraštinėmis AA_1 ir BB_1) $BG' = 2G'B_1$, t. y. G' dalija BB_1 taip pat kaip G. Todėl $G' = G$: visos trys pusiaukraštinės eina per G.

Pratimai 4 c)



sąlyga

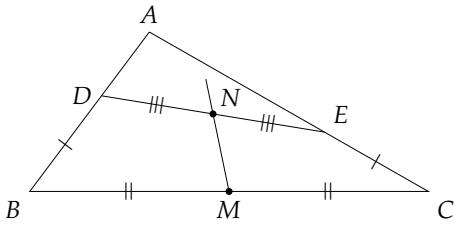


sprendimas

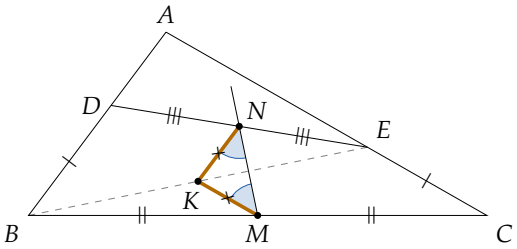
Brėžiame $BE \parallel AC$, E – tiesėje DA už A.

1. $EBCA$ – lygiagretainis (apibrėžimas), todėl $BE = AC = BD$ (lygiagretainio savybė).
2. Pažymėkime $\angle BDE = \alpha$. Tada $\angle BED = \alpha$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo); $\angle CAD = \angle BED$ (atitinkamieji kampai, $BE \parallel AC$). Taigi $\angle CAD = \angle BDA = \alpha$.
3. $\triangle ACD = \triangle DBA$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AC = DB$, AD bendra, $\angle CAD = \angle BDA$), todėl $CD = BA$.

Pratimai 5 a)



sąlyga



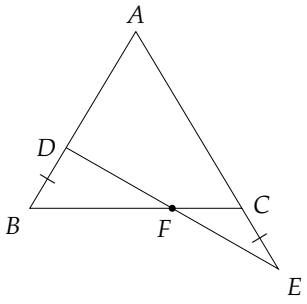
sprendimas

Tegu K – atkarpos BE vidurys.

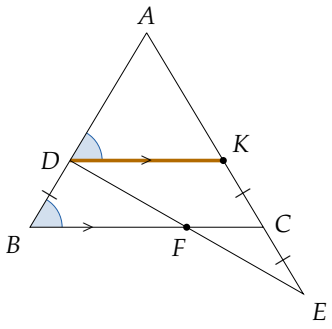
1. $KM \parallel CE$, $KM = \frac{1}{2}CE$ (vidurio linija $\triangle BEC$); $KN \parallel BD$, $KN = \frac{1}{2}BD$ (vidurio linija $\triangle EBD$).
2. $BD = CE$, todėl $KM = KN$ ir $\angle KMN = \angle KNM$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo).
3. $KM \parallel AC$, $KN \parallel AB$, todėl tiesė MN sudaro su AC kampą $\angle KMN$, o su AB – kampą $\angle KNM$ (lygiagrečių tiesių kampai): jie lygūs.

02b lape prireikė dviejų papildomų taškų X, Y ir trijų lygiagretainių; dabar – vieno taško K ir dviejų vidurio linijų (sąlygos $AB \neq AC$ nebereikia).

Pratimai 5 b)



sąlyga



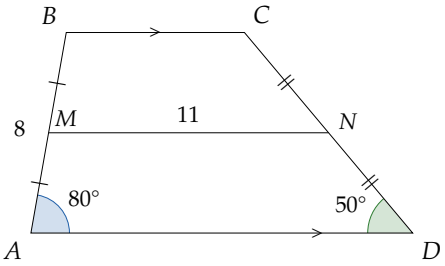
sprendimas

Atkarpoje CA atidedame $CK = CE$ ($CE = BD < AB = AC$, todėl K – tarp A ir C).

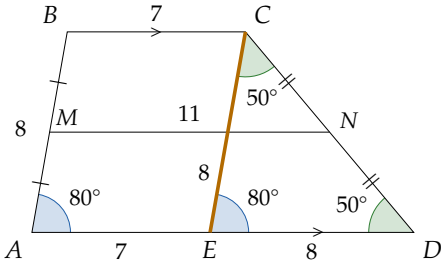
1. $AD = AB - BD = AC - CK = AK$, todėl $\triangle ADK$ ir $\triangle ABC$ – lygiašoniai su tuo pačiu kampu A: $\angle ADK = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \angle ABC$, todėl $DK \parallel BC$ (lygiagretumo požymis: atitinkamieji kampai).
2. $\triangle EKD$: C – kraštinės KE vidurys, $CF \parallel KD$, todėl F – kraštinės DE vidurys (atvirkštinė vidurio linijos išvada): $DF = FE$.

2 lape reikėjo lygių trikampių DGF ir ECF (dvi kampų poros); dabar – vienas lygiašonis trikampis ir atvirkštinė išvada.

4 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

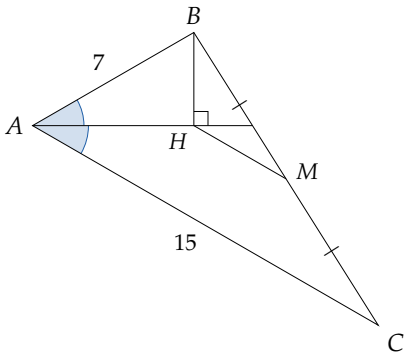
Ką matau. trapecijoje duoti abu kampai prie pagrindo AD ir šoninė kraštinė.

Idėja (T9). šoninę AB perkeliame lygiagrečiai į CE: trapecija skyla į lygiagretainį ir trikampį.

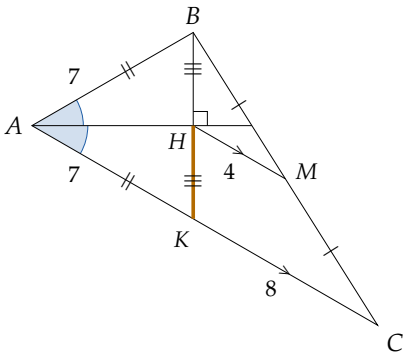
1. Brėžiame $CE \parallel AB$, $E \in AD$. $ABCE$ – lygiagretainis (apibrėžimas): $AE = BC$, $CE = AB = 8$ (lygiagretainio savybė).
2. $\angle CED = \angle A = 80^\circ$ (atitinkamieji kampai), todėl $\angle ECD = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ = \angle D$ (trikampio kampų suma) ir $ED = CE = 8$ (lygiašonio trikampio požymis).
3. $AD - BC = AD - AE = ED = 8$, o $AD + BC = 2 \cdot 11 = 22$ (trapecijos vidurio linija). Taigi $AD = 15$, $BC = 7$.

Pamoka. duoti kampai prie pagrindo ir šoninė – signalas perkelti šoninę lygiagrečiai (T9): atsiranda trikampis su kraštine $AD - BC$.

5 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

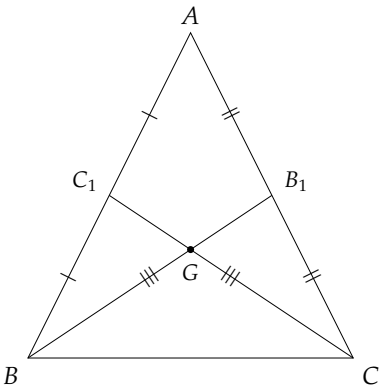
Ką matau. pusiaukampinė ir į ją nuleistas statmuo; M – kraštinės vidurys.

Idėja (T8). pratęsę BH gauname lygiašonį trikampį ABK ir antrą vidurį H; tada HM – vidurio linija.

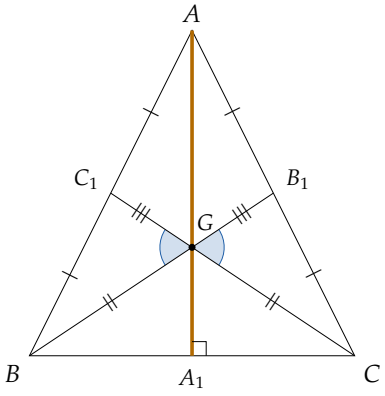
1. a) Pratęsiame BH iki kraštinės AC, taško K. $\triangle ABH = \triangle AKH$ (kraštinė ir du kampai: AH bendra, $\angle BAH = \angle KAH$ – pusiaukampinė, $\angle AHB = \angle AHK = 90°$), todėl $AK = AB$ ir $BH = HK$.
2. H ir M – trikampio BKC kraštinių BK ir BC viduriai, todėl $HM \parallel KC$, t. y. $HM \parallel AC$ (trikampio vidurio linija).
3. b) $AK = AB = 7$, $KC = 15 - 7 = 8$, $HM = KC : 2 = 4$ (trikampio vidurio linija).

Pamoka. pusiaukampinė ir jai statmena tiesė – lygiašonis trikampis; jo pagrindo vidurys dažnai yra „trūkstamas“ antras vidurys vidurio linijai (T8).

6 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

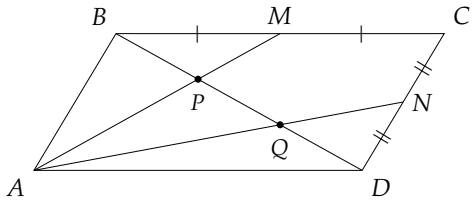
Ką matau. dvi lygios pusiaukraštinės ir jų susikirtimo taškas.

Idėja. santykis 2 : 1 lygias pusiaukraštines dalija į lygias dalis – gauname lygius trikampius.

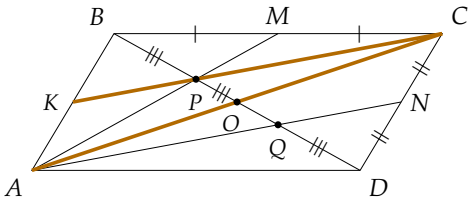
1. a) $GB = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}CC_1 = GC$ ir $GB_1 = GC_1$ (pusiaukraštinių susikirtimas); $\angle BGC_1 = \angle CGB_1$ (kryžminiai kampai).
2. $\triangle GBC_1 = \triangle GCB_1$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $BC_1 = CB_1$ ir $AB = 2BC_1 = 2CB_1 = AC$.
3. b) Trečioji pusiaukraštinė eina per G (pusiaukraštinių susikirtimas), todėl tiesė AG eina per kraštinės BC vidurį A_1. AA_1 – lygiašonio trikampio pusiaukraštinė į pagrindą, todėl ir aukštinė: $AG \perp BC$ (lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė iš viršūnės – ta pati atkarpa).

Pamoka. lygios pusiaukraštinės $\Rightarrow$ lygiašonis trikampis: santykis 2 : 1 perkelia lygybę į mažus trikampius prie susikirtimo taško.

7 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

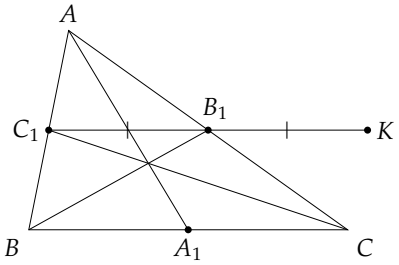
Ką matau. kraštinės vidurys M ir įstrižainė BD, kuri dalija kitą įstrižainę pusiau.

Idėja. nubrėžę AC, atpažįstame trikampio ABC pusiaukraštines AM ir BO.

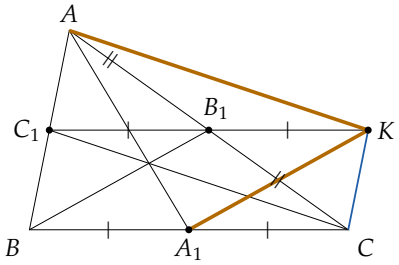
1. a) Nubrėžiame AC; O – įstrižainių susikirtimo taškas, $AO = OC$, $BO = OD$ (lygiagretainio įstrižainės dalija viena kitą pusiau). AM ir BO – trikampio ABC pusiaukraštinės, P – jų susikirtimo taškas.
2. $BP = \frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}BD$ (pusiaukraštinių susikirtimas). Taip pat trikampyje ACD: AN ir DO – pusiaukraštinės, todėl $DQ = \frac{1}{3}BD$. Taigi ir $PQ = BD - \frac{1}{3}BD - \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}BD$.
3. b) Trikampio ABC trečioji pusiaukraštinė eina per P (pusiaukraštinių susikirtimas), todėl tiesė CP ir yra ta pusiaukraštinė: ji kerta AB viduryje, taške K.

Pamoka. atkarpos iš viršūnių į kraštinių vidurius – pusiaukraštinės: nubrėžkite trikampį, kuriame jos yra (čia – įstrižainę AC), ir naudokite santykį 2 : 1.

8 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

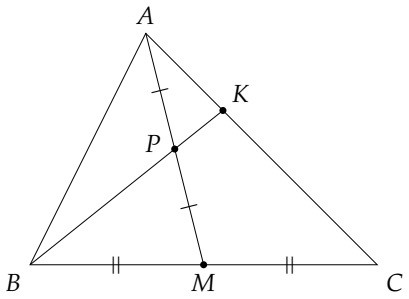
Ką matau. trys pusiaukraštinės ir atkarpa, pratęsta dvigubai; reikia dviejų lygybių.

Idėja. kiekviena lygybė – lygiagretainio priešingos kraštinės; vidurio linija duoda antrąjį lygiagretainį.

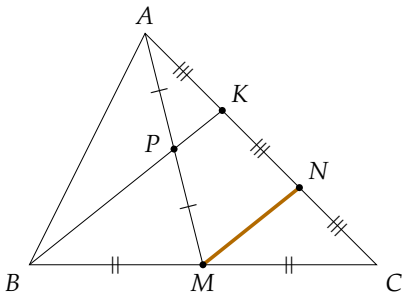
1. B_1 – atkarpų AC ir C_1K vidurys, todėl AC_1CK – lygiagretainis (požymis: įstrižainės dalija viena kitą pusiau), $AK = CC_1$.
2. $B_1K = C_1B_1 = \frac{1}{2}BC = BA_1$ ir $B_1K \parallel BA_1$ (vidurio linija C_1B_1), todėl BA_1KB_1 – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti), $A_1K = BB_1$.

Pamoka. vidurio linija – tai iš karto ir lygiagretumas, ir „pusė“: vienas jos sakinys pakeičia ištisą lygiagretainį (plg. 02b lapo 17 uždavinį, kur be vidurio linijos prireikė trijų lygiagretainių).

9 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

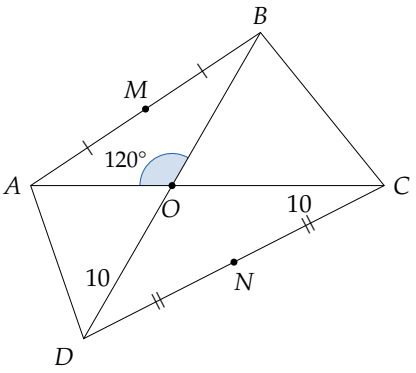
Ką matau. du viduriai M ir P, bet ne viename trikampyje; reikia santykių ant AC ir BK.

Idėja (T8: pridėk vidurį). atkarpos KC vidurys N duoda vidurio liniją $MN \parallel BK$, o ji – atvirkštinę išvadą trikampyje AMN.

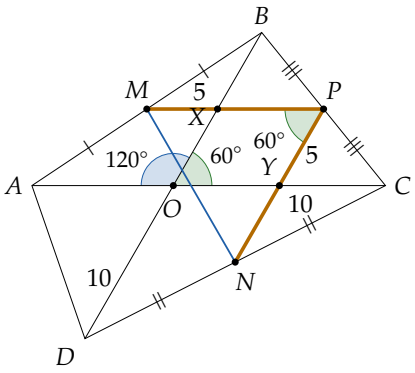
1. N – atkarpos KC vidurys. $MN \parallel BK$, $MN = \frac{1}{2}BK$ (vidurio linija trikampyje BKC).
2. Trikampyje AMN: P – AM vidurys, $PK \parallel MN$, todėl K – AN vidurys (vidurio linijos atvirkštinė išvada), $PK = \frac{1}{2}MN$ (vidurio linija).
3. a) $AK = KN = NC$, todėl $AK = \frac{1}{3}AC$. b) $PK = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}BK$, todėl $BP = 3PK$.

Pamoka. trūkstamą vidurį pridedame ten, kur vidurio linija bus lygiagreti jau nubrėžtai tiesei ($MN \parallel BK$).

10 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

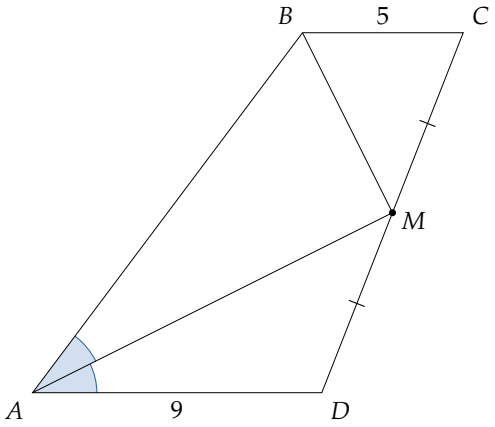
Ką matau. du viduriai priešingose kraštinėse; duotos įstrižainės ir kampas tarp jų.

Idėja (T8: pridėk trečią vidurį). kraštinės BC vidurys P duoda dvi vidurio linijas – po vieną kiekvienai įstrižainei.

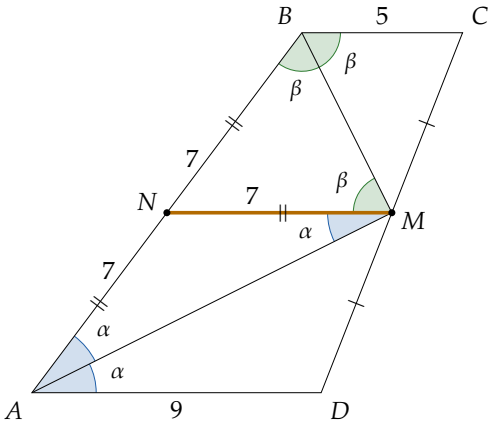
1. P – BC vidurys. $MP \parallel AC$, $MP = \frac{1}{2}AC = 5$ (vidurio linija trikampyje ABC); $PN \parallel BD$, $PN = \frac{1}{2}BD = 5$ (vidurio linija trikampyje BCD).
2. PM kerta BO taške X, PN kerta CO taške Y. $PX \parallel YO$, $PY \parallel XO$, todėl $PXOY$ – lygiagretainis (apibrėžimas) ir $\angle MPN = \angle XOY = \angle BOC = 180° - 120° = 60°$ (lygiagretainio savybė; gretimų kampų suma).
3. Trikampis MPN lygiašonis su $60°$ kampu tarp šoninių kraštinių, todėl lygiakraštis: $MN = 5$.

Pamoka. keturkampyje du priešingų kraštinių vidurius sujungia trečiasis vidurys: gauname trikampį, kurio kraštinės – įstrižainių pusės, o kampas tarp jų lygus $\angle BOC$, t. y. $180° - \angle AOB$.

11 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

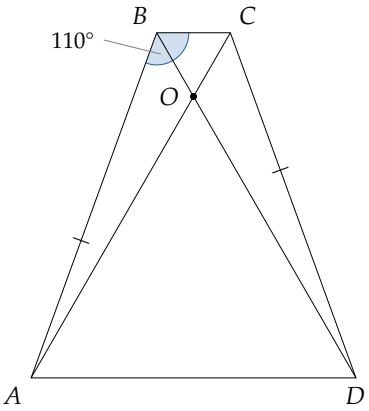
Ką matau. trapecija, šoninės kraštinės vidurys ir pusiaukampinė; pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė – lygiašonis trikampis.

Idėja (T8: pridėk vidurį). AB vidurys N duoda trapecijos vidurio liniją $MN \parallel AD$; trikampiai ANM ir BNM – lygiašoniai.

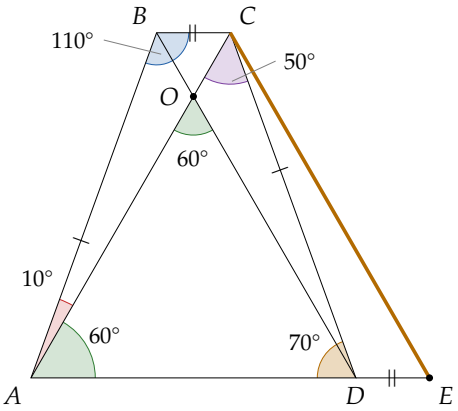
1. N – AB vidurys. $MN \parallel AD \parallel BC$, $MN = \frac{9+5}{2} = 7$ (trapecijos vidurio linija).
2. Pažymėkime $\angle MAD = \alpha$. Tada $\angle NAM = \alpha$ (pusiaukampinė) ir $\angle NMA = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai), todėl $NA = NM = 7$ (lygiašonio trikampio požymis). a) $AB = 2 \cdot 7 = 14$.
3. b) $NB = NA = NM$, todėl, pažymėję $\angle NBM = \beta$, gauname $\angle NMB = \beta$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo) ir $\angle MBC = \beta$ (vidaus priešiniai kampai): BM – kampo ABC pusiaukampinė.
4. $2\alpha + 2\beta = 180°$ (vienašaliai kampai, $AD \parallel BC$), todėl $\angle AMB = \alpha + \beta = 90°$.

Pamoka. vidurio linija lygiagreti pagrindams, todėl kartu su pusiaukampine „pagamina“ lygiašonius trikampius. (Plg. 2 lapo 9 uždavinį, kuriame pusiaukampinės kertasi ant pagrindo – ten vidurio linijos nereikėjo.)

12 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

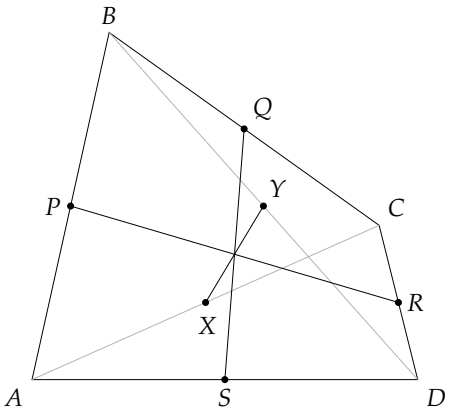
Ką matau. lygiašonė trapecija, įstrižainė ir pagrindų suma $AD + BC$ – atkarpos, kurios nesusieina.

Idėja (T9: perkelk įstrižainę). $CE \parallel BD$ sudeda pagrindus į vieną atkarpą AE; trikampis ACE – iš įstrižainių ir pagrindų sumos.

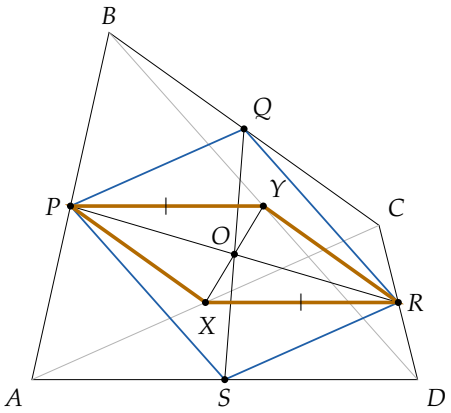
1. $CE \parallel BD$ (E – tiesėje AD), todėl $BCED$ – lygiagretainis (apibrėžimas): $DE = BC$, $CE = BD$ (lygiagretainio savybė) $= AC$ (lygiašonės trapecijos įstrižainės).
2. $AE = AD + DE = AD + BC = AC = CE$, todėl trikampis ACE lygiakraštis, jo kampai po $60°$.
3. a) O – įstrižainių susikirtimo taškas. $\angle AOD = \angle ACE = 60°$ (atitinkamieji kampai, $BD \parallel CE$).
4. b) $\angle BAD = \angle ADC = 180° - 110° = 70°$ (vienašaliai kampai; lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo). Trikampyje ACD: $\angle ACD = 180° - 60° - 70° = 50°$ (trikampio kampų suma); $\angle BAC = 70° - 60° = 10°$.

Pamoka. perkelta įstrižainė sudeda pagrindus: trikampis ACE turi kraštines d_1, d_2 ir $a + b$, o jo kampas C lygus kampui tarp įstrižainių.

13 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

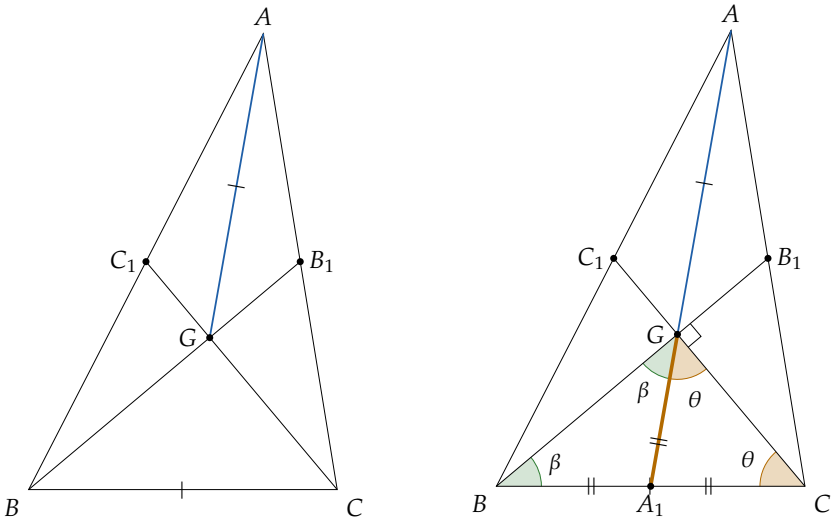
Ką matau. šeši viduriai ir trys atkarpos; reikia, kad trečioji eitų per tą patį tašką.

Idėja (T8 ir T7). du lygiagretainiai su bendra įstrižaine PR turi tą patį centrą – PR vidurį.

1. $PQRS$ – lygiagretainis (vidurių keturkampis, Varinjonas), todėl PR ir QS dalija viena kitą pusiau taške O (lygiagretainio savybė).
2. $PY \parallel AD$, $PY = \frac{1}{2}AD$ (vidurio linija trikampyje ABD); $XR \parallel AD$, $XR = \frac{1}{2}AD$ (vidurio linija trikampyje ACD), todėl $PXRY$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti).
3. Jo įstrižainės PR ir XY dalija viena kitą pusiau, todėl XY eina per PR vidurį O, ir O – XY vidurys.

Pamoka. trims atkarpoms per vieną tašką užtenka dviejų lygiagretainių su bendra įstrižaine (kaip 02b lape). (Pastaba smalsiems: kai $AD \parallel BC$, $PXRY$ „suplotas“ į atkarpą – teiginys teisingas, bet įrodymą reikia keisti; todėl sąlygoje kraštinės nelygiagrečios.)

14 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

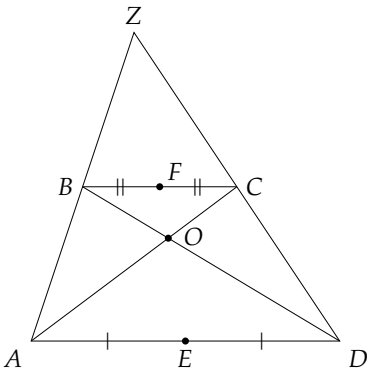
Ką matau. pusiaukraštinių susikirtimo taškas G ir lygybė $AG = BC$; reikia stataus kampo BGC.

Idėja. trečioji pusiaukraštinė: $GA_1 = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}BC$ – iš taško A_1 trys lygios atkarpos, du lygiašoniai trikampiai.

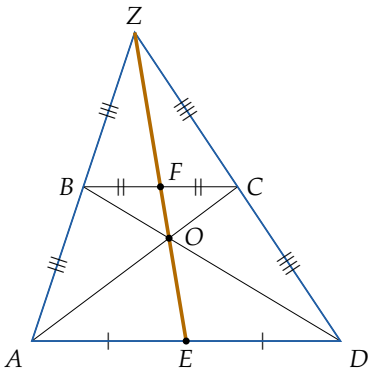
1. A_1 – BC vidurys. Pusiaukraštinė AA_1 eina per G ir $GA_1 = \frac{1}{2}AG$ (pusiaukraštinių susikirtimas, $2:1$) $= \frac{1}{2}BC$, todėl $A_1B = A_1G = A_1C$.
2. Trikampiai BA_1G ir CA_1G lygiašoniai. Pažymėkime $\angle GBA_1 = \beta$ ir $\angle GCA_1 = \theta$; tada $\angle BGA_1 = \beta$ ir $\angle CGA_1 = \theta$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo).
3. Trikampyje BGC: $\beta + \theta + (\beta + \theta) = 180°$ (trikampio kampų suma), todėl $\angle BGC = \beta + \theta = 90°$.

Pamoka. santykis $2:1$ paverčia sąlygą $AG = BC$ į „trys lygios atkarpos iš vieno taško“ – du lygiašoniai trikampiai, o kampų suma duoda statųjį kampą.

15 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

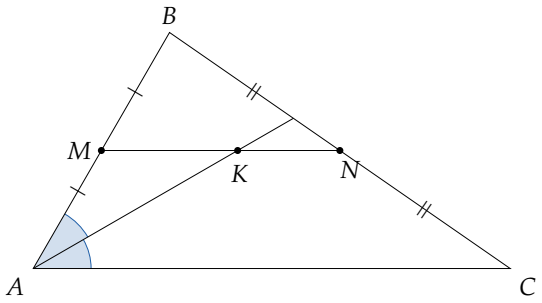
Ką matau. trapecija, kurios pagrindas dvigubai ilgesnis; reikia keturių taškų vienoje tiesėje.

Idėja. visa trapecija – trikampio ZAD dalis: BC – jo vidurio linija, AC ir DB – pusiaukraštinės, O – pusiaukraštinių susikirtimo taškas.

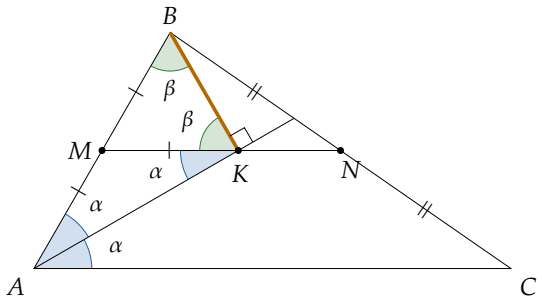
1. a) $B \in ZA$, $C \in ZD$, $BC \parallel AD$, $BC = \frac{1}{2}AD$, todėl BC – trikampio ZAD vidurio linija (atvirkščias teiginys apie vidurio liniją – Pratimai 2 c) teiginys, 3 skyrius): B ir C – ZA ir ZD viduriai.
2. b) Todėl AC ir DB – trikampio ZAD pusiaukraštinės, o O – jų susikirtimo taškas. Trečioji pusiaukraštinė ZE eina per O ir $BO : OD = 1 : 2$ (pusiaukraštinių susikirtimas).
3. Vidurio linija BC kerta pusiaukraštinę ZE taške, kuris yra abiejų atkarpų vidurys (kaip 3 uždavinyje) – tai BC vidurys F. Taigi Z, F, O, E – tiesėje ZE.

Pamoka. „trys taškai vienoje tiesėje“ be skaičiavimų: visi jie guli ant vienos pusiaukraštinės. (Bet kokioje trapecijoje šie keturi taškai irgi vienoje tiesėje, bet tam reikia panašumo – F lapas.)

16 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. vidurio linija ir pusiaukampinė – lygiagreti tiesė ir pusiaukampinė duoda lygiašonį trikampį.

Idėja. iš M trys lygios atkarpos MA, MK, MB – du lygiašoniai trikampiai, kaip 14 uždavinyje.

1. $MN \parallel AC$ (vidurio linija), Pažymėkime $\angle KAC = \alpha$. Tada $\angle MAK = \alpha$ (pusiaukampinė) ir $\angle MKA = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai), todėl $MK = MA = MB$ (lygiašonio trikampio požymis).
2. Pažymėkime $\angle MBK = \beta$. Tada $\angle MKB = \beta$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo); trikampyje ABK $2\alpha + 2\beta = 180°$ (trikampio kampų suma), todėl $\angle AKB = \alpha + \beta = 90°$.
3. b) $MK = MA = 4$, $MN = \frac{1}{2}AC = 7$ (vidurio linija), $KN = 7 - 4 = 3$.

Pamoka. tai 5 uždavinys „atvirkščiai“: ten statmuo pusiaukampinei davė vidurio liniją, čia vidurio linija duoda statmenį.