Geometrija

Lapas 2b. Lygių trikampių metodas II: lygiagretainių šeima

9 klasė

Apšilimas (5 min.)

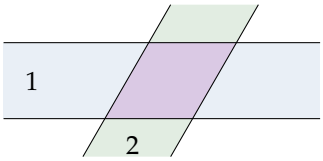
Pratimai 1. Prisiminkite 1–2 lapus (atsakymai – lapo gale).

a) Lygiagrečias tieses a ir b kerta tiesė c. Vienas iš vidaus vienašalių kampų 5 kartus didesnis už kitą. Raskite abu kampus.

b) Trikampyje ABC $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $BC = 9$. Trikampyje DEF $DE = AB$, $\angle D = 50°$, $\angle F = 60°$. Raskite EF.

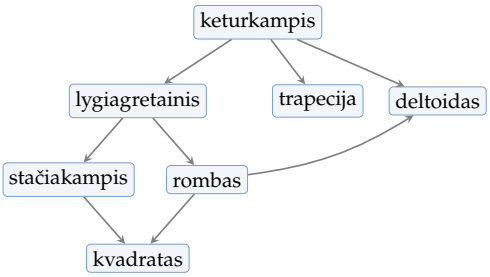
c) M – trikampio ABC kraštinės BC vidurys. Atkarpos AM tęsinyje už M pažymėtas taškas D, $MD = AM$; $AB = 7$, $\angle BAM = 28°$. Raskite CD ir $\angle CDM$. Kuri tiesė lygiagreti AB?

Dvi juostos. Dvi vienodo pločio popieriaus juostos sukryžiuotos kampu (žr. brėžinį). Kokia figūra yra jų sankirtoje? O kada sankirtoje gausime kvadratą?
Atsakymas – 2 pavyzdyje.



1. Nuo ko pradedame

Žodynas. Lygiagretainis – keturkampis, kurio priešingos kraštinės poromis lygiagrečios. **Stačiakampis** – visi kampai statūs. **Rombas** – visos kraštinės lygios. **Kvadratas** – visos kraštinės lygios ir visi kampai statūs. **Deltoidas** – dvi poros lygių gretimų kraštinių. **Lygiagretainio aukštinė** – statmuo iš vienos kraštinės taško į tiesę, kurioje yra priešinga kraštinė.
Rodyklė „$X \to Y$“: kiekvienas Y yra ir X. Kad stačiakampis ir rombas yra lygiagretainiai, iš apibrėžimų nematyti – tai įrodysime šiame lape.



Iš 1–2 lapų. Dvi tiesės lygiagrečios ⇔ vidaus priešiniai kampai lygūs ⇔ vidaus vienašalių kampų suma 180° (lygiagretumo požymis). Trikampių lygumo požymiai: (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), (kraštinė ir du kampai), (trys kraštinės). Lygiašonio trikampio pusiaukampinė, pusiaukraštinė ir aukštinė iš viršūnės į pagrindą – ta pati atkarpa. Keturkampio kampų suma 360°.

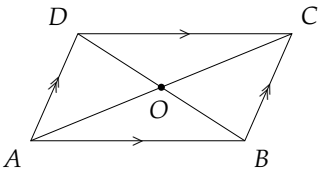
Metodas. Įstrižainė padalija keturkampį į du trikampius. Lygiagrečios kraštinės duoda lygius kampus, lygūs trikampiai – lygias kraštines, o lygūs kampai – lygiagrečias kraštines. Visa šio lapo teorija remiasi lygiais trikampiais.

2. Lygiagretainių šeima: savybės ir požymiai

Savybė – ką žinome, kai figūra jau yra lygiagretainis (rombas . . .). **Požymis** – iš ko galime spręsti, kad keturkampis yra lygiagretainis (rombas . . .).

Įrankis 10 (lygiagretainio savybės)

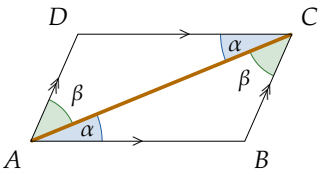
Lygiagretainio $ABCD$
(1) priešingos kraštinės lygios: $AB = CD$, $BC = DA$;
(2) priešingi kampai lygūs: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; gretimų kampų suma $180°$;
(3) įstrižainės dalija viena kitą pusiau: $OA = OC$, $OB = OD$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

(1), (2).

1. $\angle BAC = \angle DCA = \alpha$, $\angle DAC = \angle BCA = \beta$ (vidaus priešiniai kampai; $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$).
2. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (kraštinė ir du kampai: AC bendra), todėl $AB = CD$, $BC = DA$, $\angle B = \angle D$.
3. $\angle A = \alpha + \beta = \angle C$. Gretimų kampų suma $180°$ (vidaus vienašaliai kampai).

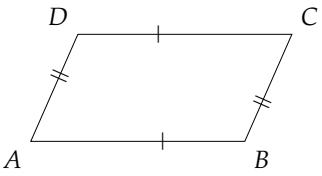


■

(3) įrodykite patys (Pratimai 4 a) – prieš skaitydami toliau.

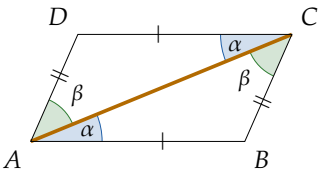
Įrankis 11 (lygiagretainio požymiai)

Iškilasis keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, jei
(a) priešingos kraštinės poromis lygios: $AB = CD$, $BC = DA$; arba
(b) dvi priešingos kraštinės lygios ir lygiagrečios: $AB = CD$, $AB \parallel CD$; arba
(c) įstrižainės dalija viena kitą pusiau; arba
(d) priešingi kampai poromis lygūs: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

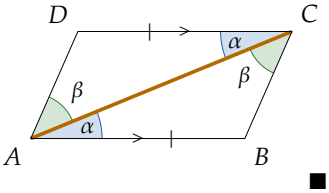
(a) $\triangle ABC = \triangle CDA$ (trys kraštinės: AC bendra), todėl $\angle BAC = \angle DCA = \alpha$ ir $\angle BCA = \angle DAC = \beta$. Taigi $AB \parallel CD$ ir $AD \parallel BC$ (lygiagretumo požymis: vidaus priešiniai kampai).



■

Įrodymas.

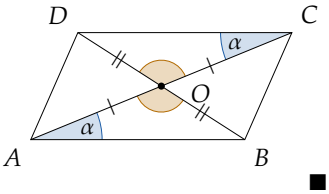
(b) $\angle BAC = \angle DCA = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai, $AB \parallel CD$). $\triangle ABC = \triangle CDA$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = CD$, AC bendra), todėl $\angle BCA = \angle DAC = \beta$, ir $AD \parallel BC$ (lygiagretumo požymis).



■

Įrodymas.

(c) $\triangle AOB = \triangle COD$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų; kampai prie O kryžminiai), todėl $AB = CD$ ir $\angle OAB = \angle OCD = \alpha$, t. y. $AB \parallel CD$ (lygiagretumo požymis). Toliau – požymis (b).

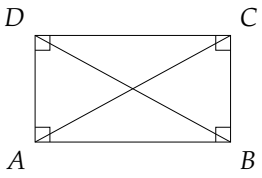


■

(d) įrodykite patys (Pratimai 4 b).

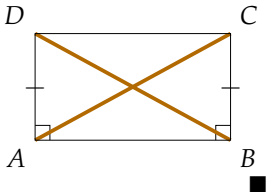
Įrankis 12 (stačiakampis)

Stačiakampis yra lygiagretainis (turi visas jo savybes), ir jo įstrižainės lygios. **Požymiai.** Lygiagretainis yra stačiakampis, jei (a) vienas jo kampas status arba (b) jo įstrižainės lygios.



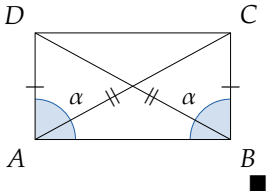
Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. $\angle A + \angle B = 180°$, todėl $AD \parallel BC$; taip pat $AB \parallel CD$ (lygiagretumo požymis: vienašaliai kampai). Taigi $ABCD$ – lygiagretainis.
2. $\triangle DAB = \triangle CBA$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AD = BC$, AB bendra, $\angle A = \angle B = 90°$), todėl $BD = AC$.



Įrodymas.

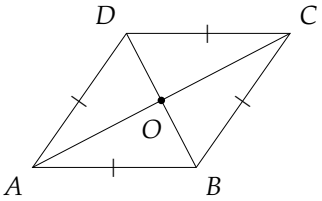
Požymis (b). $\triangle ABC = \triangle BAD$ (trys kraštinės: AB bendra, $BC = AD$, $AC = BD$), todėl $\angle B = \angle A = \alpha$. $2\alpha = 180°$ (gretimų kampų suma), $\alpha = 90°$; priešingi kampai C ir D – irgi po $90°$.



Požymį (a) įrodykite patys (Pratimai 4 c).

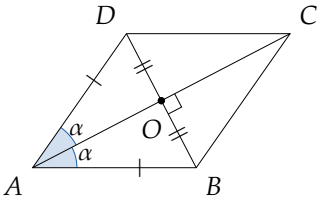
Įrankis 13 (rombas)

Rombas yra lygiagretainis (požymis: priešingos kraštinės poromis lygios). Jo įstrižainės statmenos ir dalija jo kampus pusiau. **Požymiai.** Lygiagretainis yra rombas, jei (a) dvi jo gretimos kraštinės lygios arba (b) jo įstrižainės statmenos.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

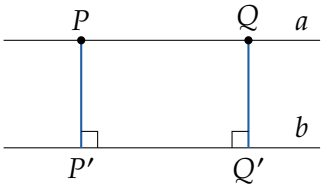
O – įstrižainės BD vidurys (lygiagretainio savybė), todėl AO – lygiašonio trikampio ABD ($AB = AD$) pusiaukraštinė, o kartu ir aukštinė, ir pusiaukampinė (lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė – ta pati atkarpa): $AC \perp BD$, $\angle BAO = \angle OAD$. Kitose viršūnėse – taip pat.



Požymius įrodykite patys (Pratimai 4 d, e); dar vienas rombo požymis – Pratimai 3 d.

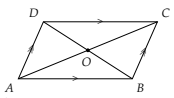
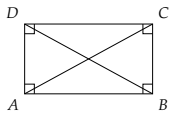
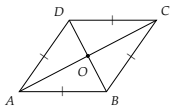
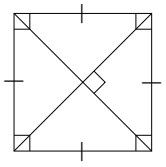
Kvadratas yra ir stačiakampis, ir rombas, todėl turi abiejų savybes. Stačiakampis, turintis rombo požymį, ir rombas, turintis stačiakampio požymį, yra kvadratai.

Išvada (atstumas tarp lygiagrečių tiesių). Jei $a \parallel b$, tai visi tiesės a taškai vienodai nutolę nuo b: $PP' = QQ'$ ($PP' \perp b$, $QQ' \perp b$). Ir atvirkščiai: jei taškai P ir Q yra vienoje tiesės b pusėje ir $PP' = QQ'$, tai $PQ \parallel b$.
Kodėl. $PP' \parallel QQ'$ (abi statmenos b; lygiagretumo požymis). Jei $a \parallel b$, tai $PQQ'P'$ – lygiagretainis, todėl $PP' = QQ'$ (lygiagretainio savybė). Atvirkščiai: PP' ir QQ' lygios ir lygiagrečios, todėl $PQQ'P'$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti), $PQ \parallel P'Q'$.



Šis atstumas vadinamas **atstumu tarp lygiagrečių tiesių**; jis lygus lygiagretainio aukštinei. Jo reikės skaičiuojant plotus.

Lygiagretainių šeima: savybės ir požymiai

	Savybės (figūra jau tokia)	**Požymiai** (kada keturkampis toks)
 **lygiagretainis**	priešingos kraštinės lygios; priešingi kampai lygūs; gretimų kampų suma 180°; įstrižainės dalija viena kitą pusiau	iškilasis keturkampis, kurio: priešingos kraštinės poromis lygios; viena pora lygi ir lygiagreti; įstrižainės dalija viena kitą pusiau; priešingi kampai poromis lygūs
 **stačiakampis**	visos lygiagretainio savybės; įstrižainės lygios	lygiagretainis su stačiu kampu; lygiagretainis su lygiomis įstrižainėmis
 **rombas**	visos lygiagretainio savybės; įstrižainės statmenos; įstrižainės dalija kampus pusiau	lygiagretainis su dviem lygiomis gretimomis kraštinėmis; lygiagretainis su statmenomis įstrižainėmis; lygiagretainis, kurio įstrižainė dalija kampą pusiau (Pratimai 3 d)
 **kvadratas**	visos stačiakampio ir rombo savybės: įstrižainės lygios, statmenos, dalija viena kitą pusiau ir kampus – po 45°	stačiakampis su lygiomis gretimomis kraštinėmis arba statmenomis įstrižainėmis; rombas su stačiu kampu arba lygiomis įstrižainėmis

3. Ar teisingas atvirkščias teiginys?

Pratimai 2. Ar teisinga? Jei ne – nurodykite kontrpavyzdį (keturkampį, kuriame sąlyga teisinga, o išvada – ne); jei taip – pagrįskite (atsakymai – lapo gale).

a) Stačiakampio įstrižainės lygios. Atvirkščiai: jei keturkampio įstrižainės lygios, tai jis – stačiakampis.
Užuomina: ar visada? Brėžkite dvi lygias susikertančias atkarpas ir keiskite, kur ir kokiu kampu jos kertasi.

b) Stačiakampio įstrižainės lygios ir dalija viena kitą pusiau. Atvirkščiai: jei įstrižainės lygios ir dalija viena kitą pusiau, tai keturkampis – stačiakampis.
Užuomina: ar visada? Ką duoda kiekviena sąlyga atskirai?

c) Rombo įstrižainės statmenos. Atvirkščiai: jei keturkampio įstrižainės statmenos, tai jis – rombas.
Užuomina: ar visada? Brėžkite dvi statmenas atkarpas ir keiskite jų ilgius bei susikirtimo vietą.

d) Stačiakampio visi kampai statūs. Atvirkščiai: jei keturkampio trys kampai statūs, tai jis – stačiakampis.
Užuomina: ar visada? Ką žinome apie keturkampio kampus?

e) Kvadrato įstrižainės lygios ir statmenos. Atvirkščiai: jei keturkampio įstrižainės lygios ir statmenos, tai jis – kvadratas.
Užuomina: ar visada? Brėžkite dvi lygias statmenas atkarpas ir keiskite jų susikirtimo vietą.

f) Žinome požymį: jei keturkampio viena kraštinių pora lygi ir lygiagreti, tai jis – lygiagretainis. Ar teisinga: „Jei keturkampio viena kraštinių pora lygiagreti, o kita pora lygi, tai jis – lygiagretainis“?
Užuomina: ar visada? Brėžkite dvi lygiagrečias kraštines, o kitas dvi – lygias, ir keiskite jų kryptį.

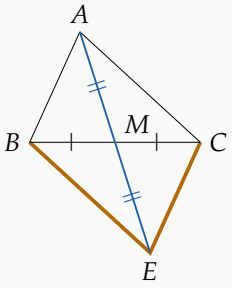
g) Raskite klaidą. Teiginys: „Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = CD$ ir $\angle A = \angle C$. Tada $ABCD$ – lygiagretainis.“ „Įrodymas“: trikampiuose ABD ir CDB $AB = CD$, $\angle A = \angle C$, BD – bendra,

todėl $\triangle ABD = \triangle CDB$ (dvi kraštinės ir kampas). Tada $AD = BC$ – priešingos kraštinės poromis lygios, $ABCD$ – lygiagretainis. Raskite klaidą ir parodykite, kad teiginys neteisingas.
Užuomina: 1) tarp kurių kraštinių yra kampas A trikampyje ABD? 2) pabandykite keturkampį su kampais 60°, 150°, 60°, 90°.

4. Technikos

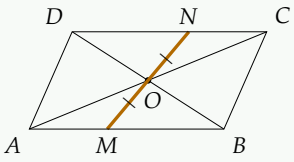
Technika T6. Užbaik iki lygiagretainio

Signalas: (i) pusiaukraštinė ar atkarpos vidurys; (ii) reikia perkelti atkarpą ar kampą į kitą vietą arba „surinkti“ išsibarsčiusias atkarpas į vieną trikampį.
Veiksmas: (i) pusiaukraštinę AM pratęsk už M tiek pat ($ME = AM$): $ABEC$ – lygiagretainis (požymis: įstrižainės dalija viena kitą pusiau), todėl $CE = AB$, $CE \parallel AB$, $BE = AC$ (T4 apibendrinimas). (ii) Nubrėžk atkarpą, lygiagrečią ir lygią kitai atkarpai (arba tiesę, lygiagrečią kraštinei), – gausi lygiagretainį. Jo priešingos kraštinės lygios ir lygiagrečios: atkarpa „persikelia“ nepakitusi, kampai – per lygiagrečias tieses.



Technika T7. Centras O

Signalas: lygiagretainis ir taškas ar atkarpa, einanti per įstrižainių susikirtimo tašką O; reikia įrodyti, kad atkarpa dalijama pusiau arba kad trys taškai yra vienoje tiesėje.
Veiksmas: O – abiejų įstrižainių vidurys. Ieškok lygių trikampių su viršūne O (kampai prie O kryžminiai). Atkarpa per O, kurios galai yra priešingose kraštinėse, dalijama pusiau: $OM = ON$ (įrodykite patys, Pratimai 4 f).



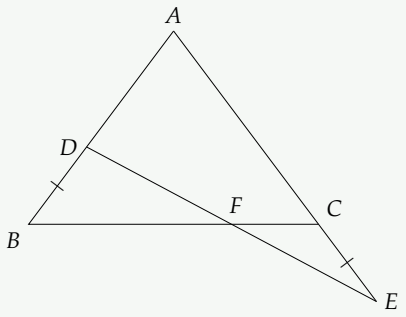
Trys taškai K, O, L vienoje tiesėje? Ieškok lygiagretainio, kurio viena įstrižainė – KL, o kita – AC (ar BD). Jo įstrižainės dalija viena kitą pusiau, todėl KL eina per AC vidurį O (3 pavyzdys).

5. Pavyzdžiai

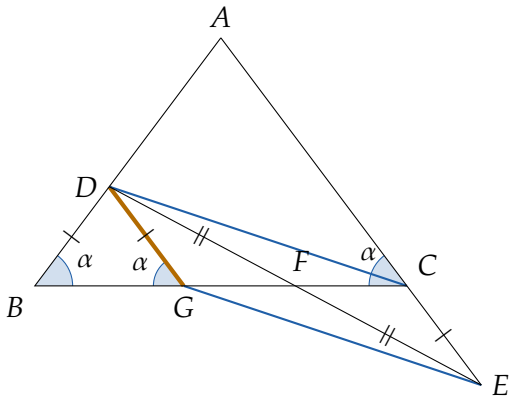
Pavyzdys 1 (atkarpos vidurys – lygiagretainio centras)

Grįžtame *2 lapo 20 uždavinys*

Trikampyje ABC $AB = AC$. Kraštinėje AB pažymėtas taškas D (ne viršūnė), o kraštinės AC tęsinyje už C – taškas E, $BD = CE$. Atkarpa DE kerta BC taške F. Įrodykite, kad $DF = FE$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Juodraštis (mąstome nuo galo)

Ko noriu? $DF = FE$: F – atkarpos DE vidurys.
← **Ko tam reikia?** Atkarpos vidurys – lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas. Reikia lygiagretainio su įstrižaine DE.
← **Ką turiu?** Atkarpą CE. Prie D reikia jai lygios ir lygiagrečios atkarpos (T6).
Nubrėžiu $DG \parallel AC$. Ar $DG = CE$? $\angle DGB = \angle C = \angle B$, tai $DG = DB = CE$. Taip!

Švarraštis.

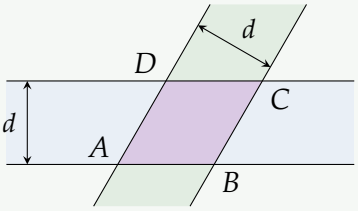
1. Nubrėžiame $DG \parallel AC$, $G \in BC$. Pažymėkime $\angle ACB = \alpha$; tada $\angle DGB = \angle ACB = \alpha$ (atitinkamieji kampai) $= \angle ABC$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo), todėl $DG = DB = CE$ (lygiašonio trikampio požymis).
2. $DG \parallel CE$ ir $DG = CE$, todėl $DGEC$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti).
3. Jo įstrižainės DE ir GC dalija viena kitą pusiau (lygiagretainio savybė): $DF = FE$.

Pamoka. reikia įrodyti, kad taškas – atkarpos vidurys? Ieškok lygiagretainio, kurio įstrižainė – ta atkarpa. Palyginimas su 2 lapo sprendimu – 7-ajame skyriuje.

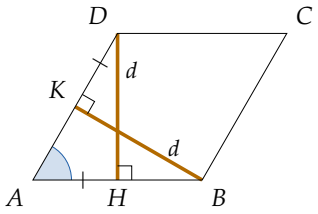
Pavyzdys 2 (dvi juostos)

Dvi juostos, kurių plotis d, sukryžiuotos (žr. brėžinį).

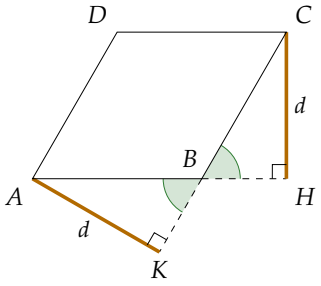
a) Įrodykite, kad jų sankirta $ABCD$ – rombas.
b) Kada ji yra kvadratas?



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



smailusis kampas A



bukasis kampas B

Ką matau. juostos plotis – atstumas tarp lygiagrečių tiesių, jis visur vienodas.

Idėja. du statmenys, lygūs d: $DH \perp AB$, $BK \perp AD$ – ir lygūs statieji trikampiai.

Sprendimas.

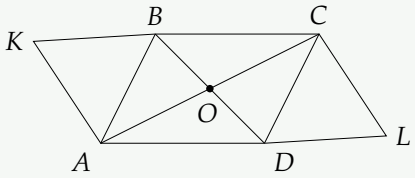
a) $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ (juostų kraštai), todėl $ABCD$ – lygiagretainis (apibrėžimas).
$DH \perp AB$, $BK \perp AD$; $DH = BK = d$ (atstumas tarp lygiagrečių tiesių).
$\triangle AHD = \triangle AKB$ (kraštinė ir du kampai: $DH = BK$, $\angle H = \angle K = 90°$, $\angle A$ bendras), todėl $AD = AB$: $ABCD$ – rombas (rombo požymis: lygios gretimos kraštinės).

b) Kai juostos statmenos, $\angle A = 90°$: rombas su stačiu kampu – kvadratas. Atvirkščiai, kvadrato kampai statūs – juostos statmenos.

Pamoka. statmenis galima nuleisti ir iš smailiųjų kampų viršūnių A ir C (antras brėžinys): jų pagrindai – kraštinių tęsiniuose už bukojo kampo viršūnės B, lyginami kampai prie B kryžminiai, išvada ta pati.

Pavyzdys 3 (trys taškai vienoje tiesėje)

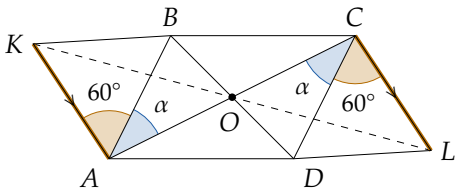
$ABCD$ – lygiagretainis, kurio kampas A smailusis, O – įstrižainių susikirtimo taškas. Lygiagretainio išorėje nubrėžti lygiakraščiai trikampiai ABK ir CDL. Įrodykite, kad K, O, L yra vienoje tiesėje ir O – atkarpos KL vidurys.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. lygiagretainis ir jo centras O; reikia įrodyti, kad trys taškai vienoje tiesėje.

Idėja (T7). jei $AKCL$ – lygiagretainis, jo įstrižainė KL eina per AC vidurį O.



Sprendimas.

1. $AK = AB = CD = CL$ (lygiakraščiai trikampiai; lygiagretainio savybė).
2. Pažymėkime $\angle BAC = \alpha$. Tada $\angle DCA = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai, $AB \parallel CD$), todėl $\angle KAC = 60° + \alpha = \angle LCA$; K ir L – skirtingose tiesės AC pusėse, todėl $AK \parallel CL$ (lygiagretumo požymis).
3. $AKCL$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti), todėl jo įstrižainės KL ir AC dalija viena kitą pusiau (lygiagretainio savybė): KL eina per AC vidurį O ir $KO = OL$.

Pamoka. trys taškai vienoje tiesėje – dažnai tai lygiagretainio įstrižainė, einanti per kitos įstrižainės vidurį.

6. Pratimai

Pratimai 3. Apskaičiuokite arba įrodykite (atsakymai ir sprendimai – lapo gale).

a) Lygiagretainio $ABCD$ kampų A ir B santykis $2:7$, perimetras 34, kraštinė BC 3 didesnė už AB. Kampo A pusiaukampinė kerta BC taške M. Raskite lygiagretainio kampus, kraštines, BM ir MC.
Užuomina: kuris trikampis lygiašonis?

b) Lygiagretainyje $ABCD$ $AB \neq AD$. Kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške P, B ir C – taške Q, C ir D – taške R, D ir A – taške S. Įrodykite, kad $PQRS$ – stačiakampis. Kas atsitinka, jei $ABCD$ – rombas?
Užuomina: kam lygi gretimų kampų pusių suma?

c) Lygiagretainio $ABCD$ kampas A smailusis. Iš B nubrėžtos aukštinės BH ir BK į kraštines AD ir CD (H ir K – kraštinių vidiniai taškai). a) Raskite $\angle HBK$, kai $\angle A = 60°$. b) Įrodykite, kad visada $\angle HBK = \angle A$.
Užuomina: keturkampyje $BHDK$ žinomi trys kampai.

d) Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainė AC dalija kampą A pusiau. a) Įrodykite, kad $ABCD$ – rombas (dar vienas rombo požymis). b) Perimetras 28. Raskite AB.
Užuomina: kuriam kampui lygus $\angle CAD$, nes $AD \parallel BC$?

e) Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = AD$ ir $CB = CD$ (toks keturkampis vadinamas deltoidu), O – įstrižainių susikirtimo taškas. a) Įrodykite, kad $AC \perp BD$ ir $BO = OD$. b) Ar BD dalija AC pusiau? Kuo deltoidas skiriasi nuo rombo?
Užuomina: lygūs trikampiai su bendra kraštine AC.

f) a) Sukonstruokite skriestuvu ir liniuote lygiagretainį $ABCD$, kurio $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm, įstrižainė $BD = 7$ cm. b) Duota tiesė ℓ ir taškas P ne joje. Skriestuvu ir liniuote per P nubrėžkite tiesę, lygiagrečią ℓ. Paaiškinkite, kodėl konstrukcija teisinga.
Užuomina: kaip vien iš kraštinių žinoti, kad keturkampis – lygiagretainis?

Pratimai 4. Įrodykite (teiginiai, kurių teorijoje neįrodėme; sprendimai – lapo gale).

a) Lygiagretainio įstrižainės dalija viena kitą pusiau.
Užuomina: kuriuose trikampiuose yra atkarpos OA ir OC? Kas juose lygu?

b) Jei iškilojo keturkampio priešingi kampai poromis lygūs, tai jis – lygiagretainis.
Užuomina: kam lygi suma $\angle A + \angle B$?

c) Lygiagretainis, kurio vienas kampas status, – stačiakampis.
Užuomina: kam lygūs priešingas ir gretimi kampai?

d) Lygiagretainis, kurio dvi gretimos kraštinės lygios, – rombas.
Užuomina: kurios kraštinės lygios kiekviename lygiagretainyje?

e) Lygiagretainis, kurio įstrižainės statmenos, – rombas.
Užuomina: kokius trikampius įstrižainės sudaro prie O? Ką apie juos žinome lygiagretainyje?

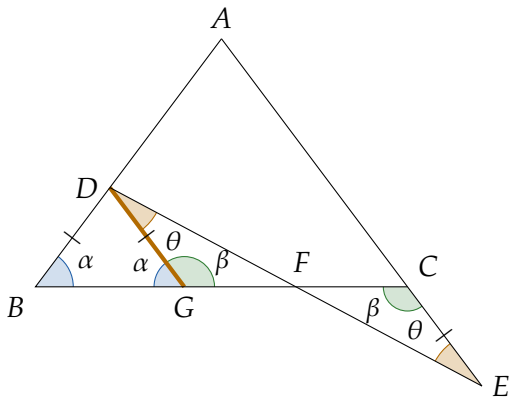
f) Atkarpa MN eina per lygiagretainio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką O, $M \in AB$, $N \in CD$. Įrodykite, kad $OM = ON$.
Užuomina: ieškokite lygių trikampių su viršūne O.

7. Grįžtame

Kai kuriuos ankstesnių lapų uždavinius lygiagretainis išsprendžia trumpiau: lygius trikampius, kuriuos tada ieškojome kiekvieną kartą, dabar pakeičia vienas lygiagretainio faktas. Palyginkite sprendimus; paskui išspręskite patys.

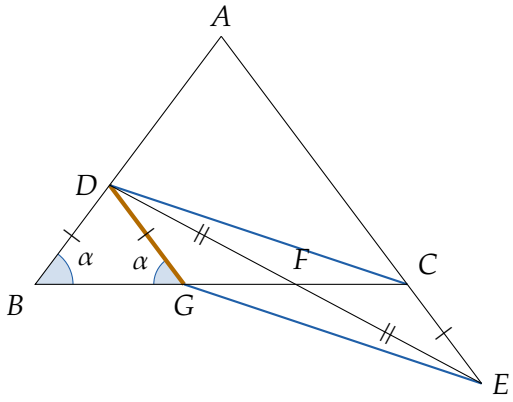
Grįžtame *2 lapo 20 uždavinys (1 pavyzdys)*

Anksčiau (2 lapas, T2).



1. $DG \parallel AC$: $DG = DB = CE$ (kaip 1 pavyzdyje).
2. Pažymėkime $\angle DGF = \beta$, $\angle GDF = \theta$. Tada $\angle ECF = \beta$, $\angle CEF = \theta$ (vidaus priešiniai kampai, $DG \parallel CE$).
3. $\triangle DGF = \triangle ECF$ (kraštinė ir du kampai prie jos), todėl $DF = FE$.

Dabar (T6).



1. $DG \parallel AC$: $DG = DB = CE$.
2. $DGEC$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti).
3. Jo įstrižainės dalija viena kitą pusiau (lygiagretainio savybė): $DF = FE$.

Pamoka. trečias žingsnis – vienas lygiagretainio faktas: lygių trikampių DGF ir ECF nebeieškome, jie „paslėpti“ lygiagretainio savybėje.

Pratimai 5. Išspręskite patys naujais įrankiais (nurodytas lapas ir uždavinio numeris; sprendimai – lapo gale).

a) *(2 lapas, 17 uždavinys.)* Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC pažymėti taškai D ir E (ne viršūnės), $DE \parallel BC$ ir $BD = CE$. Įrodykite, kad $AB = AC$.
Užuomina: 1) lygios atkarpos BD ir CE yra toli viena nuo kitos. 2) per E nubrėžkite tiesę, lygiagrečią AB; ji kerta BC taške F.

b) *(2m lapas, 11 uždavinys.)* M – atkarpos BC vidurys. Taškai A ir D yra skirtingose tiesės BC pusėse, $AB \parallel CD$ ir $AB = CD$. Įrodykite, kad atkarpa AD eina per M ir M ją dalija pusiau. (Užtenka vieno sakinio.)
Užuomina: 1) kuri kraštinių pora lygi ir lygiagreti? 2) kurios atkarpos – keturkampio įstrižainės?

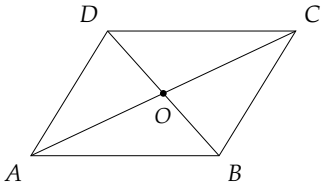
c) *(2 lapas, 16 uždavinys.)* AD – trikampio ABC pusiaukraštinė. Atkarpoje AD pažymėtas taškas E (ne galas), $BE = AC$. Tiesė BE kerta kraštinę AC taške F. Įrodykite, kad $AF = EF$.
Užuomina: 1) AD – pusiaukraštinė. 2) pratęskite AD už D iki K, $DK = AD$: koks keturkampis $ABKC$? Koks trikampis BEK?

Uždaviniai

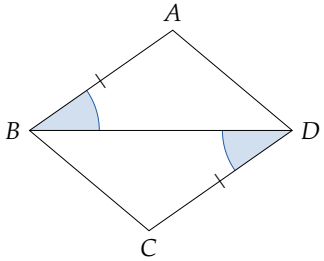
Jei brėžinio nėra, nusibraižykite patys.

I. Įgūdžiai

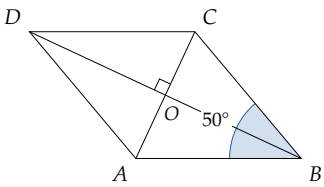
1. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O, $AC = 14$, $BD = 8$. Trikampio AOB perimetras lygus 20, trikampio BOC – 18. Raskite lygiagretainio perimetrą.



2. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = CD$ ir $\angle ABD = \angle BDC$.
a) Įrodykite, kad $ABCD$ – lygiagretainis.
b) Raskite $\angle ABC$, jei $\angle ABD = 35°$, $\angle ADB = 40°$.



3. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės statmenos, $\angle ABC = 50°$, perimetras lygus 40. Raskite AB ir $\angle BAC$.



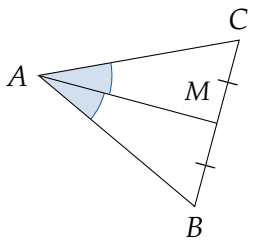
II. Tilteliai

Šiuose uždaviniuose du žingsniai: atpažinkite (arba užbaikite) lygiagretainį ir pasinaudokite jo savybe.

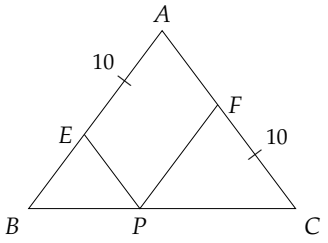
4. Trikampio ABC pusiaukraštinė AM yra ir kampo A pusiaukampinė.

a) Įrodykite, kad $AB = AC$.

b) Raskite $\angle B$, jei $\angle BAC = 50°$.



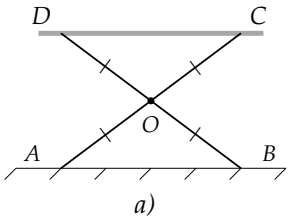
5. Lygiašonio trikampio ABC šoninės kraštinės $AB = AC = 10$. Per pagrindo BC vidinį tašką P nubrėžtos tiesės $PE \parallel AC$ ($E \in AB$) ir $PF \parallel AB$ ($F \in AC$). Raskite keturkampio $AEPF$ perimetrą. Ar jis priklauso nuo taško P padėties?



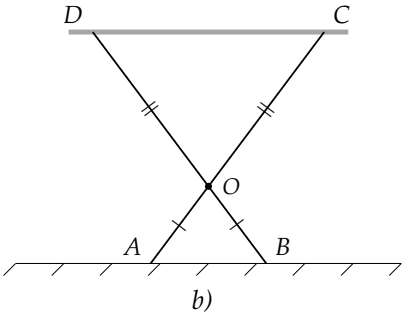
6. Žirklinio keltuvo schema: du vienodo ilgio strypai AC ir BD sujungti vyriu O per jų vidurius. Galai A ir B – ant žemės (B gali slinkti žeme), o D ir C laiko platformą.

a) Įrodykite, kad $ABCD$ visada (kad ir kaip prasiskėstų žirklės) yra stačiakampis, todėl platforma lygiagreti žemei. Kodėl žemei lygiagreti ir antro aukšto platforma (ant D ir C uždėta tokia pati strypų pora)?

b) Strypus siūloma sujungti ne per vidurius: $AO = BO = 1$ m, $OC = OD = 2$ m. Ar platforma liks lygiagreti žemei? Ar $ABCD$ tada – lygiagretainis?



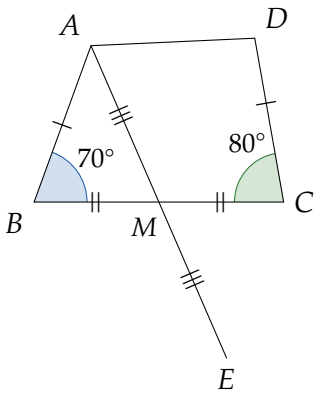
a)



b)

III. Technikos

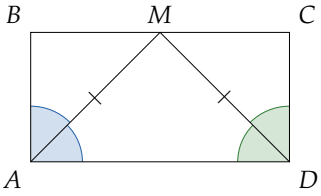
7. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = CD$, $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = 80°$; M – kraštinės BC vidurys. Atkarpos AM tęsinyje už M pažymėtas taškas E, $ME = AM$. Raskite $\angle CDE$.



8. Lygiagretainio $ABCD$ kampų A ir D pusiaukampinės kertasi kraštinės BC taške M, ir $AM = DM$.

a) Įrodykite, kad $ABCD$ – stačiakampis.

b) Įrodykite, kad M – kraštinės BC vidurys, ir raskite $\angle AMB$.

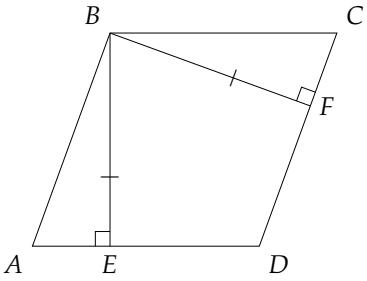


9. Lygiagretainio $ABCD$ kampas A smailusis. Iš B nubrėžtos aukštinės BE ir BF į kraštines AD ir CD (E ir F – kraštinių vidiniai taškai), $BE = BF$.

a) Įrodykite, kad $ABCD$ – rombas.

b) Įrodykite, kad $EF \perp BD$.

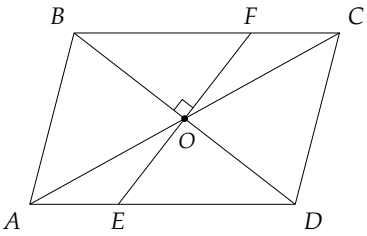
c) Raskite trikampio BEF kampus, jei $\angle A = 70°$.



10. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O. Tiesė, einanti per O statmenai BD, kerta kraštines AD ir BC jų vidiniuose taškuose E ir F.

a) Įrodykite, kad $BEDF$ – rombas.

b) Lygiagretainio $ABCD$ perimetras lygus 40. Raskite trikampio ABE perimetrą.



11. Trikampio ABC kraštinėje BC pažymėtas taškas D, kraštinėje AC – taškas E (ne viršūnės), $DE \parallel AB$ ir $AE + DE = AB$.

a) Įrodykite, kad $AB = AC$.

b) Ar teisinga atvirkščiai: jei $AB = AC$ ir $DE \parallel AB$, ar visada $AE + DE = AB$?

12. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AD = 15$, $BC = 6$ ir $\angle ABC = 2\angle ADC$. Raskite AB.

13. Lygiagretainio $ABCD$ ($AD > AB$) įstrižainės kertasi taške O. Kampo ABC pusiaukampinė kerta AD taške K, kampo CDA pusiaukampinė kerta BC taške L.

a) Įrodykite, kad $BLDK$ – lygiagretainis.

b) Įrodykite, kad K, O, L yra vienoje tiesėje ir $KO = OL$.

14. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O. Kraštinėse AB, BC, CD, DA pažymėti vidiniai taškai M, P, N, Q (ne viršūnės), kad $AM = CN$ ir $BP = DQ$.

a) Įrodykite, kad atkarpos MN ir PQ eina per O (taigi tiesės MN, PQ ir AC kertasi viename taške).
b) Įrodykite, kad $MPNQ$ – lygiagretainis.

IV. Sunkesni

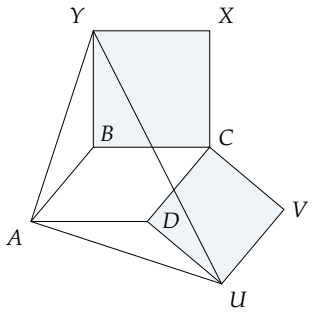
15. Lygiagretainyje $ABCD$ $AB = 6$, $AD = 10$. Kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške P, kampų C ir D – taške Q. Įrodykite, kad $PQ \parallel AD$, ir raskite PQ.

16. $ABCD$ – kvadratas. Jo viduje nubrėžtas lygiakraštis trikampis ABE, o išorėje – lygiakraštis trikampis BCF.

a) Raskite $\angle EDC$ ir įrodykite, kad D, E, F yra vienoje tiesėje.
b) Taškas P kvadrato viduje toks, kad $\angle PDC = \angle PCD = 15°$. Įrodykite, kad trikampis ABP lygiakraštis.

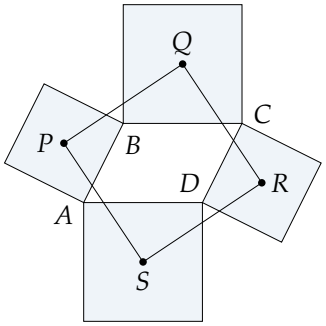
17. Trikampyje ABC $AB \neq AC$. Kraštinėje AB pažymėtas taškas D, kraštinėje AC – taškas E (ne viršūnės), $BD = CE$. M ir N – atkarpų BC ir DE viduriai. Įrodykite, kad tiesė MN sudaro lygius kampus su tiesėmis AB ir AC.

18. $ABCD$ – lygiagretainis, kurio kampas B bukasis. Lygiagretainio išorėje nubrėžti kvadratai $BCXY$ ir $CDUV$ (viršūnė Y – prie B, U – prie D). Įrodykite, kad trikampis AYU statusis ir lygiašonis.



Papildomi uždaviniai (norintiems)

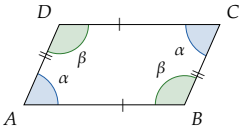
19. Ant lygiagretainio $ABCD$ visų kraštinių į išorę nubrėžti kvadratai; P, Q, R, S – kvadratų ant AB, BC, CD, DA centrai (įstrižainių susikirtimo taškai). Įrodykite, kad $PQRS$ – kvadratas.



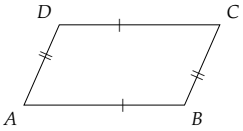
Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

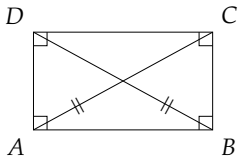
Įrankis 10 *(lygiagretainio savybės)* lygiagretainio priešingos kraštinės lygios, priešingi kampai lygūs, gretimų kampų suma 180°; įstrižainės dalija viena kitą pusiau



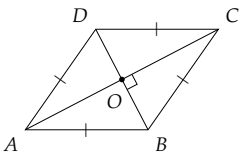
Įrankis 11 *(lygiagretainio požymiai)* iškilasis keturkampis – lygiagretainis, jei (a) priešingos kraštinės poromis lygios; (b) viena pora lygi ir lygiagreti; (c) įstrižainės dalija viena kitą pusiau; (d) priešingi kampai poromis lygūs



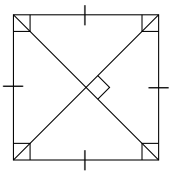
Įrankis 12 *(stačiakampis)* stačiakampis – lygiagretainis su lygiomis įstrižainėmis; lygiagretainis su stačiu kampu arba lygiomis įstrižainėmis – stačiakampis



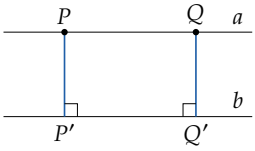
Įrankis 13 *(rombas)* rombas – lygiagretainis; įstrižainės statmenos ir dalija kampus pusiau; lygiagretainis su lygiomis gretimomis kraštinėmis arba statmenomis įstrižainėmis – rombas



Kvadratas *(stačiakampis ir rombas)* turi abiejų savybes; stačiakampis su rombo požymiu arba rombas su stačiakampio požymiu – kvadratas



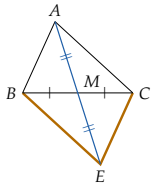
Išvada *(atstumas tarp lygiagrečių tiesių)* $a \parallel b \Rightarrow$ visi tiesės a taškai vienodai nutolę nuo b; ir atvirkščiai (taškai vienoje tiesės pusėje)



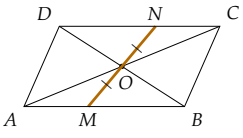
Technikų santrauka

Signalas → veiksmas. Šios technikos padeda rasti sprendimą.

T6 *(Užbaik iki lygiagretainio)* vidurys, pusiaukraštinė; reikia perkelti atkarpą ar kampą → užbaik iki lygiagretainio ir naudok jo savybes.



T7 *(Centras O)* lygiagretainis ir taškas $O \rightarrow O$ – abiejų įstrižainių vidurys; atkarpa per O tarp priešingų kraštinių dalijama pusiau.



Pratimų atsakymai

Pratimai 1. a) 30° ir 150°; b) 9 ($\angle E = 70°$, $\triangle DEF = \triangle ABC$); c) $CD = 7$, $\angle CDM = 28°$, $CD \parallel AB$;

Pratimai 3. a) $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle B = \angle D = 140°$; $AB = CD = 7$, $BC = AD = 10$; $BM = 7$, $MC = 3$; b) rombe visi keturi taškai sutampa su O – keturkampio nelieka; c) a) 60°; d) b) 7; e) b) ne visada (tik kai deltoidas – rombas);

Uždavinių atsakymai

1. 32.

2. a) įrodymas; b) 75°.

3. $AB = 10$, $\angle BAC = 65°$.

4. a) įrodymas; b) 65°.

5. 20; nepriklauso.

6. a) įrodymas – lapo gale; b) platforma lieka lygiagreti žemei, bet $ABCD$ – ne lygiagretainis.

7. 15°.

8. a) įrodymas – lapo gale; b) $\angle AMB = 45°$.

9. a), b) įrodymai – lapo gale; c) $\angle EBF = 70°$, $\angle BEF = \angle BFE = 55°$.

10. a) įrodymas – lapo gale; b) 20.

11. a) įrodymas – lapo gale; b) taip (įrodymas – lapo gale).

12. $AB = 9$.

13. a), b) įrodymai – lapo gale.

14. a), b) įrodymai – lapo gale.

15. $PQ = 4$ (nepriklauso nuo lygiagretainio kampų); įrodymas – lapo gale.

16. a) $\angle EDC = 15°$; a), b) įrodymai – lapo gale.

17. Įrodymas – lapo gale.

18. Įrodymas – lapo gale.

19. Įrodymas – lapo gale.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) Kam lygios atkarpos OA ir OB? 2) Iš trikampių perimetrų raskite AB ir BC.

2. 1) Kokie tai kampai prie tiesių AB, CD ir kirstinės BD? 2) Kuri kraštinių pora lygi ir lygiagreti? b) dalyje $\angle ADB$ perkelkite į $\angle DBC$.

3. 1) Koks lygiagretainis turi statmenas įstrižaines? 2) Ką jo įstrižainė daro su kampu A?

4. 1) Pusiaukraštinė ir atkarpos vidurys – kaip užbaigti lygiagretainį? 2) Pratęskite AM už M tiek pat: $MD = AM$. Koks keturkampis $ABDC$ ir ką jo įstrižainė AD daro su kampu A?

5. 1) Koks keturkampis $AEPF$? 2) Trikampyje BEP raskite du lygius kampus.

6. 1) Ką žinome apie keturkampio $ABCD$ įstrižaines? 2) b) dalyje trikampiai AOB ir COD – lygiašoniai; palyginkite jų kampus prie pagrindų.

7. 1) M – atkarpų BC ir AE vidurys: koks keturkampis $ABEC$? 2) Kurioms atkarpoms lygi CE? Koks trikampis CDE?

8. 1) Kam lygi gretimų kampų A ir D pusių suma? Ką duoda $AM = DM$? 2) a) Trikampio AMD kampai prie AD lygūs – po kiek laipsnių? b) Ieškokite lygiašonių trikampių ABM ir DCM (pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė).

9. 1) Dvi lygios aukštinės iš vienos viršūnės – kuri stačiųjų trikampių pora gali būti lygi? 2) a) Palyginkite stačiuosius trikampius ABE ir CBF. b) BD – rombo kampo B pusiaukampinė; kokia ji trikampiui BEF? c) Kam lygus $\angle EBF$ (Pratimai 3 c)?

10. 1) Atkarpa EF eina per įstrižainių susikirtimo tašką O – ką žinome apie OE ir OF? 2) a) $OE = OF$ ir $OB = OD$: keturkampį $BEDF$ atpažinkite iš jo įstrižainių. b) $BE = ED$ – iš a) arba iš lygių trikampių BOE ir DOE.

11. 1) Kaip atkarpą DE „perkelti“ ant AB? 2) Per E nubrėžkite tiesę, lygiagrečią BC; ji kerta AB taške F. Koks keturkampis $BDEF$?

12. 1) Kampai B ir D toli vienas nuo kito – perkelkite AB ir kampą B arčiau D. 2) Per C nubrėžkite tiesę, lygiagrečią AB; ji kerta AD taške E. Koks trikampis ECD?

13. 1) Pusiaukampinės lygiagretainyje – kurie kampai lygūs? 2) a) Palyginkite kampus AKB ir ADL. b) Kurią įstrižainę turi abu lygiagretainiai $ABCD$ ir $BLDK$?

14. 1) Koks keturkampis $AMCN$? 2) Jo ir lygiagretainio $ABCD$ bendra įstrižainė – AC.

15. 1) Pusiaukampinės lygiagretainyje – kokie trikampiai susidaro? Kur juose P ir Q? 2) Kampo A pusiaukampinė kerta BC taške K, kampo C – AD taške L: kur trikampiuose ABK ir CDL yra P ir Q? Kokie keturkampiai $AKCL$ ir $APQL$?

16. 1) Kurios atkarpos lygios kvadrato kraštinei? Kokie trikampiai susidaro? 2) a) Trikampiai ADE ir BEF lygiašoniai; sudėkite kampus prie E: $\angle DEA + \angle AEB + \angle BEF$. b) Kuris taškas jau turi tokius kampus?

17. 1) Lygios atkarpos BD ir CE toli viena nuo kitos – kaip jas sunešti į vieną tašką? 2) Iš M į taško A pusę nubrėžkite $MX \parallel AB$, $MX = BD$ ir $MY \parallel AC$, $MY = CE$. Trikampis MXY lygiašonis; įrodykite, kad N – atkarpos XY vidurys (koks keturkampis $DXEY$?).

18. 1) Prie B susieina AB ir BY, prie D – UD ir DA: kurios atkarpos lygios? 2) Įrodykite $\triangle ABY = \triangle UDA$ ir kampą YAU suskaidykite į tris kampus prie A.

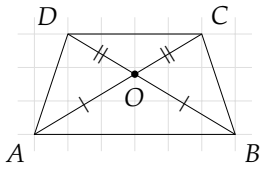
19. 1) Kvadrato centras duoda lygias atkarpas ir 45° kampus – ieškokite lygių trikampių su bendra viršūne Q. 2) Palyginkite trikampius PBQ ir RCQ. Pervadinkite viršūnes taip, kad $\angle B$ būtų bukasis, ir išreikškite $\angle PBQ$ ir $\angle RCQ$ per $\angle B$. Stačiakampį išnagrinėkite atskirai.

Pratimų ir sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

Pratimai 2 a)

Ne. Dvi atkarpos kertasi taške O, $OA = OB$, $OC = OD$, bet $OA \neq OC$. Tada $AC = BD$, bet įstrižainės nesidalija pusiau, todėl $ABCD$ – net ne lygiagretainis (lygiagretainio savybė), juo labiau ne stačiakampis. Teisinga, jei keturkampis – lygiagretainis (stačiakampio požymis).

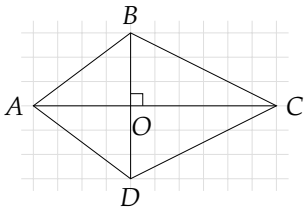


Pratimai 2 b)

Taip. Įstrižainės dalija viena kitą pusiau, todėl keturkampis – lygiagretainis (lygiagretainio požymis); lygiagretainis su lygiomis įstrižainėmis – stačiakampis (stačiakampio požymis).

Pratimai 2 c)

Ne. $AC \perp BD$ (langeliai), $OB = OD = 3$, bet $AO = 4 \neq OC = 6$: įstrižainės nesidalija pusiau, todėl tai net ne lygiagretainis (lygiagretainio savybė), juo labiau ne rombas. Toks keturkampis – deltoidas ($AB = AD$, $CB = CD$; žr. Pratimai 3 e). Teisinga, jei keturkampis – lygiagretainis (rombo požymis).

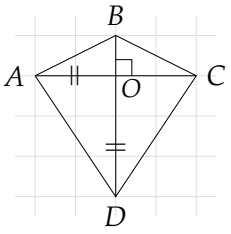


Pratimai 2 d)

Taip. Ketvirtasis kampas $360° - 3 \cdot 90° = 90°$ (keturkampio kampų suma): visi kampai statūs.

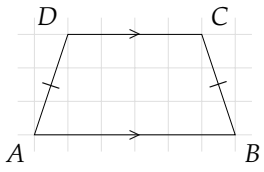
Pratimai 2 e)

Ne. $AC = BD = 4$ (langeliai), $AC \perp BD$, bet $OB = 1 \neq OD = 3$: įstrižainės nesidalija pusiau, todėl tai net ne lygiagretainis (lygiagretainio savybė).



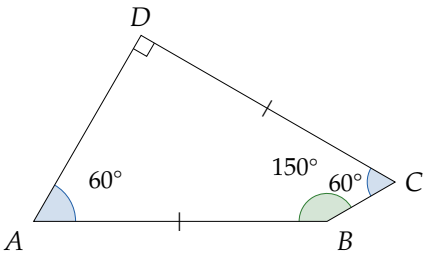
Pratimai 2 f)

Ne. Tas pats keturkampis kaip a): $AB \parallel CD$, $AD = BC$, bet $AB \neq CD$ (6 ir 4 langeliai), o lygiagretainio priešingos kraštinės lygios.

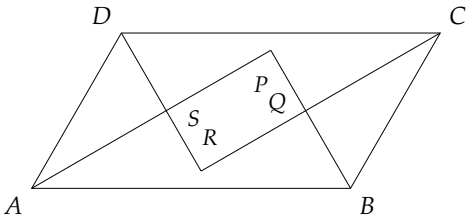


Pratimai 2 g)

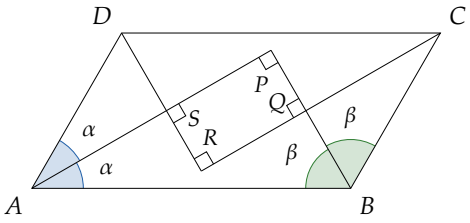
Trikampyje ABD kampas A yra tarp AB ir AD, o BD – prieš jį: tai dvi kraštinės ir kampas ne tarp jų, o tai ne trikampių lygumo požymis. Kontrpavyzdys: iškilasis keturkampis su kampais $60°, 150°, 60°, 90°$ ir $AB = CD$: $\angle A + \angle B = 210° \neq 180°$, todėl jis ne lygiagretainis (lygiagretainio savybė: gretimų kampų suma $180°$). Kaip jį gauti: trikampyje ABD $\angle A = 60°$, $\angle ABD = 45°$ (tada $\angle ADB = 75°$); atkarpoje AD imame E, kad $BE = BD$ ($\angle BED = 75°$, $\angle AEB = 105°$, $\angle ABE = 15°$); kitoje BD pusėje nubrėžiame $\triangle CDB = \triangle ABE$ ($CD = AB$, $DB = BE$, $CB = AE$). Tada $\angle C = 60°$, $\angle ABC = 45° + 105° = 150°$, $\angle D = 75° + 15° = 90°$.



Pratimai 3 b)



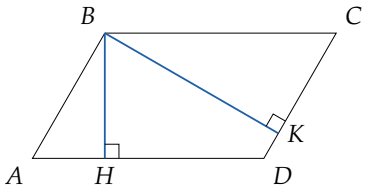
sąlyga



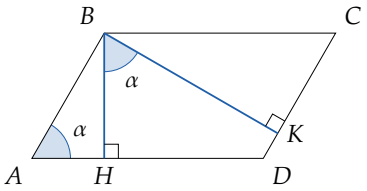
sprendimas

1. Pažymėkime $\angle BAP = \angle PAD = \alpha$, $\angle ABP = \angle PBC = \beta$ (pusiaukampinės). Tada $2\alpha + 2\beta = 180°$ (gretimų kampų suma), todėl $\angle APB = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$ (trikampio kampų suma). Taip pat $\angle BQC = \angle CRD = \angle DSA = 90°$ – pusiaukampinės kertasi stačiu kampu, todėl visi keturkampio $PQRS$ kampai statūs: jis stačiakampis.
2. Rombe įstrižainės dalija kampus pusiau (rombo savybė): A ir C pusiaukampinės – tiesė AC, B ir D – tiesė BD, todėl $P = Q = R = S = O$.

Pratimai 3 c)



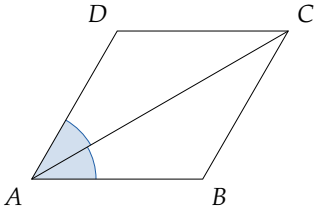
sąlyga



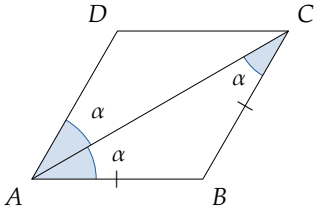
sprendimas

Pažymėkime $\angle A = \alpha$. Keturkampyje $BHDK$ kampai H ir K statūs, $\angle D = 180° - \alpha$ (gretimų kampų suma), todėl $\angle HBK = 360° - 180° - (180° - \alpha) = \alpha$ (keturkampio kampų suma).

Pratimai 3 d)



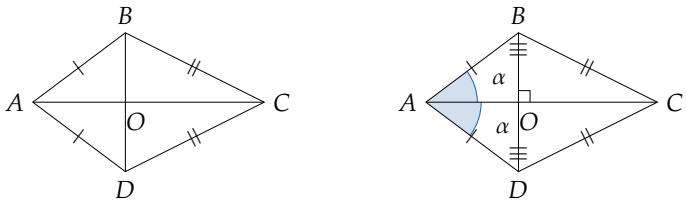
sąlyga



sprendimas

Pažymėkime $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$. Tada $\angle BCA = \angle CAD = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai, $AD \parallel BC$) $= \angle BAC$, todėl $BA = BC$ (lygiašonio trikampio požymis): $ABCD$ – rombas (rombo požymis: lygios gretimos kraštinės). b) $AB = 28 : 4 = 7$.

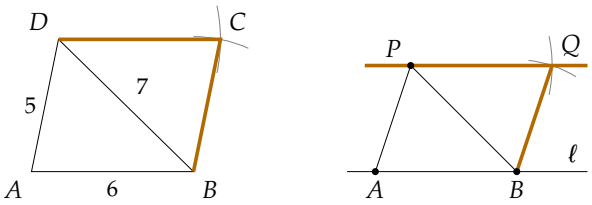
Pratimai 3 e)



sąlyga *sprendimas*

1. $\triangle ABC = \triangle ADC$ (trys kraštinės), todėl $\angle BAO = \angle DAO$; pažymėkime juos α.
2. AO – lygiašonio trikampio ABD pusiaukampinė, todėl ir aukštinė, ir pusiaukraštinė: $AC \perp BD$, $BO = OD$.
3. b) Ne visada: brėžinyje $AO \neq OC$. Rombe įstrižainės dalija viena kitą pusiau, o rombu nesančiame deltoide AC dalija BD pusiau, bet BD nedalija AC pusiau.

Pratimai 3 f)

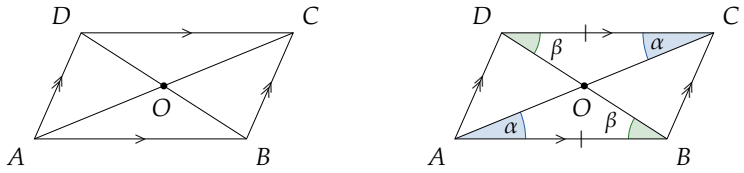


a) *b)*

a) Brėžiame $\triangle ABD$ pagal tris kraštines. Lankai iš B spinduliu 5 cm ir iš D spinduliu 6 cm kertasi taške C kitoje BD pusėje nei A. $AB = CD$, $BC = AD$, todėl $ABCD$ – lygiagretainis (požymis: priešingos kraštinės poromis lygios).

b) A, B – bet kurie tiesės ℓ taškai. Lankai iš P spinduliu AB ir iš B spinduliu AP kertasi taške Q kitoje tiesės BP pusėje nei A. $AB = PQ$, $BQ = AP$, todėl $ABQP$ – lygiagretainis (tas pats požymis) ir $PQ \parallel \ell$.

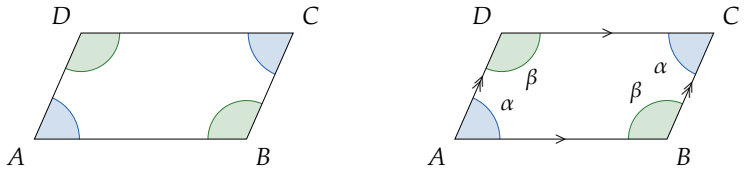
Pratimai 4 a)



sąlyga *sprendimas*

Pažymėkime $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBA = \beta$. Tada $\triangle AOB = \triangle COD$ (kraštinė ir du kampai: $AB = CD$ – lygiagretainio savybė; $\angle OAB = \angle OCD = \alpha$, $\angle OBA = \angle ODC = \beta$ – vidaus priešiniai kampai), todėl $OA = OC$, $OB = OD$.

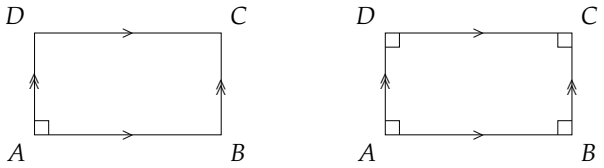
Pratimai 4 b)



sąlyga *sprendimas*

1. Pažymėkime $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = \angle D = \beta$. Tada $2\alpha + 2\beta = 360°$ (keturkampio kampų suma), todėl $\alpha + \beta = 180°$.
2. $\angle A + \angle B = 180°$, todėl $AD \parallel BC$; $\angle A + \angle D = 180°$, todėl $AB \parallel CD$ (lygiagretumo požymis: vienašaliai kampai).

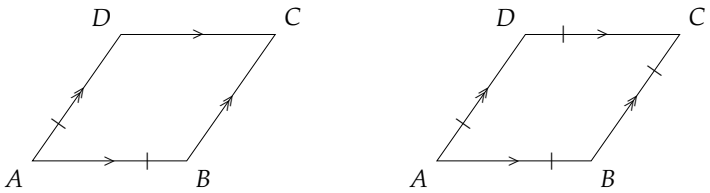
Pratimai 4 c)



sąlyga *sprendimas*

$\angle C = \angle A = 90°$ (priešingi kampai), $\angle B = \angle D = 180° - 90° = 90°$ (gretimų kampų suma). Visi kampai statūs.

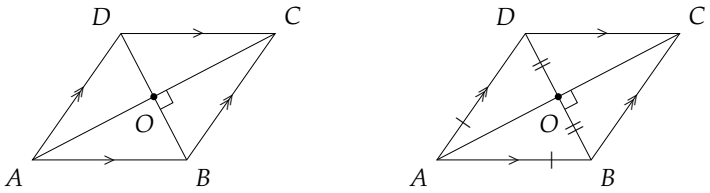
Pratimai 4 d)



sąlyga *sprendimas*

$AB = AD$ (sąlyga), $CD = AB$, $BC = AD$ (lygiagretainio savybė), todėl visos keturios kraštinės lygios.

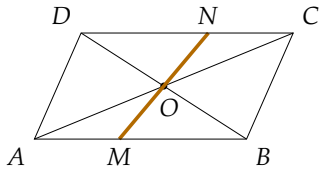
Pratimai 4 e)



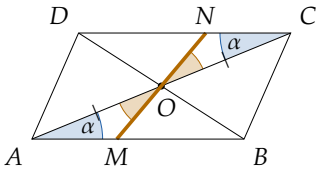
sąlyga *sprendimas*

$\triangle AOB = \triangle AOD$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $OB = OD$ – lygiagretainio savybė, AO bendra, $\angle AOB = \angle AOD = 90°$), todėl $AB = AD$. Toliau – d) pratimas.

Pratimai 4 f)



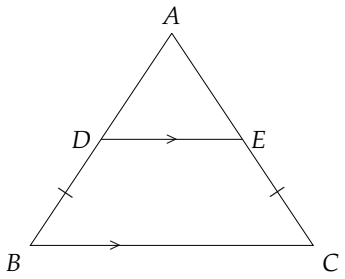
sąlyga



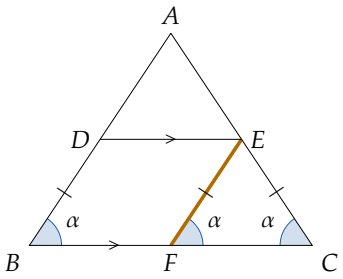
sprendimas

Pažymėkime $\angle OAM = \alpha$. Tada $\triangle OAM = \triangle OCN$ (kraštinė ir du kampai: $OA = OC$ – lygiagretainio savybė; $\angle OAM = \angle OCN = \alpha$ – vidaus priešiniai kampai; kampai prie O kryžminiai), todėl $OM = ON$.

Pratimai 5 a)



sąlyga

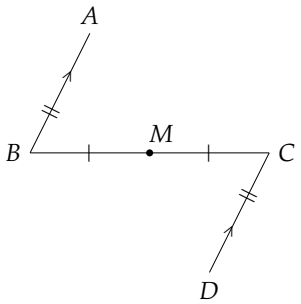


sprendimas

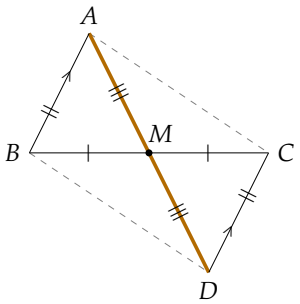
1. Nubrėžiame $EF \parallel AB$ ($F \in BC$). $DBFE$ – lygiagretainis ($DE \parallel BF$, $EF \parallel DB$; apibrėžimas), todėl $EF = BD = CE$ (lygiagretainio savybė).
2. Pažymėkime $\angle ECF = \alpha$. Tada $\angle EFC = \alpha$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo); $\angle ABC = \angle EFC$ (atitinkamieji kampai, $EF \parallel AB$), todėl $\angle B = \angle C$ ir $AB = AC$ (lygiašonio trikampio požymis).

2 lape $EF = BD$ gavome iš lygių trikampių BDE ir EFB; dabar – iš karto (lygiagretainio savybė).

Pratimai 5 b)



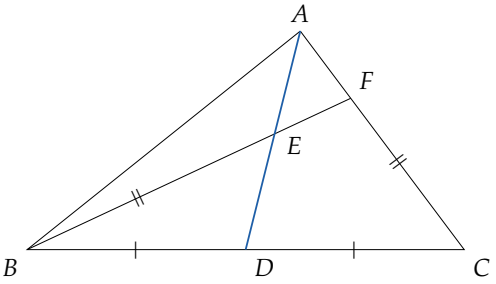
sąlyga



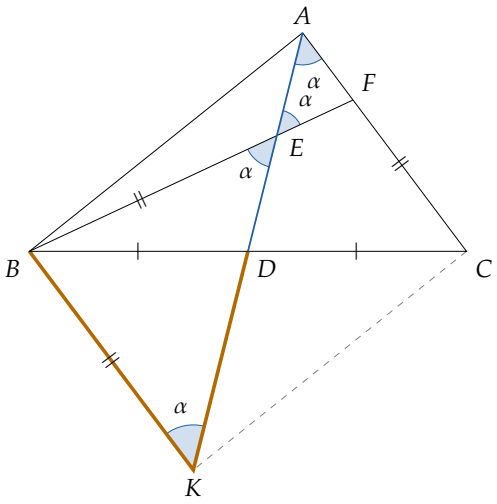
sprendimas

$AB = DC$, $AB \parallel DC$, A ir D – skirtingose tiesės BC pusėse, todėl $ABDC$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti), ir jo įstrižainės AD ir BC dalija viena kitą pusiau (lygiagretainio savybė): AD eina per BC vidurį M ir $AM = MD$. 2m lape prireikė lygių trikampių ABM ir DCM ir ištiestinio kampo.

Pratimai 5 c)



sąlyga

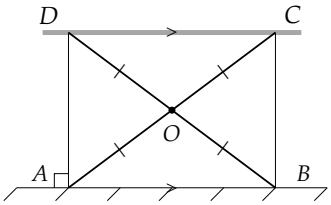


sprendimas

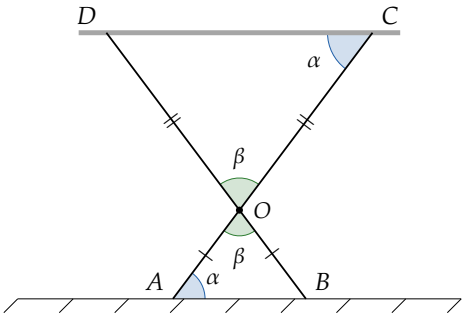
1. Pratęsiame AD už D: $DK = AD$. Kadangi $BD = DC$, $ABKC$ – lygiagretainis (požymis: įstrižainės dalija viena kitą pusiau): $BK = AC = BE$, $BK \parallel AC$ (lygiagretainio savybė).
2. Pažymėkime $\angle BKE = \alpha$. Tada $\angle BEK = \alpha$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo); $\angle CAK = \angle BKA$ (vidaus priešiniai kampai, $BK \parallel AC$); $\angle AEF = \angle BEK$ (kryžminiai kampai). Taigi $\angle FAE = \angle FEA = \alpha$ ir $AF = EF$ (lygiašonio trikampio požymis).

2 lape $BK = AC$ ir $\angle BKD = \angle CAD$ gavome iš lygių trikampių ADC ir KDB; dabar – lygiagretainio savybės.

6 uždavinys.



a) sprendimas



b) sprendimas

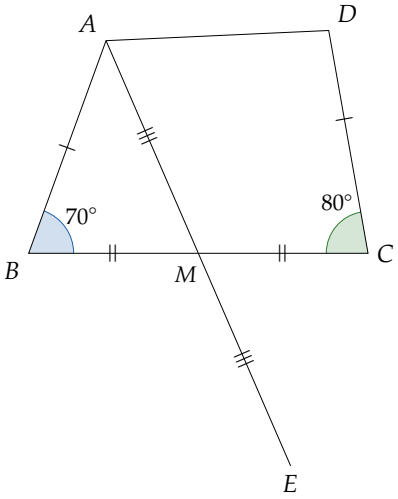
Ką matau. keturkampio $ABCD$ įstrižainės – strypai; a) dalyje jos lygios ir dalija viena kitą pusiau.

Idėja. keturkampį atpažįstame iš jo įstrižainių.

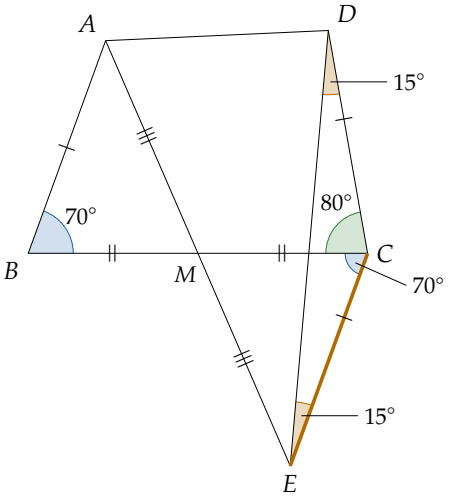
1. a) AC ir BD dalija viena kitą pusiau, todėl $ABCD$ – lygiagretainis (požymis: įstrižainės dalija viena kitą pusiau); jo įstrižainės lygios, todėl jis stačiakampis (stačiakampio požymis). Taigi $DC \parallel AB$.
2. Antro aukšto platforma lygiagreti DC (tas pats įrodymas), o $DC \parallel AB$, todėl ji lygiagreti ir AB, t. y. žemei.
3. b) Pažymėkime $\angle AOB = \beta$. Tada $\angle COD = \beta$ (kryžminiai kampai). Trikampiai AOB ir COD lygiašoniai, todėl jų kampai prie pagrindų lygūs; pažymėkime juos α. Tada $\alpha = (180^\circ - \beta) : 2$ (trikampio kampų suma).
4. $\angle OAB = \angle OCD = \alpha$ – vidaus priešiniai kampai, todėl $AB \parallel CD$ (lygiagretumo požymis): platforma lieka lygiagreti žemei.
5. Bet $AO \neq OC$, o lygiagretainio įstrižainės dalija viena kitą pusiau (lygiagretainio savybė). Taigi $ABCD$ – ne lygiagretainis.

Pamoka. keturkampį atpažįstame iš įstrižainių: dalija viena kitą pusiau – lygiagretainis, dar ir lygios – stačiakampis.

7 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

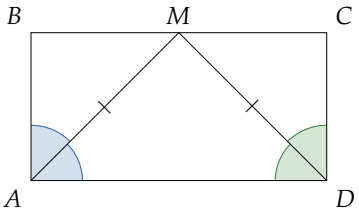
Ką matau. atkarpos BC vidurys M ir $ME = AM$.

Idėja (T6). $ABEC$ – lygiagretainis: kraštinė AB ir kampas B persikelia prie C.

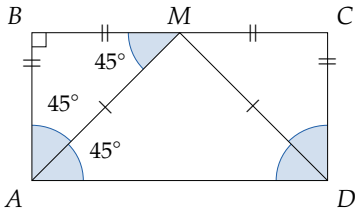
1. $ABEC$ – lygiagretainis (požymis: įstrižainės dalija viena kitą pusiau), todėl $CE = AB = CD$ ir $CE \parallel AB$.
2. $\angle BCE = \angle ABC = 70°$ (vidaus priešiniai kampai), todėl $\angle DCE = 80° + 70° = 150°$.
3. $\angle CDE = (180° - 150°) : 2 = 15°$ (lygiašonio trikampio CDE kampai prie pagrindo).

Pamoka. atkarpos vidurys – signalas užbaigti lygiagretainį (T6): jis atneša lygią atkarpą ir kampą ten, kur jų reikia.

8 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

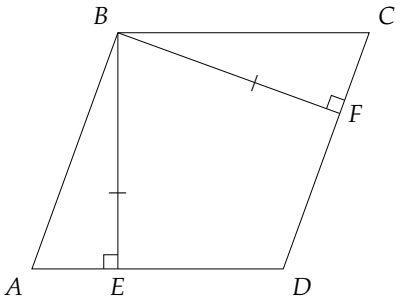
Ką matau. gretimų kampų A ir D pusiaukampinės; jos susikerta kraštinėje BC.

Idėja. gretimų kampų pusių suma 90°; pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė duoda lygiašonį trikampį.

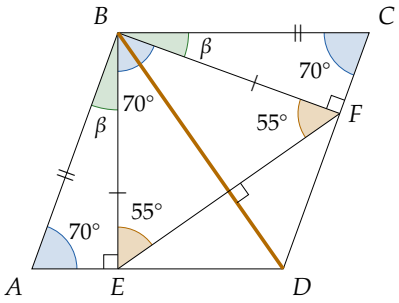
1. a) Pažymėkime $\angle DAM = \angle MAB = \alpha$ ir $\angle ADM = \angle MDC = \beta$ (pusiaukampinės). Tada $2\alpha + 2\beta = 180°$ (gretimų kampų suma), $\alpha + \beta = 90°$. $AM = DM$, todėl $\alpha = \beta$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo): $\alpha = \beta = 45°$.
2. $\angle A = 2\alpha = 90°$, todėl $ABCD$ – stačiakampis (stačiakampio požymis: status kampas).
3. b) $\angle AMB = \angle MAD$ (vidaus priešiniai kampai, $BC \parallel AD$) $= \angle BAM$, todėl $BM = AB$ (lygiašonio trikampio požymis). Taip pat $CM = CD$.
4. $AB = CD$ (lygiagretainio savybė), todėl $BM = CM$; $\angle AMB = \alpha = 45°$.

Pamoka. pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė – lygiašonis trikampis; lygiagretainiuose šis žingsnis kartojasi.

9 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

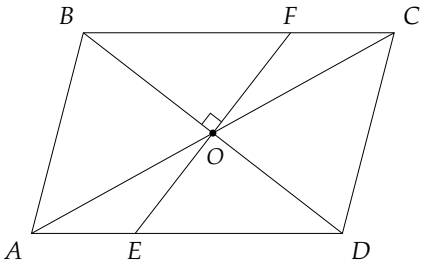
Ką matau. dvi lygios aukštinės iš vienos viršūnės.

Idėja. lygūs statieji trikampiai duoda lygias gretimas kraštines; rombo įstrižainė – pusiaukampinė.

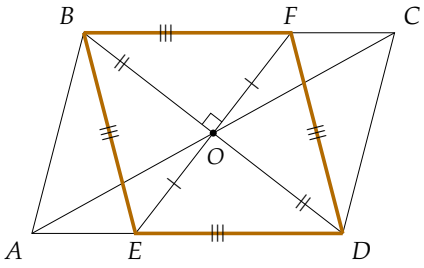
1. a) Pažymėkime $\angle A = \alpha$. Tada $\angle C = \alpha$ (lygiagretainio savybė), todėl $\angle ABE = \angle CBF = 90° - \alpha$ (trikampio kampų suma); pažymėkime šiuos kampus β.
2. $\triangle ABE = \triangle CBF$ (kraštinė ir du kampai: $BE = BF$, $\angle E = \angle F = 90°$, $\angle ABE = \angle CBF$), todėl $AB = CB$: $ABCD$ – rombas (rombo požymis: lygios gretimos kraštinės).
3. b) $\angle ABD = \angle CBD$ (rombo įstrižainė dalija kampą pusiau), todėl $\angle EBD = \angle FBD$: BD – lygiašonio trikampio BEF pusiaukampinė, todėl ir aukštinė, $BD \perp EF$.
4. c) $\angle EBF = \angle A = 70°$ (aukštinių iš bukojo kampo viršūnės kampas, Pratimai 3 c); $BE = BF$, todėl $\angle BEF = \angle BFE = (180° - 70°) : 2 = 55°$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo).

Pamoka. lygios aukštinės ⟶ lygūs statieji trikampiai ⟶ lygios gretimos kraštinės ⟶ rombas.

10 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

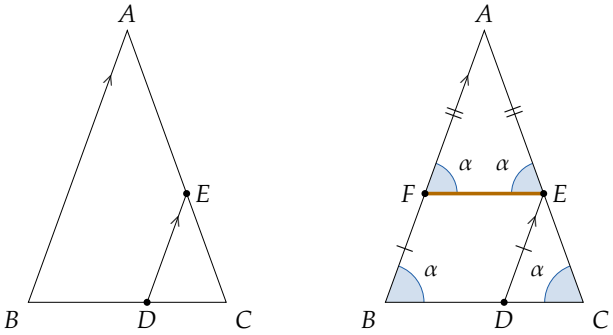
Ką matau. atkarpa EF eina per įstrižainių susikirtimo tašką O, jos galai – priešingose kraštinėse.

Idėja (T7). O – ir BD, ir EF vidurys; keturkampį $BEDF$ atpažįstame iš jo įstrižainių.

1. a) $OB = OD$ (lygiagretainio įstrižainės dalija viena kitą pusiau), $OE = OF$ (atkarpa per centrą O tarp priešingų kraštinių dalijama pusiau).
2. $BEDF$ – lygiagretainis (požymis: įstrižainės dalija viena kitą pusiau), jo įstrižainės statmenos, todėl jis rombas (rombo požymis).
3. b) $BE = ED$ (rombo kraštinės), todėl trikampio ABE perimetras $AB + AE + ED = AB + AD = 40 : 2 = 20$.

Pamoka. atkarpa per centrą O dalijama pusiau, todėl iš karto gauname naują lygiagretainį su ta pačia įstrižaine BD.

11 uždavinys.



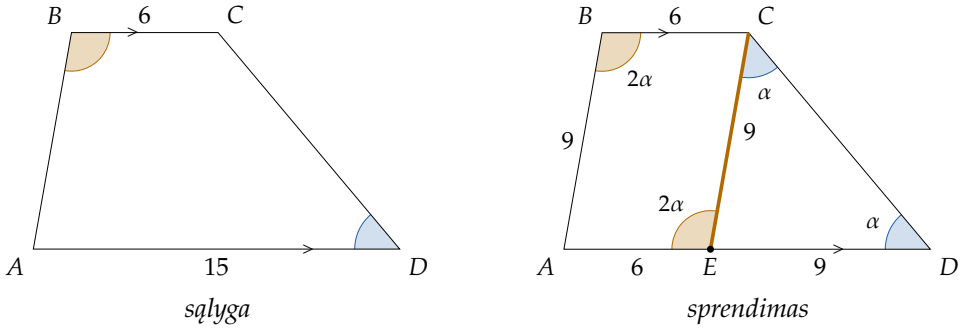
Ką matau. suma $AE + DE$ – dvi išsibarsčiusios atkarpos; $DE \parallel AB$.

Idėja (T6 (ii)). tiesė per E, lygiagreti BC, perkelia DE ant AB; lieka lygiašonis trikampis AFE.

1. a) $EF \parallel BC$ ($F \in AB$), todėl $BDEF$ – lygiagretainis (apibrėžimas), $BF = DE$ (lygiagretainio savybė), $AF = AB - DE = AE$.
2. Pažymėkime $\angle ABC = \alpha$. Tada $\angle AFE = \alpha$ (atitinkamieji kampai), $\angle AEF = \alpha$ (lygiašonio trikampio AFE kampai prie pagrindo) ir $\angle ACB = \alpha$ (atitinkamieji kampai), todėl $AB = AC$ (lygiašonio trikampio požymis).
3. b) Taip: $\angle EDC = \angle ABC$ (atitinkamieji kampai, $DE \parallel AB$) $= \angle ACB$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo), todėl $ED = EC$ (lygiašonio trikampio požymis) ir $AE+DE = AE+EC = AC = AB$.

Pamoka. lygiagreti tiesė „surenka“ išsibarsčiusias atkarpas į vieną: DE persikelia į BF nepakitusi.

12 uždavinys.



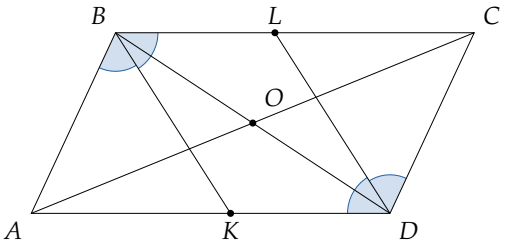
Ką matau. kampas B du kartus didesnis už kampą D – jie toli vienas nuo kito; $AD \parallel BC$.

Idėja (T6 (ii)). tiesė per C, lygiagreti AB, perkelia kraštinę AB ir kampą B prie D.

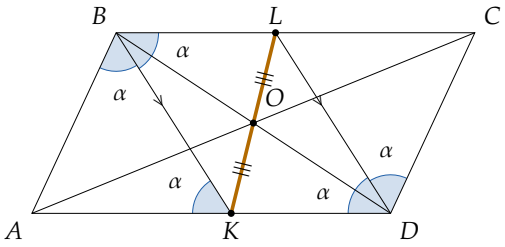
1. Pažymėkime $\angle ADC = \alpha$. Tada $\angle ABC = 2\alpha$. $CE \parallel AB$ ($E \in AD$), todėl $ABCE$ – lygiagretainis (apibrėžimas): $AE = BC = 6$, $CE = AB$, $\angle AEC = \angle ABC = 2\alpha$ (lygiagretainio savybės). $ED = 15 - 6 = 9$.
2. $\angle ECD = 2\alpha - \alpha = \alpha$ (trikampio ECD priekampis AEC), todėl $CE = ED = 9$ (lygiašonio trikampio požymis), $AB = CE = 9$.

Pamoka. lygiagretainis perkelia ir atkarpą, ir kampą; priekampis „atskleidžia“ lygiašonį trikampį.

13 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

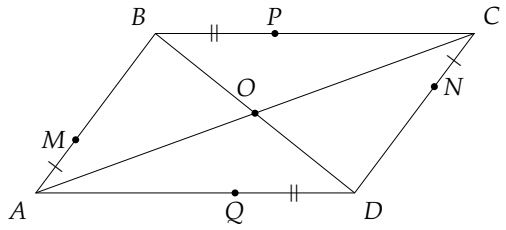
Ką matau. pusiaukampinės priešingų kampų B ir D; reikia trijų taškų vienoje tiesėje per O.

Idėja (T7). O – įstrižainės BD vidurys, o BD – ir lygiagretainio $BLDK$ įstrižainė.

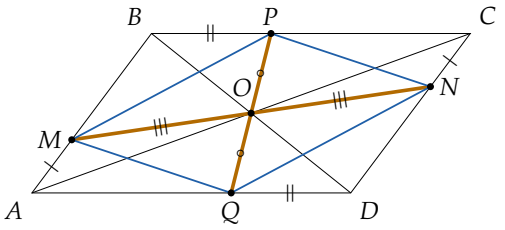
1. a) $\angle AKB = \angle KBC = \frac{1}{2}\angle B$ (vidaus priešiniai kampai, $AD \parallel BC$; pusiaukampinė), o $\frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle D = \angle ADL$ (lygiagretainio savybė; pusiaukampinė). Taigi $\angle AKB = \angle ADL$ (pažymėkime juos α), todėl $BK \parallel DL$ (lygiagretumo požymis: atitinkamieji kampai).
2. Be to, $KD \parallel BL$, todėl $BLDK$ – lygiagretainis (apibrėžimas). (Sąlyga $AD > AB$ – kad K būtų kraštinėje AD.)
3. b) O – įstrižainės BD vidurys (lygiagretainio $ABCD$ savybė). Lygiagretainio $BLDK$ įstrižainės BD ir KL dalija viena kitą pusiau, todėl KL eina per BD vidurį O ir $KO = OL$.

Pamoka. du lygiagretainiai su bendra įstrižaine turi tą patį centrą O – taip įrodome, kad trys taškai vienoje tiesėje.

14 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

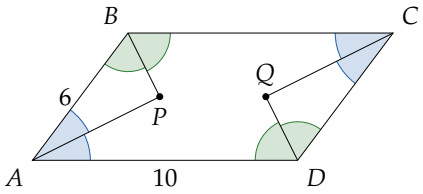
Ką matau. lygios atkarpos priešingose kraštinėse; reikia, kad tiesės eitų per O.

Idėja (T7). $AMCN$ ir $BPDQ$ – lygiagretainiai, kurių centras tas pats O.

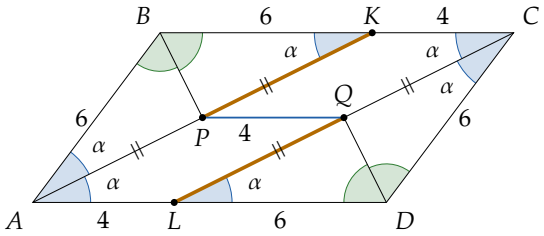
1. a) $AM = CN$, $AM \parallel CN$, todėl $AMCN$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti). Jo įstrižainės AC ir MN dalija viena kitą pusiau: MN eina per AC vidurį O, $MO = ON$.
2. Taip pat $BPDQ$ – lygiagretainis: PQ eina per BD vidurį O, $PO = OQ$.
3. b) $MPNQ$ įstrižainės dalija viena kitą pusiau, todėl $MPNQ$ – lygiagretainis (požymis).

Pamoka. atkarpa eina per O, jei ji – įstrižainė lygiagretainio, kurio kita įstrižainė yra AC arba BD.

15 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

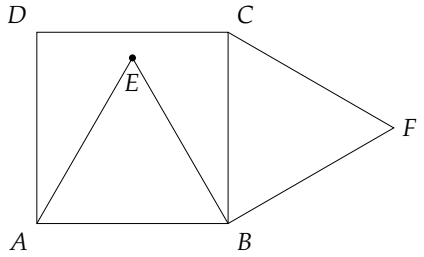
Ką matau. pusiaukampinės lygiagretainyje – lygiašoniai trikampiai; P ir Q – pusiaukampinių susikirtimo taškai.

Idėja (T6). du lygiagretainiai: $AKCL$, paskui $APQL$.

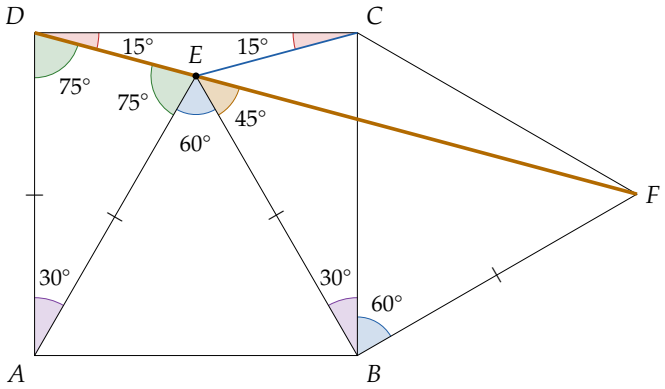
1. Kampo A pusiaukampinė kerta BC taške K, kampo C pusiaukampinė kerta AD taške L. Pažymėkime $\angle BAK = \alpha$. Tada $\angle KAD = \alpha$ (pusiaukampinė) ir $\angle BKA = \alpha$ (vidaus priešiniai kampai), todėl $BK = AB = 6$ (lygiašonio trikampio požymis); taip pat $DL = CD = 6$.
2. $KC = AL = 10 - 6 = 4$, $KC \parallel AL$, todėl $AKCL$ – lygiagretainis (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti): $AK = CL$, $AK \parallel CL$.
3. BP – lygiašonio trikampio ABK pusiaukampinė, todėl ir pusiaukraštinė: P – atkarpos AK vidurys. Taip pat Q – atkarpos CL vidurys.
4. $AP = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}CL = LQ$, $AP \parallel LQ$, todėl $APQL$ – lygiagretainis (tas pats požymis): $PQ \parallel AD$, $PQ = AL = 4$.

Pamoka. $PQ = AD - AB$ bet kokiam lygiagretainio kampui. (Ryšys su Pratimais 3 b: PQ – ten gauto stačiakampio įstrižainė.)

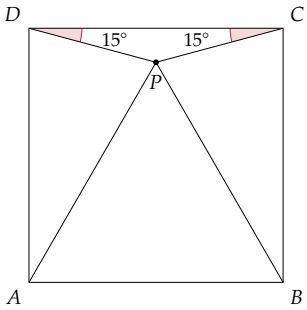
16 uždavinys.



sąlyga



sprendimas



b) dalies sąlyga

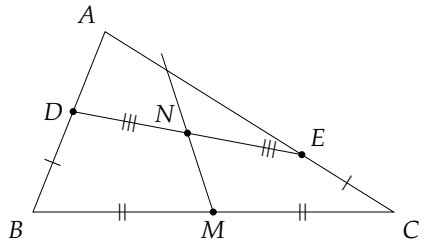
Ką matau. kvadrato kraštinei lygios AE, BE, BF – du lygiašoniai trikampiai su viršūnėmis A ir B.

Idėja. trys taškai vienoje tiesėje: kampų prie vidurinio taško E suma $180°$.

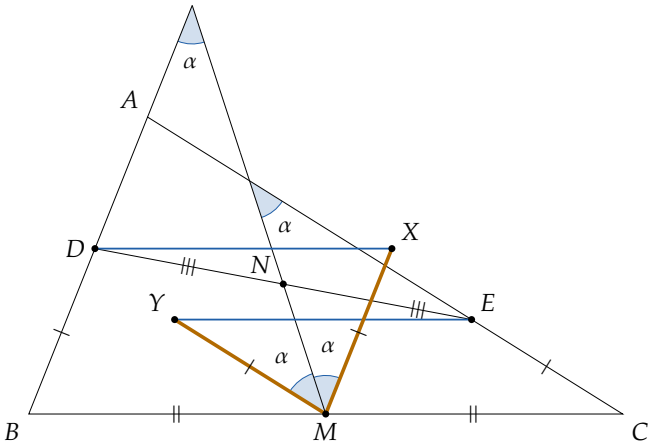
1. a) $AE = AB = AD$, $\angle DAE = 90° - 60° = 30°$, todėl $\angle ADE = \angle AED = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$ (lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo); $\angle EDC = 90° - 75° = 15°$.
2. $BE = BA = BC = BF$, $\angle EBF = 30° + 60° = 90°$, todėl $\angle BEF = 45°$ (kampai prie pagrindo).
3. $\angle DEA + \angle AEB + \angle BEF = 75° + 60° + 45° = 180°$, todėl D, E, F – vienoje tiesėje.
4. b) Taip pat $\angle ECD = 15°$ ($BE = BC$, $\angle EBC = 30°$ – kaip pirmajame žingsnyje). Spinduliai iš D ir iš C, sudarantys su DC po $15°$, kertasi vienname taške, todėl $P = E$ ir trikampis ABP lygiakraštis.

Pamoka. trys taškai vienoje tiesėje $\Leftrightarrow$ kampai prie vidurinio taško sudaro $180°$. b) dalis – „atvirkščias“ uždavinys: tašką atpažįstame iš jau žinomų kampų.

17 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

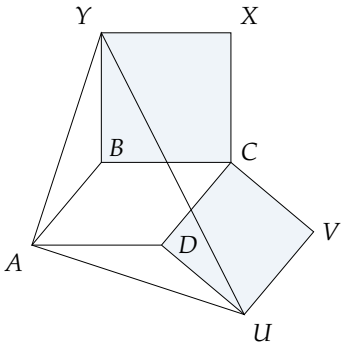
Ką matau. lygios atkarpos BD ir CE toli viena nuo kitos; du viduriai M ir N.

Idėja (T6 (ii) du kartus). BD ir CE perkeliame į tašką M; lieka lygiašonis trikampis MXY su pusiaukraštine MN.

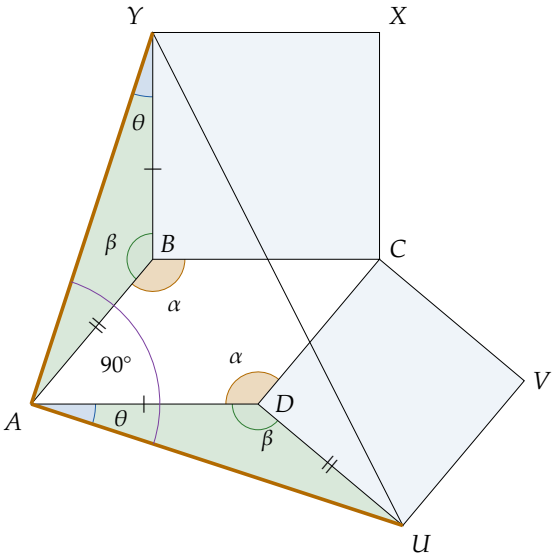
1. Iš M į taško A pusę brėžiame $MX \parallel AB$, $MX = BD$ ir $MY \parallel AC$, $MY = CE$. $BDXM$ ir $CEYM$ – lygiagretainiai (požymis: viena pora lygi ir lygiagreti): $DX = BM$, $DX \parallel BC$; $EY = CM$, $EY \parallel BC$.
2. $DX = BM = CM = EY$, $DX \parallel EY$, todėl $DXEY$ – lygiagretainis (tas pats požymis); jo įstrižainės DE ir XY dalija viena kitą pusiau: N – ir XY vidurys.
3. $MX = BD = CE = MY$, todėl MN – lygiašonio trikampio MXY pusiaukraštinė, o kartu ir pusiaukampinė (lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė iš viršūnės – ta pati atkarpa): $\angle NMX = \angle NMY$; pažymėkime juos α.
4. $MX \parallel AB$, $MY \parallel AC$, todėl tiesė MN sudaro su AB ir su AC kampus, lygius α (atitinkamieji kampai).

Pamoka. dvi lygias, bet toli esančias atkarpas lygiagretainiai „suneša“ į vieną tašką – atsiranda lygiašonis trikampis. ($AB \neq AC$ – kad $DXEY$ neišsigimtų.)

18 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

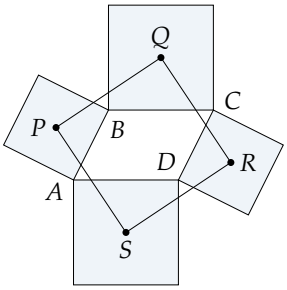
Ką matau. kvadratai lygiagretainio išorėje: daug lygių atkarpų ir stačiųjų kampų; reikia lygių kraštinių ir stačiojo kampo.

Idėja. lygūs trikampiai ABY ir UDA (dvi kraštinės ir kampas tarp jų); kampą YAU surenkame iš trijų dalių.

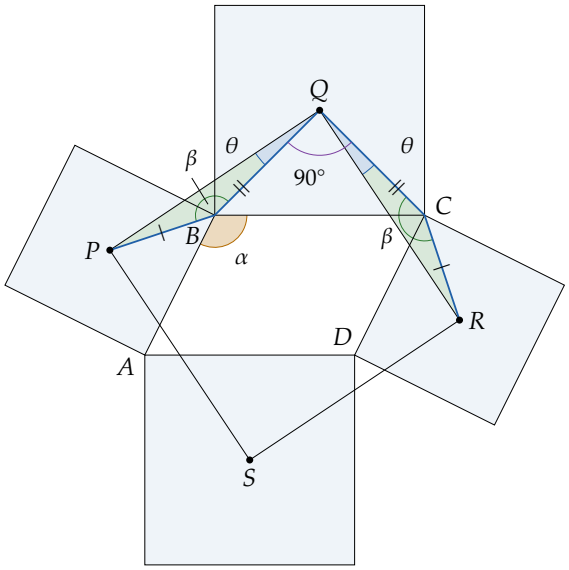
1. $BY = BC = AD$, $DU = DC = AB$ (kvadratų kraštinės; lygiagretainio savybė).
2. Pažymėkime $\angle ABC = \alpha$. Tada $\angle ADC = \alpha$ (lygiagretainio savybė). Pažymėkime $\angle ABY = \beta$; tada $\beta = 360^\circ - 90^\circ - \alpha$ ir $\angle UDA = \beta$ (kampai aplink tašką).
3. $\triangle ABY = \triangle UDA$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $AY = UA$ ir $\angle BYA = \angle DAU$; pažymėkime juos θ.
4. $\angle YAU = \angle YAB + \angle BAD + \angle DAU = (\angle YAB + \theta) + (180^\circ - \alpha) = (180^\circ - \beta) + 180^\circ - \alpha = 90^\circ$ (trikampio ABY kampų suma; gretimų kampų suma).

Pamoka. lygūs trikampiai „pasuka“ kraštinę AY į AU; kampą surenkame iš dalių. (Kai $\angle B$ smailusis, $\beta = 90^\circ + \alpha$ ir kampai prie A išsidėsto kitaip – todėl sąlygoje „bukasis“.)

19 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. keturi kvadratai ir jų centrai: daug lygių atkarpų ir 45° kampų.

Idėja. lygūs trikampiai PBQ ir RCQ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų) „pasuka“ QP į QR.

1. $PB = RC$ (lygių kvadratų įstrižainių pusės, $AB = CD$), $QB = QC$ (kvadrato įstrižainės lygios ir dalija viena kitą pusiau).
2. Stačiakampis: P, B, Q ir R, C, Q – vienoje tiesėje ($45° + 90° + 45° = 180°$), todėl $QP = QB + BP = QC + CR = QR$, $\angle PQR = \angle BQC = 90°$.
3. Kitaip viršūnes pervadiname taip, kad $\angle ABC$ būtų bukasis; pažymėkime jį α. Pažymėkime $\angle PBQ = \beta$; tada $\beta = 360° - 45° - \alpha - 45° = 270° - \alpha$ (kampai aplink tašką B; kvadrato įstrižainė dalija kampą pusiau); $\angle RCQ = 45° + (180° - \alpha) + 45° = 270° - \alpha = \beta$ (gretimų kampų suma).
4. $\triangle PBQ = \triangle RCQ$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $QP = QR$ ir $\angle PQB = \angle RQC$; pažymėkime juos θ.
5. $\angle PQR = \theta + \angle BQR = \angle RQC + \angle BQR = \angle BQC = 90°$ (kvadrato įstrižainės statmenos).
6. Taip pat prie kitų viršūnių: $PQ = QR = RS = SP$ – rombas su stačiu kampu, t. y. kvadratas.

Pamoka. lygūs trikampiai su bendra viršūne Q pasuka vieną kraštinę į kitą 90° kampu; išsigimusį atvejį (stačiakampį) patikriname atskirai.