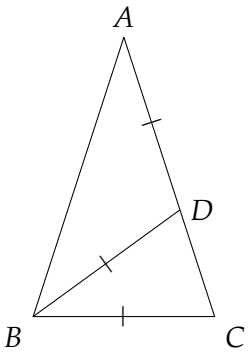
Geometrija

Lapas 2. Lygių trikampių metodas I: lygūs trikampiai ir lygiašonis trikampis

9 klasė

Klausimas pradžiai. Trikampyje ABC $AB = AC$, o taškas D – kraštinės AC vidinis taškas, ir $BD = BC = AD$. Koks kampas A?
Nė vieno kampo didumas neduotas – tik lygios atkarpos. Atsakymas – 1 pavyzdyje.

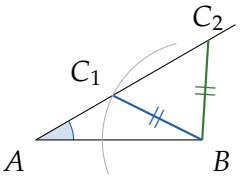


1. Nuo ko pradedame

Priimame be įrodymo

Du trikampiai lygūs, jei lygūs:
1. dvi kraštinės ir **kampas tarp jų**;
2. kraštinė ir **du kampai prie jos**;
3. trys kraštinės.
Pagrindimuose rašome tais pačiais žodžiais, pvz., „(dvi kraštinės ir kampas tarp jų)“. Lygių trikampių atitinkamosios kraštinės ir atitinkamieji kampai lygūs. Raidžių tvarka rodo atitikimą: $\triangle ABC = \triangle KLM$ reiškia $A \leftrightarrow K$, $B \leftrightarrow L$, $C \leftrightarrow M$.
Pastaba. Jei lygios dvi kampų poros, lygūs ir tretieji (trikampio kampų suma), todėl 2 požymiui tinka kraštinė ir **bet kurie** du kampai (rašome „(kraštinė ir du kampai)“).

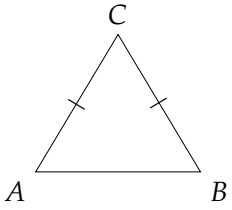
Dėmesio. „dvi kraštinės ir kampas *ne tarp jų*“ – **ne požymis**. Trikampiuose ABC_1 ir ABC_2 kraštinė AB ir kampas A bendri, $BC_1 = BC_2$, bet trikampiai skirtingi.



2. Lygiašonis trikampis

Įrankis 6 (kampai prie pagrindo)

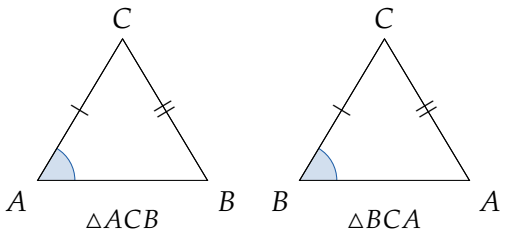
Jei $CA = CB$, tai $\angle A = \angle B$: lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

Lyginame trikampį su juo pačiu, tik perskaitytu kita tvarka.

1. $CA = CB$ ir $CB = CA$ (sąlyga), $\angle C$ bendras.
2. $\triangle ACB = \triangle BCA$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų).
3. Atitinkamieji kampai: $\angle A = \angle B$.



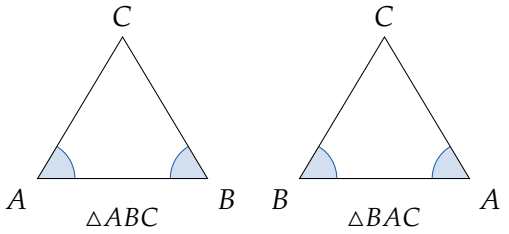
■

Įrankis 7 (lygiašonio požymis)

Jei $\angle A = \angle B$, tai $CA = CB$: trikampis su dviem lygiais kampais – lygiašonis.

Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. $\angle A = \angle B$ ir $\angle B = \angle A$ (sąlyga), AB bendra.
2. $\triangle ABC = \triangle BAC$ (kraštinė ir du kampai prie jos).
3. Atitinkamosios kraštinės: $CA = CB$.

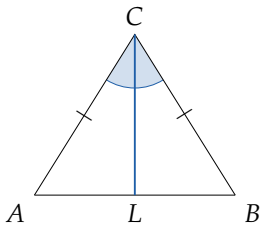


■

Išvada (pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė). Jei BL – trikampio ABC kampo B pusiaukampinė, o tiesė per L, lygiagreti BC, kerta AB taške K, tai $KB = KL$: $\angle KLB = \angle LBC = \angle KBL$ (vidaus priešiniai; pusiaukampinė).

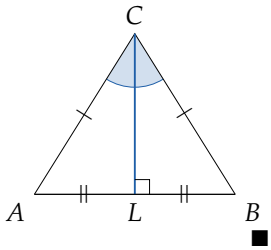
Įrankis 8 (lygiašonio pusiaukampinė)

Lygiašonio trikampio ($CA = CB$) pusiaukampinė CL yra ir pusiaukraštinė, ir aukštinė. Tai ta pati atkarpa: ir pusiaukraštinė, ir aukštinė iš viršūnės C yra pusiaukampinė (pagrindo vidurys ir statmuo iš C – vieninteliai).



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. $CA = CB$, $\angle ACL = \angle BCL$, CL bendra, todėl $\triangle ACL = \triangle BCL$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų).
2. $AL = BL$ (atitinkamosios kraštinės): CL – pusiaukraštinė.
3. $\angle ALC = \angle BLC$ ir jų suma 180° (gretutiniai), todėl abu po 90°: CL – aukštinė.



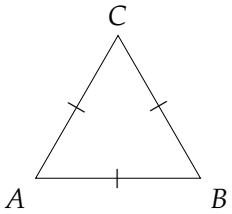
■

Atvirkščiai: kada trikampis lygiašonis

Iš vienos viršūnės sutampa	**Kodėl trikampis lygiašonis**
aukštinė ir pusiaukraštinė	abi dalys – lygūs trikampiai (dvi kraštinės ir kampas tarp jų)
aukštinė ir pusiaukampinė	abi dalys – lygūs trikampiai (kraštinė ir du kampai prie jos)
pusiaukraštinė ir pusiaukampinė	sunkiau – 2 pavyzdys

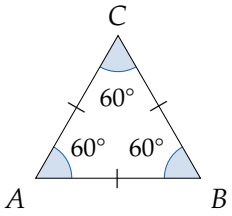
Įrankis 9 (lygiakraštis trikampis)

Lygiakraščio trikampio visi kampai po 60°. Ir atvirkščiai: lygiašonis trikampis su 60° kampu – lygiakraštis.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. Kiekviena kraštinių pora lygi, todėl kiekviena kampų pora lygi (kampai prie pagrindo); suma 180° – po 60°.
2. Atvirkščiai: jei 60° yra kampas prie pagrindo, kitas toks pat; jei prieš pagrindą – kiti po $\frac{180°-60°}{2} = 60°$. Visi kampai lygūs, todėl visos kraštinės lygios (lygiašonio požymis).



■

3. Ar teisingas atvirkščias teiginys?

Sukeitę teiginio „jei . . . , tai . . .“ sąlygą ir išvadą, gauname **atvirkščią teiginį**. Jis gali būti klaidingas; tam įrodyti pakanka vieno **kontrpavyzdžio** – atvejo, kai nauja sąlyga teisinga, o nauja išvada – ne. Kelis atvirkščius teiginius jau įrodėme: Įrankis 7 (lygiašonio požymis) yra atvirkščias Įrankiui 6, lentelė „Atvirkščiai: kada trikampis lygiašonis“ – Įrankiui 8, o Įrankio 9 dalis „ir atvirkščiai“ – jo pirmajai daliai.

Pratimai 1. Ar teisinga? Jei ne – nurodykite kontrpavyzdį; jei taip – pagrįskite (atsakymai – lapo gale).

a) Lygių trikampių atitinkamieji kampai lygūs. Atvirkščiai: jei dviejų trikampių atitinkamieji kampai lygūs, tai trikampiai lygūs.
Užuomina: ar gali du lygiakraščiai trikampiai būti nelygūs?

b) Išvadoje „pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė“ (taškas K yra kraštinėje AB, taškas L – kraštinėje AC) iš dviejų faktų – BL yra pusiaukampinė ir $KL \parallel BC$ – gaunamas trečiasis: $KB = KL$. Ar teisinga, kad bet kurie du iš šių trijų faktų lemia trečiąjį?
Užuomina: kiekvienas faktas reiškia, kad du iš kampų KBL, KLB, LBC lygūs.

c) Trikampio visos kraštinės lygios tada ir tik tada, kai lygūs visi jo kampai (lygiakraštis trikampis). Ar teisinga: „Keturkampio visos kraštinės lygios tada ir tik tada, kai lygūs visi jo kampai“?
Užuomina: kiekvienai krypčiai ieškokite atskiro keturkampio.

4. Technikos

Technika T3. Lygūs trikampiai

Signalas: reikia įrodyti, kad dvi atkarpos ar du kampai lygūs.
Veiksmas: rask du trikampius, kuriuose jie yra atitinkami, ir įrodyk, kad trikampiai lygūs. Ieškok bendros kraštinės, kryžminių kampų, lygių šoninių kraštinių. Nėra tinkamų trikampių – sukurk (T4, T5).
Pastaba. Du lygiakraščiai trikampiai su bendra viršūne C ($CA = CE$, $CB = CD$) – sujunk „kryžmai“ ir ieškok trikampių ACD ir ECB su lygiais kampais prie C: kai abu lygiakraščiai pasukti ta pačia kryptimi, šie kampai lygūs (60° ir tas pats bendras kampas – pridėtas ar atimtas), todėl trikampiai lygūs (dvi kraštinės ir kampas tarp jų); jie „pasukti“ vienas kito atžvilgiu.

Technika T4. Pusiaukraštinė dvigubai

Signalas: pusiaukraštinė, o reikia lyginti kraštines ar kampus.
Veiksmas: trikampio ABC pusiaukraštinę AM pratęsk už M tiek pat ($ME = AM$). Trikampiai ABM ir ECM lygūs (dvi kraštinės ir kampas tarp jų; kampai prie M kryžminiai).

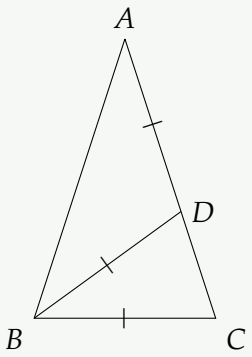
Technika T5. Atidėk lygią atkarpą

Signalas: atkarpų suma ar skirtumas (pvz., $BC = AC + AL$).
Veiksmas: suma – pratęsk vieną atkarpą kita, kad gautum *vieną* atkarpą; skirtumas – atidėk trumpesnę ant ilgesnės. Tada ieškok lygių ar lygiašonių trikampių.

5. Pavyzdžiai

Pavyzdys 1 (auksinis trikampis)

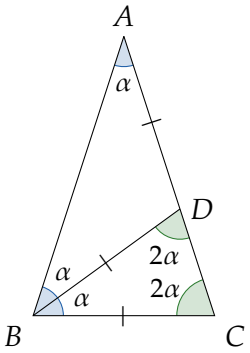
Trikampyje ABC $AB = AC$, D – kraštinės AC vidinis taškas, $BD = BC = AD$. Raskite $\angle A$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. trys lygiašoniai trikampiai: ABC, ABD, BCD.

Idėja (T1). pažymėkime $\angle A = \alpha$; kitus kampus išreiškiame kampu α, keliaudami per lygiašonius trikampius.



Sprendimas.

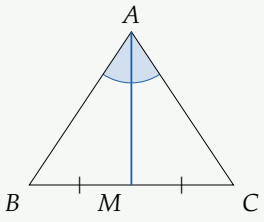
1. $\angle ABD = \alpha$ (kampai prie pagrindo, $AD = BD$).
2. $\angle BDC = 2\alpha$ (trikampio ABD priekampis).
3. $\angle BCD = \angle BDC = 2\alpha$ (kampai prie pagrindo, $BC = BD$); $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha$ (kampai prie pagrindo, $AB = AC$).
4. $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$ (trikampio ABC kampų suma), $\alpha = 36°$.

Pamoka. dvi lygios atkarpos su bendru galu – du lygūs kampai; grandinę jungia priekampiai.

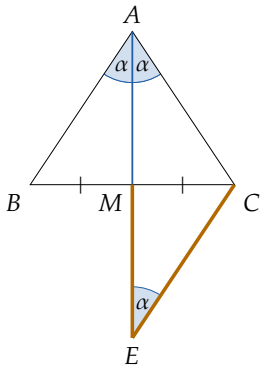
Trikampis su kampais 36°, 72°, 72° vadinamas **auksiniu**: BD jį padalija į lygiašonį ABD ir vėl auksinį BCD, o $AC = AD + DC = BC + DC$. Kodėl „auksinis“ – sužinosime vėliau.

Pavyzdys 2 (pusiaukraštinė, kuri yra ir pusiaukampinė)

Trikampio ABC pusiaukraštinė AM yra ir pusiaukampinė. Įrodykite, kad $AB = AC$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Ką matau. trikampiuose ABM ir ACM lygios dvi kraštinės ir kampas *ne tarp jų* – tai ne požymis.

Idėja (T4). pratęsiame AM už M: $ME = AM$.

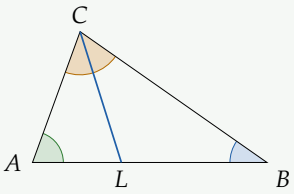
Sprendimas.

1. Pažymėkime $\angle BAM = \angle CAM = \alpha$ (AM – pusiaukampinė).
2. $\triangle ABM = \triangle ECM$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $BM = MC$, $AM = ME$, kryžminiai kampai), todėl $AB = EC$ ir $\angle MEC = \angle BAM = \alpha$.
3. Trikampyje ACE: $\angle CAE = \angle CEA = \alpha$, todėl $CA = CE$ (lygiašonio požymis).
4. $AB = EC = AC$.

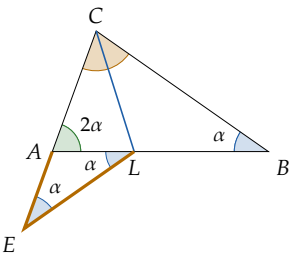
Pamoka. pratęsimas sukūrė trikampius, kuriems tinka požymis.

Pavyzdys 3 (atkarpų suma)

Trikampyje ABC $\angle A = 2\angle B$, CL – pusiaukampinė. Įrodykite, kad $BC = AC + AL$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Ką matau. suma $AC + AL$ – dvi atkarpos, kurių nėra vienoje tiesėje.

Idėja (T5). pratęsiame CA už A iki E, kad $AE = AL$; tada $CE = AC + AL$ ir lieka įrodyti $CE = CB$.

Sprendimas.

1. Pažymėkime $\angle B = \alpha$; tada $\angle A = 2\alpha$.
2. $\angle AEL = \angle ALE$ (kampai prie pagrindo, $AE = AL$), jų suma 2α (priekampis), todėl kiekvienas iš jų lygus α.
3. $\triangle ECL = \triangle BCL$ (kraštinė ir du kampai: CL bendra, $\angle E = \angle B = \alpha$, $\angle ECL = \angle BCL$ – pusiaukampinė), todėl $CE = CB$, t. y. $BC = AC + AL$.

Pamoka. suma – sudėk į vieną atkarpą; kampas 2α „siurbia“ du kampus, lygius α.

6. Pratimai

Pratimai 2. Atsakykite.

a) $\triangle ABC = \triangle KLM$. Kuri kraštinė lygi KM? Kuris kampas lygus $\angle B$?
b) Kuriuo požymiu lygūs trikampiai ABC ir DEF, jei: (1) $AB = DE$, $BC = EF$, $\angle B = \angle E$; (2) $\angle A = \angle D$, $AB = DE$, $\angle B = \angle E$; (3) $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$; (4) $AB = DE$, $BC = EF$, $\angle A = \angle D$?
c) Raskite klaidą: „$AB = DE$, $AC = DF$, $\angle B = \angle E$, todėl $\triangle ABC = \triangle DEF$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų).“
d) Lygiašonio trikampio kampas prieš pagrindą $40°$. Raskite kitus kampus.
e) Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo $25°$. Raskite kampą prieš pagrindą.
f) Lygiašonio trikampio vienas kampas $70°$. Kokie gali būti kiti? O jei jis $100°$?
g) Trikampio du kampai $50°$ ir $80°$. Ar jis lygiašonis?

Uždaviniai

Jei brėžinio nėra, nusibraižykite patys.

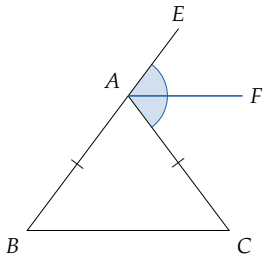
1. Trikampyje ABC $AB = AC$, $\angle B = 40°$. Kraštinėje BC pažymėtas taškas D, kad $AD = DC$. Raskite $\angle BAD$.

2. Trikampis ABC lygiakraštis. Kraštinės BC tęsinyje už taško C pažymėtas taškas D, kad $CD = CA$. Raskite $\angle BAD$.

3. Trikampio ABC pusiaukraštinė AM yra ir aukštinė. Įrodykite, kad $AB = AC$.

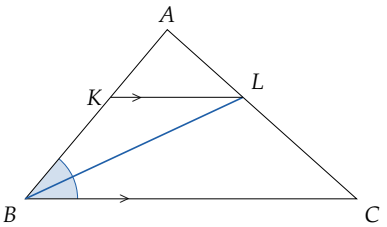
4.

Trikampyje ABC $AB = AC$. Taškas E – kraštinės BA tęsinyje už A, spindulys AF – kampo CAE pusiaukampinė. Įrodykite, kad $AF \parallel BC$.



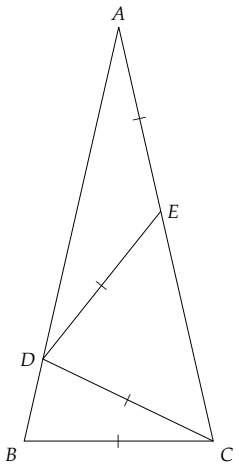
5.

BL – trikampio ABC pusiaukampinė. Per L nubrėžta tiesė, lygiagreti BC, kerta AB taške K. $AB = 10$, $KL = 6$. Raskite AK.



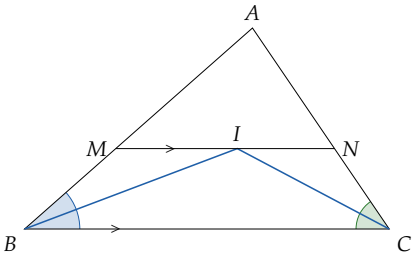
6.

Trikampyje ABC $AB = AC$. Kraštinėje AB pažymėtas taškas D, kraštinėje AC – taškas E, kad $AE = ED = DC = CB$. Raskite $\angle A$.



7.

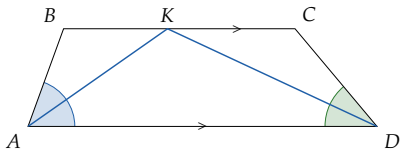
Trikampio ABC kampų B ir C pusiaukampinės kertasi taške I. Per I nubrėžta tiesė, lygiagreti BC, kerta AB taške M, o AC – taške N. $AB = 10$, $AC = 8$. Raskite trikampio AMN perimetrą.



8. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $AB = AD$, $CB = CD$, $\angle BAD = 80°$, $\angle BCD = 120°$. Raskite $\angle ABC$.

9.

Trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$) kampų A ir D pusiaukampinės kertasi taške K, esančiame pagrinde BC. Įrodykite, kad $BC = AB + CD$.



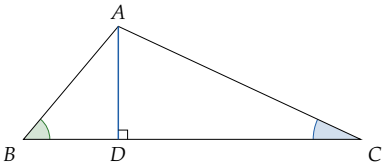
10. Trikampyje ABC $AB = AC$, $\angle A = 120°$, AL – pusiaukampinė. Įrodykite, kad $AL = \frac{1}{2}AC$.

11. AM – trikampio ABC pusiaukraštinė, $AB = 2AM$, $\angle BAM = 40°$. Raskite $\angle BAC$.

12. Trikampyje ABC $\angle A = 60°$, AD – pusiaukampinė, $AC = AB + BD$. Raskite $\angle B$ ir $\angle C$.

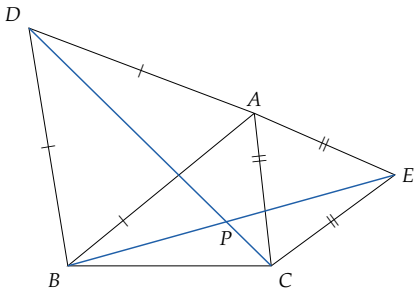
13.

Trikampyje ABC kampas B du kartus didesnis už kampą C, AD – aukštinė, taškas D – kraštinės BC vidinis taškas. Įrodykite, kad $CD = AB + BD$.



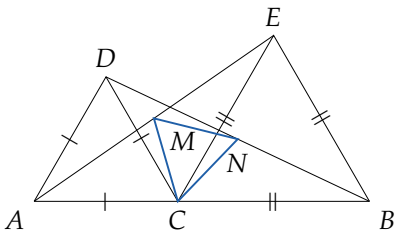
14.

Trikampyje ABC $\angle BAC < 120°$. Trikampio išorėje nubrėžti lygiakraščiai trikampiai ABD ir ACE; atkarpos BE ir CD kertasi taške P, kuris yra abiejų atkarpų vidinis taškas. Įrodykite, kad $BE = CD$, ir raskite kampą BPD.



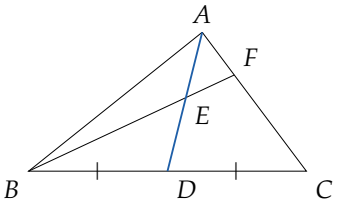
15.

Taškas C – atkarpos AB vidinis taškas. Vienoje tiesės AB pusėje nubrėžti lygiakraščiai trikampiai ACD ir CBE; M ir N – atkarpų AE ir DB vidurio taškai. Įrodykite, kad trikampis CMN lygiakraštis.



16.

Trikampio ABC pusiaukraštinėje AD pažymėtas taškas E, kad $BE = AC$. Tiesė BE kerta kraštinę AC taške F. Įrodykite, kad $AF = EF$.

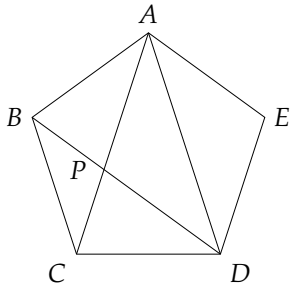


17. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC pažymėti taškai D ir E (ne viršūnės), $DE \parallel BC$ ir $BD = CE$. Įrodykite, kad $AB = AC$.

18.

$ABCDE$ – taisyklingasis penkiakampis (visos kraštinės lygios ir visi kampai lygūs). Įstrižainės AC ir BD kertasi taške P.

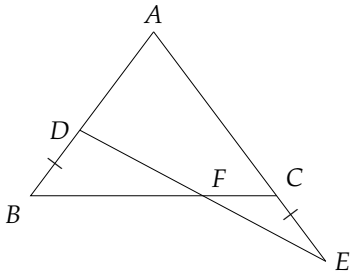
a) Raskite trikampio BPC kampus.
b) Įrodykite, kad $DP = AB$.
c) Raskite trikampio ACD kampus.



19. Trikampyje ABC $\angle B = 2\angle C$ ir $BC = 2AB$. Raskite trikampio kampus.

20.

Trikampyje ABC $AB = AC$. Kraštinėje AB pažymėtas taškas D, o kraštinės AC tęsinyje už C – taškas E, kad $BD = CE$. Atkarpa DE kerta BC taške F. Įrodykite, kad $DF = FE$.

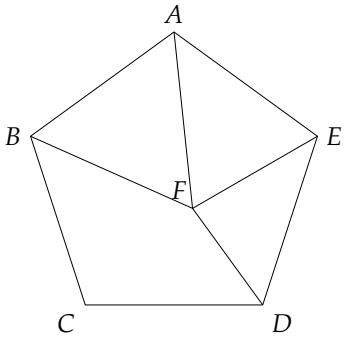


21. Trikampyje ABC $AB = AC$, $\angle A = 100°$, BL – pusiaukampinė. Įrodykite, kad $BC = BL + AL$.

22. Trikampyje ABC $\angle A = 60°$, pusiaukampinės BE ir CF ($E \in AC$, $F \in AB$) kertasi taške I. Įrodykite, kad $BC = BF + CE$ ir $IE = IF$.

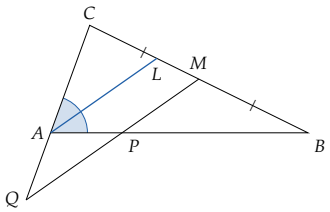
23.

$ABCDE$ – taisyklingasis penkiakampis. Jo viduje nubrėžtas lygiakraštis trikampis ABF. Raskite $\angle EFD$.



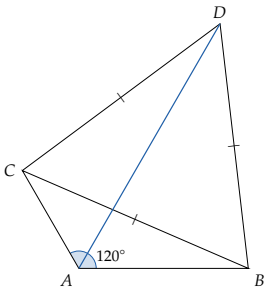
24.

Trikampyje ABC $AB > AC$, AL – pusiaukampinė, M – kraštinės BC vidurys. Tiesė, einanti per M lygiagrečiai AL, kerta kraštinę AB taške P, o tiesę AC – taške Q. Įrodykite, kad $BP = CQ = \frac{AB+AC}{2}$.



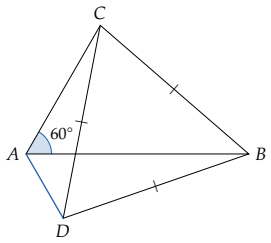
25.

Trikampyje ABC $\angle A = 120°$. Kitoje tiesės BC pusėje nei taškas A nubrėžtas lygiakraštis trikampis BCD. Įrodykite, kad $AD = AB + AC$.



26.

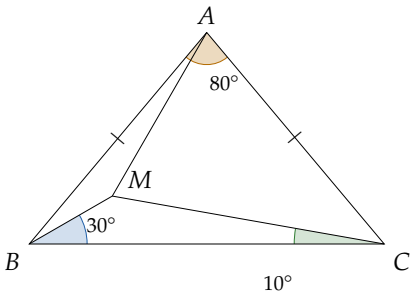
Trikampyje ABC $\angle A = 60°$, $AB > AC$. Toje pačioje tiesės BC pusėje kaip taškas A nubrėžtas lygiakraštis trikampis BCD. Įrodykite, kad $AD = AB - AC$.



27. Trikampyje ABC $AB = AC$, $\angle A = 20°$. Kraštinėje AC pažymėtas taškas D, kad $AD = BC$. Raskite $\angle ABD$.

28.

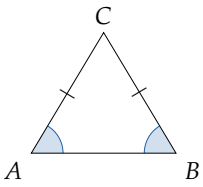
Trikampyje ABC $AB = AC$, $\angle A = 80°$. Taškas M trikampio viduje parinktas taip, kad $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$. Raskite $\angle AMC$.



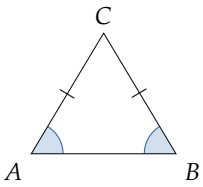
Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

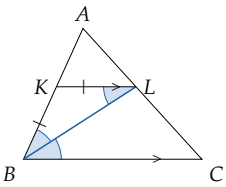
Įrankis 6 *(kampai prie pagrindo)* $CA = CB \Rightarrow \angle A = \angle B$ (kampai prie pagrindo)



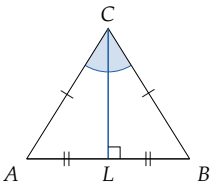
Įrankis 7 *(lygiašonio požymis)* $\angle A = \angle B \Rightarrow CA = CB$ (lygiašonio požymis)



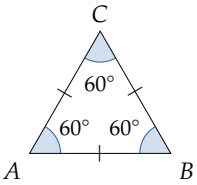
Išvada *(pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė)* pusiaukampinė + lygiagreti tiesė → lygiašonis trikampis: $KB = KL$



Įrankis 8 *(lygiašonio pusiaukampinė)* lygiašonio pusiaukampinė, pusiaukraštinė ir aukštinė iš viršūnės – ta pati atkarpa



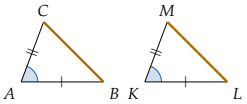
Įrankis 9 *(lygiakraštis trikampis)* lygiakraščio kampai po 60°; lygiašonis su 60° – lygiakraštis



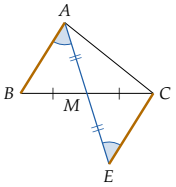
Technikų santrauka

Signalas → veiksmas. Šios technikos padeda rasti sprendimą.

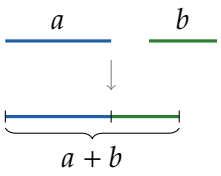
T3 *(Lygūs trikampiai)* reikia lygių atkarpų ar kampų → rask / sukurk lygius trikampius.



T4 *(Pusiaukraštinė dvigubai)* pusiaukraštinė → pratęsk ją tiek pat: $EC = AB$, $\angle MEC = \angle BAM$, todėl $EC \parallel AB$.



T5 *(Atidėk lygią atkarpą)* atkarpų suma ar skirtumas → sudėk į vieną atkarpą ar atidėk.



Pratimų atsakymai

Pratimai 2. a) AC; $\angle L$; b) (1) dvi kraštinės ir kampas tarp jų; (2) kraštinė ir du kampai prie jos; (3) trys kraštinės; (4) nė vienu – kampas ne tarp lygių kraštinių; c) $\angle B$ nėra tarp AB ir AC – požymis netaikomas; d) 70°, 70°; e) 130°; f) 70°, 40° arba 55°, 55°; tik 40°, 40°; g) taip: trečiasis 50°;

Uždavinių atsakymai

1. 60°.
2. 90°.
3. Įrodymas – lapo gale.
4. Įrodymas – lapo gale.
5. $AK = 4$.
6. $\angle A = \frac{180°}{7}$.
7. 18.
8. 80°.
9. Įrodymas – lapo gale.
10. Įrodymas – lapo gale.
11. 110°.
12. $\angle B = 80°$, $\angle C = 40°$.
13. Įrodymas – lapo gale.
14. $\angle BPD = 60°$ (įrodymas – lapo gale).
15. Įrodymas – lapo gale.
16. Įrodymas – lapo gale.
17. Įrodymas – lapo gale.
18. a) 36°, 36°, 108°; b) įrodymas – lapo gale; c) $\angle ACD = \angle ADC = 72°$, $\angle CAD = 36°$.
19. $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 30°$.
20. Įrodymas – lapo gale.
21. Įrodymas – lapo gale.
22. Įrodymas – lapo gale.
23. 84°.
24. Įrodymas – lapo gale.
25. Įrodymas – lapo gale.
26. Įrodymas – lapo gale.
27. 10°.
28. 70°.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. 1) Dvi poros lygių atkarpų – du lygiašoniai trikampiai: ABC ir ADC. 2) Raskite $\angle C$, tada $\angle DAC$ ir $\angle BAC$.

2. 1) Trikampis ACD lygiašonis. 2) Kampų prie pagrindo AD suma – kurio kampo priekampis?

3. 1) Reikia lygių atkarpų AB ir AC; jos yra trikampiuose ABM ir ACM. 2) Įrodykite, kad trikampiai ABM ir ACM lygūs.

4. 1) Reikia įrodyti lygiagretumą, o $\angle CAE$ – trikampio priekampis. 2) Pažymėkite $\angle B = \alpha$, išreikškite $\angle CAE$ per α ir palyginkite $\angle EAF$ su $\angle B$.

5. 1) Pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė – ieškokite lygiašonio trikampio. 2) Palyginkite trikampio BKL kampus prie B ir prie L.

6. 1) Grandinė lygių atkarpų – grandinė lygiašonių trikampių. 2) Pažymėkite $\angle A = \alpha$ ir, eidami nuo A link B, išreikškite kampus per α (kampai prie pagrindo, priekampis).

7. 1) Pusiaukampinė ir lygiagreti tiesė – kaip 5 uždavinyje, tik du kartus. 2) Įrodykite, kad $MB = MI$ ir $NC = NI$.

8. 1) Dvi poros lygių kraštinių su bendrais galais A ir C. 2) Nubrėžkite įstrižainę AC.

9. 1) Vėl pusiaukampinė ir lygiagrečios tiesės. 2) Įrodykite, kad trikampiai ABK ir DCK lygiašoniai.

10. 1) Kampai prie A po $60°$, prie pagrindo po $30°$ – trūksta lygiakraščio trikampio. 2) T5: ant AC atidėkite $AK = AL$. Koks trikampis AKL? O KLC?

11. 1) Pusiaukraštinė ir atkarpa, dvigubai ilgesnė už ją. 2) T4: pratęskite AM už M tiek pat.

12. 1) Atkarpų suma $AB + BD$ lygi atkarpai AC. 2) T5: atidėkite ant AC atkarpą $AE = AB$.

13. 1) Atkarpų suma $AB + BD$; aukštinė AD dalija kraštinę BC į dvi dalis. 2) T5: atidėkite ant DC atkarpą $DE = DB$ ir palyginkite trikampius ADB ir ADE.

14. 1) Lygiakraščiai trikampiai išorėje – daug lygių atkarpų ir $60°$ kampų; BE ir CD – kraštinės dviejų trikampių. 2) Palyginkite trikampius ADC ir ABE: kampas prie A abiejuose lygus $60° + \angle BAC$.

15. 1) Prie viršūnės C – dvi lygių kraštinių poros: $CA = CD$ ir $CE = CB$. 2) Įrodykite, kad $\triangle ACE = \triangle DCB$, paskui – kad $\triangle ACM = \triangle DCN$.

16. 1) Yra pusiaukraštinė, o lygios atkarpos BE ir AC nėra viename trikampyje. 2) T4: pratęskite AD už D iki K, kad $DK = AD$, ir palyginkite trikampius ADC ir KDB.

17. 1) Lygios atkarpos BD ir CE nėra viename trikampyje ir neturi bendro taško. 2) T2: per E nubrėžkite tiesę, lygiagrečią AB (ji kerta BC taške F); įrodykite, kad $EF = BD$.

18. 1) Penkiakampio kampą galima rasti, o trikampiai ABC ir BCD – lygiašoniai. 2) Raskite penkiakampio kampą, tada kampus prie lygiašonių trikampių pagrindų; b) dalyje įrodykite, kad trikampis CDP lygiašonis.

19. 1) Ir kampas B, ir kraštinė BC – „dvigubi“. 2) Nubrėžkite pusiaukampinę BD ir pažymėkite BC vidurį M; palyginkite trikampius ABD ir MBD.

20. 1) Prie E jau yra trikampis CEF, o prie D jam lygaus trikampio nėra. 2) T2: per D nubrėžkite tiesę, lygiagrečią AC (ji kerta BC taške G); įrodykite, kad $DG = DB$.

21. 1) Atkarpų suma; kampai $20°$, $40°$, $80°$, $100°$ – daug lygiašonių trikampių. 2) T5: ant BC atidėkite $BK = BL$ – lieka įrodyti $KC = AL$. Padės ir taškas $E \in BC$, kad $BE = BA$.

22. 1) Atkarpų suma; BI ir CI – pusiaukampinės. 2) T5: ant BC atidėkite $BK = BF$. Raskite $\angle BIC$, tada kampus BIF, BIK, KIC, CIE.

23. 1) Penkiakampio kraštinės lygios lygiakraščio trikampio kraštinėms: $AE = AF$, $BC = BF$.

2) Raskite lygiašonių trikampių AEF ir BCF kampus; įrodykite, kad $FE = FC$, ir palyginkite trikampius DEF ir DCF; sudėkite kampus aplink F.

24. 1) Tiesė lygiagreti pusiaukampinei; M – vidurys, bet BP ir CQ nėra viename trikampyje. 2) Įrodykite, kad $AP = AQ$. Per C nubrėžkite tiesę, lygiagrečią AB (ji kerta tiesę PM taške K), ir įrodykite, kad $BP = CK = CQ$.

25. 1) Atkarpų suma; $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$, o lygiakraščio trikampio kampai – po 60°. 2) T5: pratęskite BA už A iki E, kad $AE = AC$. Koks trikampis ACE? Palyginkite trikampius BCE ir DCA.

26. 1) Atkarpų skirtumas; kampas 60°. 2) T5: ant AB atidėkite $AX = AC$. Koks trikampis AXC? Palyginkite trikampius XCB ir ACD.

27. 1) $\angle B = 80^\circ = 60^\circ + 20^\circ$, o $20^\circ = \angle A$; $AD = BC$. 2) Trikampio viduje nubrėžkite lygiakraštį trikampį BCE; palyginkite trikampius ABE ir ACE, paskui ABD ir BAE.

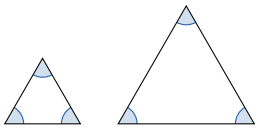
28. 1) Lygiašonis trikampis simetriškas viršūnės pusiaukampinės atžvilgiu; kampas 30° prie B turi „porą“ prie C. 2) Pusiaukampinė iš A kerta tiesę BM taške O; nubrėžkite OC ir įrodykite, kad $\triangle AOC = \triangle MOC$.

Sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

Pratimai 1 a)

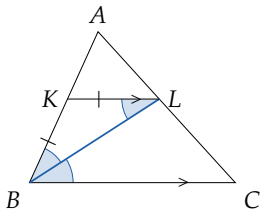
Ne. Dviejų lygiakraščių trikampių, kurių kraštinių ilgiai yra 1 ir 2, kiekvienas kampas yra 60° (lygiakraštis trikampis), bet kraštinės skirtingos, todėl trikampiai nelygūs. Taigi trys lygūs kampai nėra lygumo požymis: reikia bent vienos lygios kraštinės. Panašiai lygių trikampių perimetrai lygūs, bet atvirkščiai – ne: trikampių, kurių kraštinės yra 3, 4, 5 ir 4, 4, 4, kiekvieno perimetras yra 12.



Pratimai 1 b)

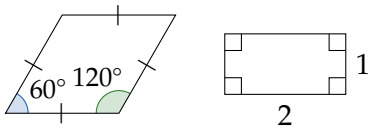
Taip.

1. Jei $KL \parallel BC$ ir $KB = KL$, tai $\angle KBL = \angle KLB = \angle LBC$ (kampai prie pagrindo; vidaus priešiniai), todėl BL yra pusiaukampinė.
2. Jei BL yra pusiaukampinė ir $KB = KL$, tai $\angle KLB = \angle KBL = \angle LBC$ (kampai prie pagrindo; pusiaukampinė), todėl $KL \parallel BC$ (lygiagretumo požymis).

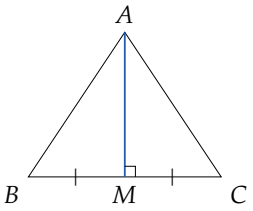


Pratimai 1 c)

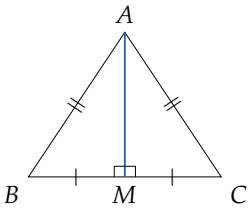
Ne, nė viena kryptimi. Rombo, kurio kampų didumai yra 60° ir 120°, visos kraštinės lygios, o kampai – ne. Stačiakampio, kurio kraštinių ilgiai yra 2 ir 1, visi kampai statūs, o kraštinės – ne. Trikampyje kraštines su kampais susieja lygiašonio trikampio savybė ir požymis, o keturkampyje tokio ryšio nėra; todėl taisyklingojo daugiakampio apibrėžime reikia abiejų sąlygų.



3 uždavinys.



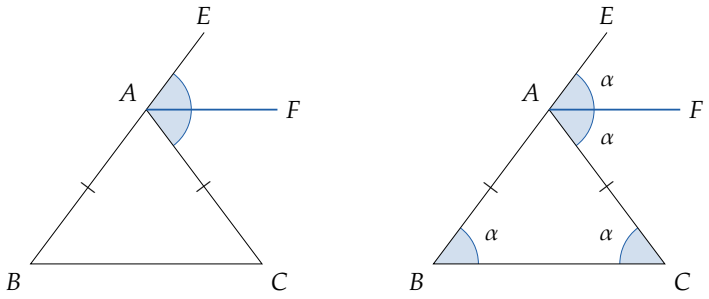
sąlyga



sprendimas

1. $\triangle ABM = \triangle ACM$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $BM = MC$, $\angle AMB = \angle AMC = 90°$, AM bendra).
2. $AB = AC$ (atitinkamosios kraštinės).

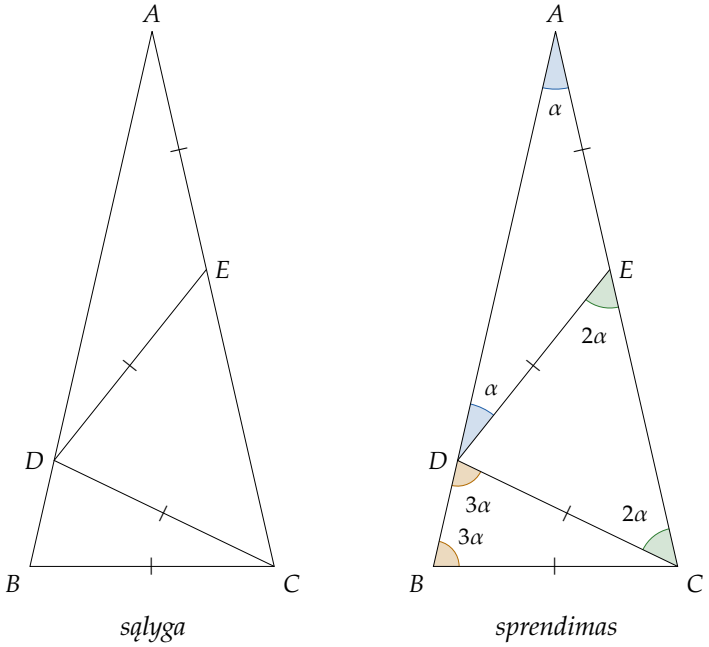
4 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

1. Pažymėkime $\angle B = \alpha$. Tada $\angle C = \alpha$ (kampai prie pagrindo).
2. $\angle CAE = 2\alpha$ (priekampis), todėl $\angle EAF = \angle FAC = \alpha$.
3. $\angle EAF = \angle ABC = \alpha$ – atitinkamieji kampai (kirstinė BE), todėl $AF \parallel BC$ (lygiagretumo požymis).

6 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

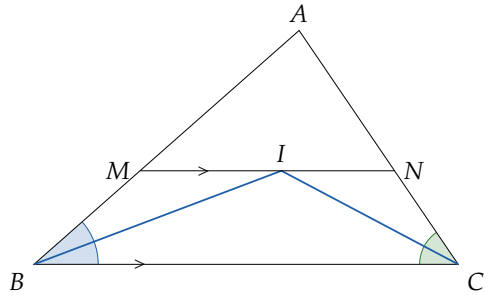
Ką matau. keturios lygios atkarpos iš eilės – keturi lygiašoniai trikampiai.

Idėja (T1). pažymėkime $\angle A = \alpha$; kampus išreiškiame per α.

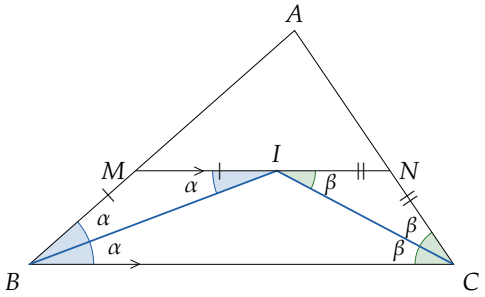
1. $\angle ADE = \alpha$ (kampai prie pagrindo, $EA = ED$).
2. $\angle DEC = 2\alpha$ (trikampio ADE priekampis); $\angle DCE = 2\alpha$ (kampai prie pagrindo, $ED = DC$).
3. $\angle BDC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ (trikampio ADC priekampis); $\angle B = 3\alpha$ (kampai prie pagrindo, $CD = CB$).
4. $\angle ACB = \angle B = 3\alpha$ (kampai prie pagrindo, $AB = AC$); $\alpha + 3\alpha + 3\alpha = 180°$ (trikampio kampų suma), $\alpha = \frac{180°}{7}$.

Pamoka. kaip auksiniame trikampyje: kiekviena lygi atkarpa duoda porą lygių kampų, o priekampis padidina kampą.

7 uždavinys.



sąlyga

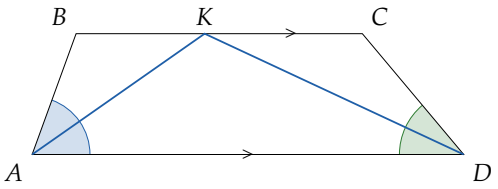


sprendimas

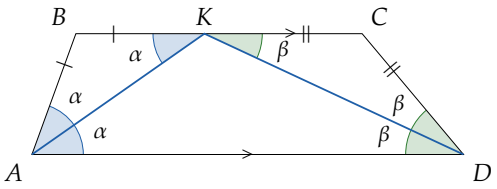
1. Pažymėkime $\angle IBC = \alpha$ ir $\angle ICB = \beta$. Tada $\angle MIB = \alpha$ (vidaus priešiniai, $MN \parallel BC$) ir $\angle MBI = \alpha$ (pusiaukampinė), todėl $MB = MI$ (lygiašonio požymis).
2. Analogiškai $NC = NI$.
3. $P_{AMN} = AM + MI + IN + NA = (AM + MB) + (AN + NC) = AB + AC = 18$.

Pamoka. atkarpa MN lygi $BM + CN$: lygiašoniai trikampiai „perkelia“ atkarpas.

9 uždavinys.



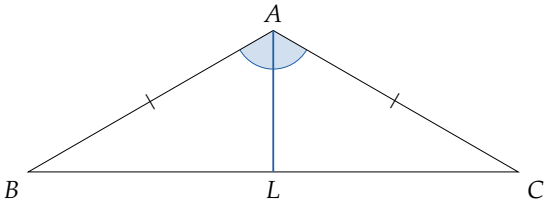
sąlyga



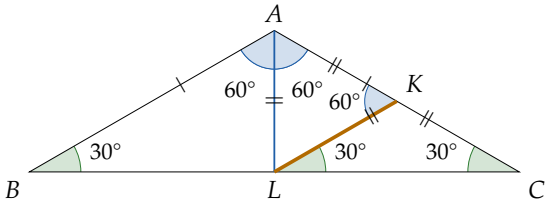
sprendimas

1. Pažymėkime $\angle KAD = \alpha$. Tada $\angle BKA = \alpha$ (vidaus priešiniai, $BC \parallel AD$) ir $\angle BAK = \alpha$ (pusiaukampinė), todėl $AB = BK$ (lygiašonio požymis).
2. Analogiškai, pažymėję $\angle KDA = \beta$: $\angle CKD = \beta = \angle CDK$, todėl $CD = CK$.
3. $BC = BK + KC = AB + CD$.

10 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. AL lyginama su puse AC – reikia taško, kuris padalytų AC į dvi dalis, lygias AL.

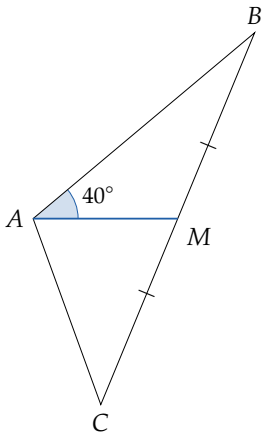
Idėja (T5). ant AC atidedame $AK = AL$.

1. $\angle B = \angle C = 30°$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma), $\angle LAC = 60°$ (pusiaukampinė).
2. Trikampis AKL lygiakraštis ($AK = AL$, $\angle KAL = 60°$; lygiakraštis trikampis): $KL = AL$, $\angle AKL = 60°$.
3. $\angle KLC = 60° - 30° = 30° = \angle C$ (trikampio KLC priekampis), todėl $KC = KL$ (lygiašonio požymis); $AC = AK + KC = 2AL$.

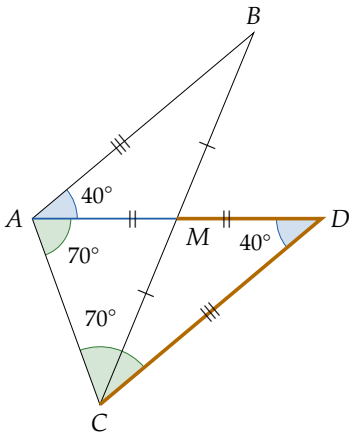
Pamoka. atidėta atkarpa ir $60°$ kampas – lygiakraštis trikampis.

Kitas būdas. Pratęsiame AL už L iki E, $LE = AL$. $AL \perp BC$ (lygiašonio pusiaukampinė), todėl $\triangle ALC = \triangle ELC$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų) ir $CE = CA$; trikampis ACE lygiašonis su $60°$ kampu, todėl lygiakraštis (lygiakraštis trikampis): $AC = AE = 2AL$.

11 uždavinys.



sąlyga



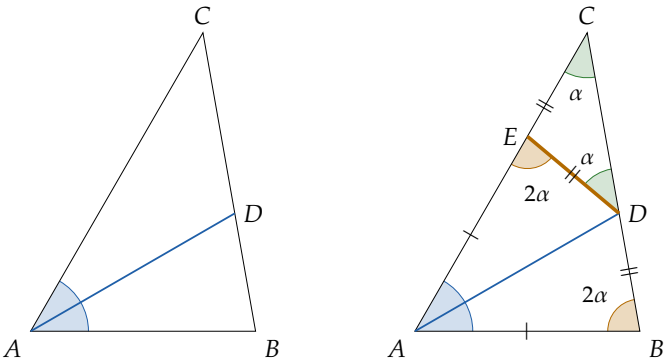
sprendimas

Ką matau. $AB = 2AM$ – atkarpa $2AM$ atsiras, jei AM padvigubinsime.

Idėja (T4). pratęsiame AM už M iki D: $MD = AM$.

1. $\triangle ABM = \triangle DCM$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $BM = MC$, $AM = MD$, kryžminiai kampai), todėl $DC = AB$, $\angle MDC = \angle BAM = 40°$.
2. $AD = 2AM = AB = DC$, todėl $\angle DAC = \angle DCA = \frac{180° - 40°}{2} = 70°$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma).
3. $\angle BAC = 40° + 70° = 110°$.

12 uždavinys.



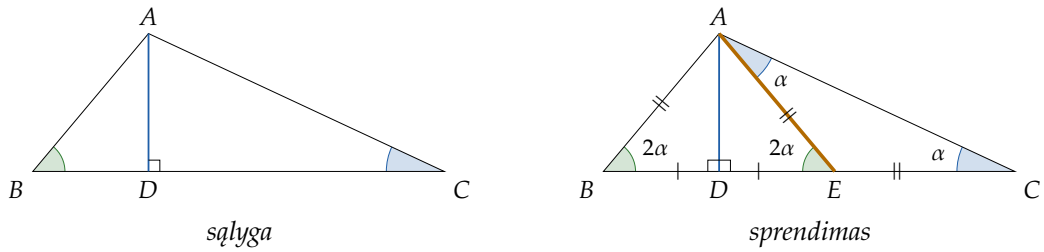
Ką matau. suma $AB + BD$ – dvi atkarpos ne vienoje tiesėje, o AC – viena.

Idėja (T5). atidedame $AE = AB$ ant AC; tada $EC = BD$.

1. $\triangle ABD = \triangle AED$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = AE$, AD bendra, $\angle BAD = \angle EAD$), todėl $ED = BD$, $\angle AED = \angle B$.
2. $EC = AC - AE = AC - AB = BD = ED$, todėl $\angle EDC = \angle C$ (kampai prie pagrindo); pažymėkime juos α.
3. $\angle AED = 2\alpha$ (trikampio EDC priekampis), todėl $\angle B = 2\alpha$.
4. $2\alpha + \alpha = 180^\circ - 60^\circ$ (trikampio kampų suma): $\alpha = 40^\circ$, $\angle C = 40^\circ$, $\angle B = 80^\circ$.

Pamoka. atidėta atkarpa sukūrė ir lygius trikampius, ir lygiašonį trikampį.

13 uždavinys.

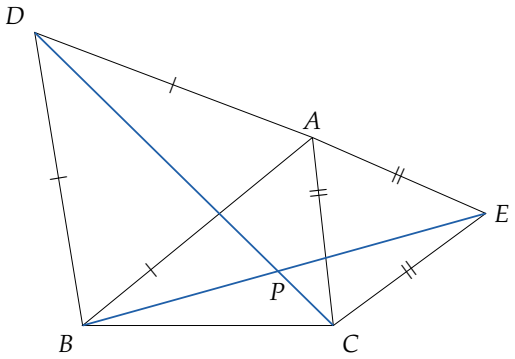


Ką matau. suma $AB + BD$; AD dalija kraštinę BC į BD ir DC.

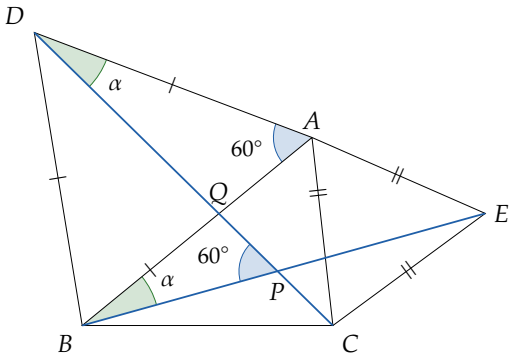
Idėja (T5). atidedame $DE = DB$ ant DC; lieka įrodyti $EC = AB$.

1. Pažymėkime $\angle C = \alpha$; tada $\angle B = 2\alpha$. $\triangle ADB = \triangle ADE$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: AD bendra, $\angle ADB = \angle ADE = 90^\circ$, $DB = DE$), todėl $AE = AB$, $\angle AED = \angle B = 2\alpha$.
2. $\angle AED = \angle EAC + \alpha$ (trikampio AEC priekampis), todėl $\angle EAC = \alpha$.
3. $EA = EC$ (lygiašonio požymis); $CD = DE + EC = BD + AB$.

14 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

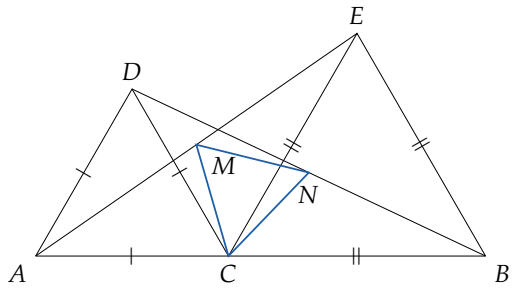
Ką matau. BE ir CD – trikampių ABE ir ADC kraštinės; šiuos trikampius sudaro lygiakraščių trikampių kraštinės.

Idėja (T3). įrodome, kad $\triangle ADC = \triangle ABE$.

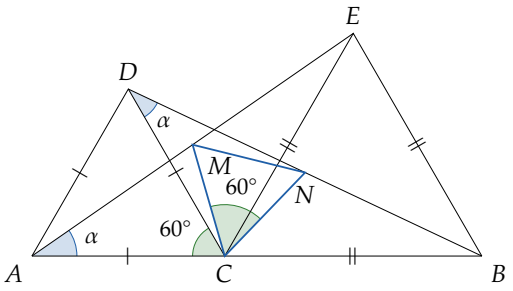
1. $AD = AB$, $AC = AE$ (lygiakraštis trikampis), $\angle DAC = \angle BAE = 60° + \angle BAC$, todėl $\triangle ADC = \triangle ABE$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų).
2. $CD = BE$, $\angle ADC = \angle ABE$ (atitinkamieji elementai); pažymėkime juos α.
3. CD kerta AB taške Q; $\angle AQD = \angle PQB$ (kryžminiai kampai).
4. Trikampiuose ADQ ir PBQ lygios dvi kampų poros ($\angle ADQ = \angle PBQ$, $\angle AQD = \angle PQB$), todėl lygūs ir tretieji kampai: $\angle BPQ = \angle DAQ = 60°$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. lygūs trikampiai „pasukti“ vienas kito atžvilgiu 60° kampu – tokiu pat kampu kertasi ir jų atitinkamosios kraštinės.

15 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

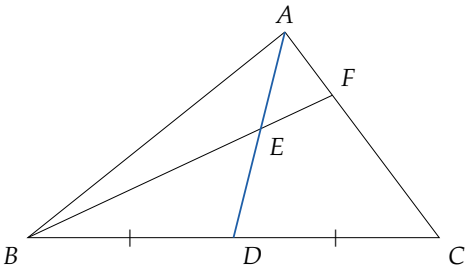
Ką matau. dvi lygiakraščių trikampių kraštinių poros su bendra viršūne C.

Idėja (T3). ieškome lygių trikampių su viršūne C.

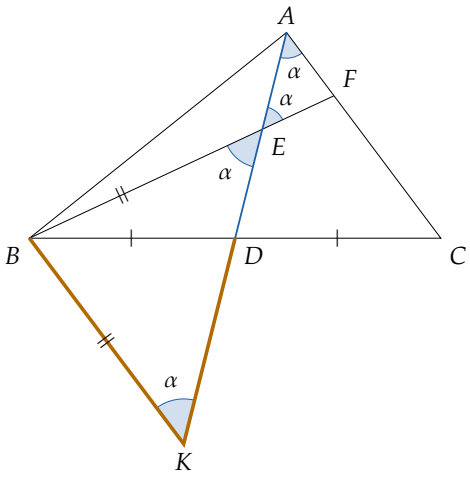
1. $\angle ACE = \angle DCB = 120°$ (gretutiniai), todėl $\triangle ACE = \triangle DCB$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AC = DC$, $CE = CB$). Iš čia $AE = DB$ ir $\angle CAE = \angle CDB$; pažymėkime juos α.
2. $AM = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}DB = DN$, todėl $\triangle ACM = \triangle DCN$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų): $CM = CN$, $\angle ACM = \angle DCN$.
3. $\angle MCN = \angle ACD = 60°$ (iš lygių kampų ACM ir DCN atimame bendrą $\angle DCM$).
4. Lygiašonis trikampis CMN su 60° kampu – lygiakraštis (lygiakraštis trikampis).

Pamoka. lygiakraščiai trikampiai su bendra viršūne – ieškok lygių trikampių su ta viršūne.

16 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

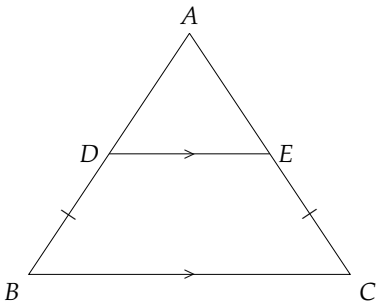
Ką matau. pusiaukraštinė; $BE = AC$, bet šios atkarpos ne viename trikampyje.

Idėja (T4). pratęsiame AD už D iki K: $DK = AD$.

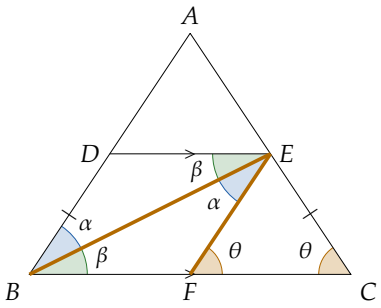
1. $\triangle ADC = \triangle KDB$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AD = KD$, $DC = DB$, kryžminiai kampai), todėl $BK = AC = BE$ ir $\angle BKD = \angle CAD$; pažymėkime juos α.
2. $\angle BEK = \angle BKE = \alpha$ (kampai prie pagrindo, $BE = BK$).
3. $\angle AEF = \angle BEK = \alpha$ (kryžminiai kampai), $\angle FAE = \alpha$, todėl $AF = EF$ (lygiašonio požymis).

Pamoka. pratęsta pusiaukraštinė perkėlė atkarpą AC į BK – šalia BE.

17 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

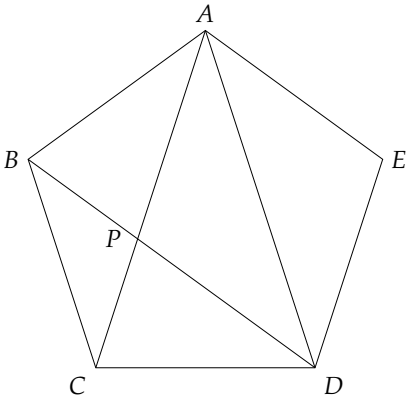
Ką matau. lygios atkarpos BD ir CE ne viename trikampyje.

Idėja (T2). per E – tiesė, lygiagreti AB; ji kerta BC taške F. BE – bendra trikampių BDE ir EFB kraštinė.

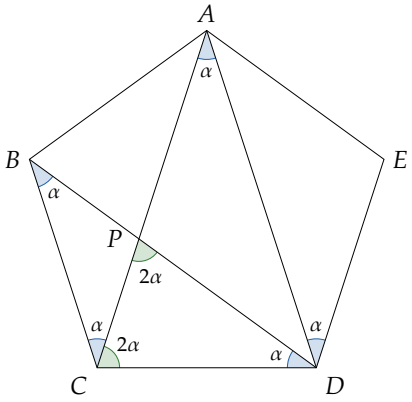
1. $\triangle BDE = \triangle EFB$ (kraštinė ir du kampai prie jos: BE bendra, $\angle DBE = \angle BEF$ ir $\angle DEB = \angle EBF$ – vidaus priešiniai; pažymėkime juos α ir β), todėl $EF = BD = CE$.
2. $\angle EFC = \angle ECF$ (kampai prie pagrindo, $EF = EC$); pažymėkime juos θ.
3. $\angle ABC = \angle EFC = \theta$ (atitinkamieji kampai, $EF \parallel AB$), todėl $\angle B = \angle C$ ir $AB = AC$ (lygiašonio požymis).

Pastaba. Atvirkščias teiginys įrodomas daug lengviau: jei $AB = AC$ ir $DE \parallel BC$, tai $\angle ADE = \angle B = \angle C = \angle AED$ (atitinkamieji kampai; kampai prie pagrindo), todėl $AD = AE$ (lygiašonio požymis) ir $BD = AB - AD = AC - AE = CE$.

18 uždavinys.



sąlyga

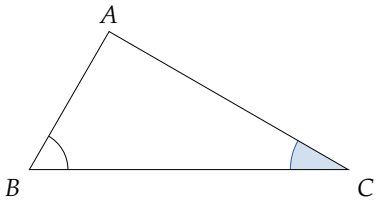


sprendimas

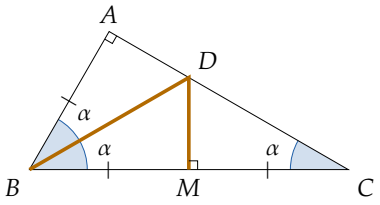
1. Penkiakampio kampas $\frac{3\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$ (daugiakampio kampų suma).
2. Pažymėkime $\angle BAC = \alpha$. Tada $\angle BCA = \alpha$ ir $\alpha = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ (kampai prie pagrindo, $BA = BC$); analogiškai trikampiuose BCD ir DEA.
3. a) $\angle BPC = 180^\circ - 2\alpha = 108^\circ$ (trikampio kampų suma).
4. b) $\angle PCD = 108^\circ - \alpha = 72^\circ$, $\angle DPC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, todėl $DP = DC = AB$ (lygiašonio požymis).
5. c) $\angle ADC = 108^\circ - \alpha = 72^\circ$, $\angle ACD = 72^\circ$, $\angle CAD = 36^\circ$ (trikampio kampų suma).

Pamoka. trikampis ACD – auksinis, kaip 1 pavyzdyje: atkarpa DP jį padalija į lygiašonį ADP ir vėl auksinį CDP.

19 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

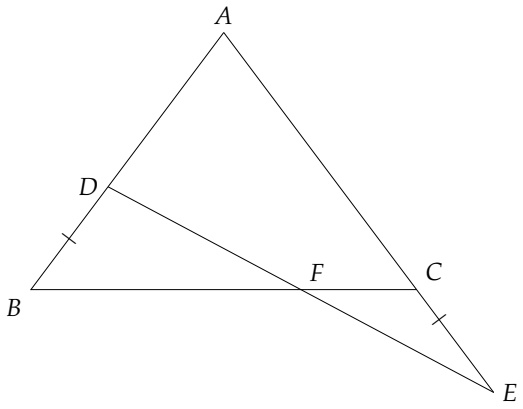
Ką matau. dvigubas kampas ir dviguba kraštinė.

Idėja (T5). perpusiname abu: pusiaukampinė BD ($D \in AC$), o ant BC atidedame $BM = AB$ – tai BC vidurys.

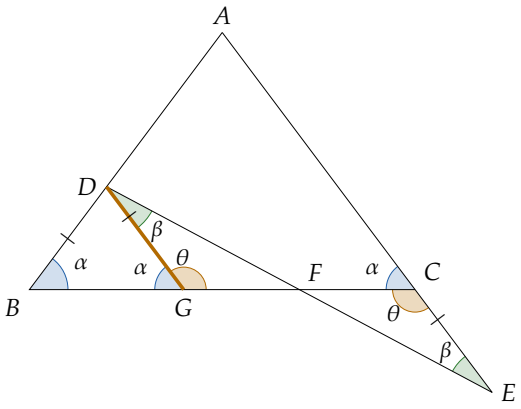
1. Pažymėkime $\angle C = \alpha$. Tada $\angle DBC = \alpha$ (nes $\angle B = 2\angle C$ ir BD – pusiaukampinė), todėl $DB = DC$ (pusiaukampinė; lygiašonio požymis), o $DM \perp BC$ (lygiašonio pusiaukampinė: pusiaukraštinė DM – ir aukštinė).
2. $\triangle ABD = \triangle MBD$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = MB$, BD bendra), todėl $\angle A = \angle BMD = 90^\circ$.
3. $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$ (trikampio kampų suma), $\alpha = 30^\circ$: $\angle C = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$.

Pamoka. „dvigubą“ kampą ar atkarpą perpusink – atsiras lygių atkarpų ir lygių kampų.

20 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

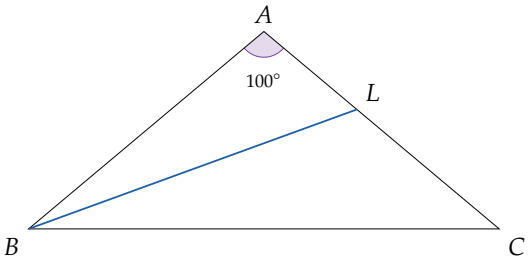
Ką matau. F turi būti atkarpos DE vidurys; prie E yra trikampis CEF, prie D – jam lygaus nėra.

Idėja (T2). per D – tiesė, lygiagreti AC; ji kerta BC taške G.

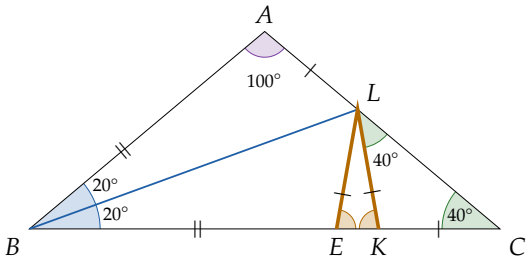
1. Pažymėkime $\angle B = \alpha$. Tada $\angle ACB = \alpha$ (kampai prie pagrindo) ir $\angle DGB = \alpha$ (atitinkamieji kampai, $DG \parallel AC$), todėl $DG = DB = CE$ (lygiašonio požymis).
2. $\angle GDF = \angle CEF$ ir $\angle DGF = \angle ECF$ – vidaus priešiniai kampai ($DG \parallel CE$); pažymėkime juos β ir θ.
3. $\triangle DGF = \triangle ECF$ (kraštinė ir du kampai prie jos: $DG = EC$), todėl $DF = FE$.

Pamoka. lygiagreti tiesė „atnešė“ atkarpą BD prie F – atsirado du lygūs trikampiai.

21 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

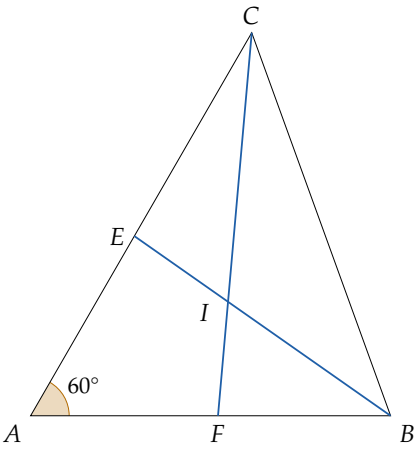
Ką matau. atkarpų suma $BL + AL$.

Idėja (T5). ant BC atidedame $BK = BL$ ir $BE = BA$; lieka įrodyti, kad $KC = AL$.

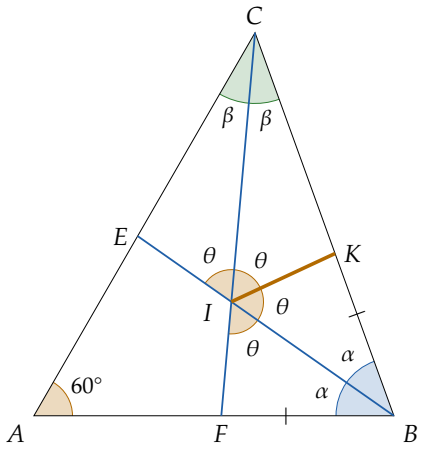
1. $\angle B = \angle C = 40°$ (kampai prie pagrindo), $\angle LBC = 20°$, todėl $\angle BKL = 80°$ (kampai prie pagrindo, $BK = BL$; trikampio kampų suma).
2. $\triangle ABL = \triangle EBL$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $BA = BE$, BL bendra), todėl $LE = LA$ ir $\angle BEL = 100°$.
3. $\angle LEK = 80°$ (gretutiniai) $= \angle LKE$, todėl $LE = LK$ (lygiašonio požymis).
4. $\angle LKC = 100°$ (gretutiniai), $\angle KLC = 40° = \angle C$ (trikampio kampų suma), todėl $KC = KL$ (lygiašonio požymis).
5. $BC = BK + KC = BL + LK = BL + LE = BL + AL$.

Pamoka. atidėtos atkarpos sukūrė grandinę lygiašonių trikampių: $AL = LE = LK = KC$.

22 uždavinys.



sąlyga



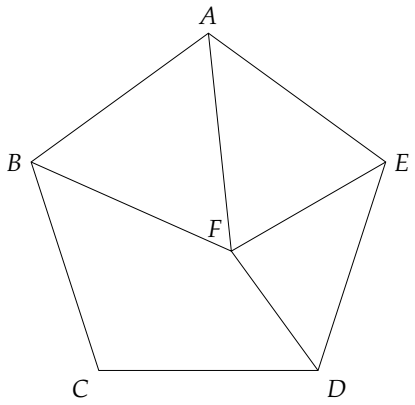
sprendimas

Ką matau. atkarpų suma $BF + CE$; pusiaukampinės.

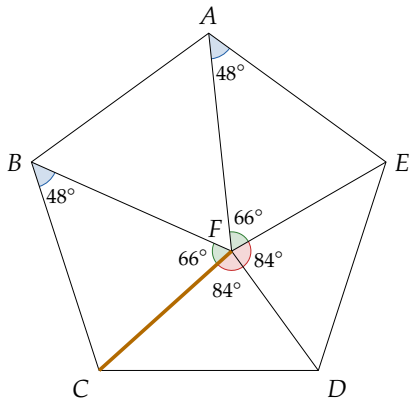
Idėja (T5). ant BC atidedame $BK = BF$; lieka įrodyti, kad $KC = CE$.

1. Pažymėkime $\angle ABE = \angle EBC = \alpha$ ir $\angle ACF = \angle FCB = \beta$. Tada $2\alpha + 2\beta = 120°$ (trikampio kampų suma), todėl $\angle BIC = 180° - (\alpha + \beta) = 120°$ ir $\angle BIF = \angle CIE = 60°$ (gretutiniai; kryžminiai kampai); pažymėkime juos θ.
2. $\triangle BFI = \triangle BKI$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $BF = BK$, BI bendra), todėl $IK = IF$ ir $\angle BIK = \theta$.
3. $\angle KIC = 120° - 60° = \theta$.
4. $\triangle CKI = \triangle CEI$ (kraštinė ir du kampai prie jos: CI bendra), todėl $CK = CE$ ir $IK = IE$.
5. $BC = BK + KC = BF + CE$; $IE = IK = IF$.

23 uždavinys.



sąlyga



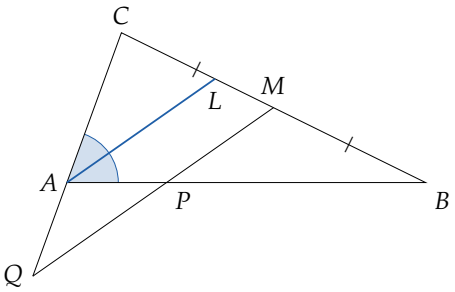
sprendimas

Ką matau. $AE = AB = AF$ ir $BC = BA = BF$ – du lygiašoniai trikampiai.

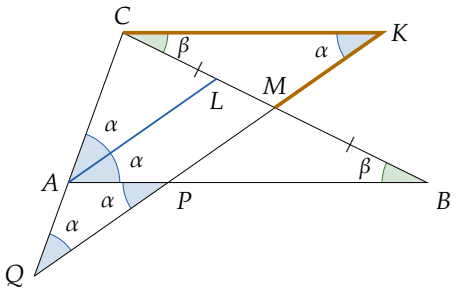
Idėja (T3). įrodome $FE = FC$ ir lyginame trikampius su bendra kraštine DF; kampus sudedame aplink F.

1. Penkiakampio kampas $108°$ (daugiakampio kampų suma), todėl $\angle EAF = \angle CBF = 48°$ ir $\angle AFE = \angle BFC = \frac{180°-48°}{2} = 66°$ (kampai prie pagrindo, $AE = AF$, $BC = BF$; trikampio kampų suma).
2. $\triangle AEF = \triangle BCF$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), todėl $FE = FC$.
3. $\triangle DEF = \triangle DCF$ (trys kraštinės), todėl $\angle EFD = \angle CFD = \frac{360°-66°-60°-66°}{2} = 84°$ (kampai aplink tašką).

24 uždavinys.



sąlyga



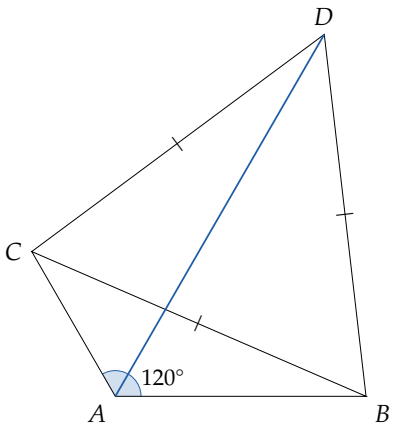
sprendimas

Ką matau. tiesė lygiagreti pusiaukampinei; M – vidurys.

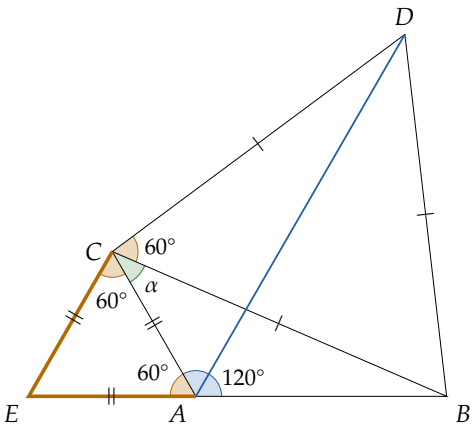
Idėja (T2). per C – tiesė, lygiagreti AB; ji kerta tiesę PM taške K.

1. Pažymėkime $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$ (pusiaukampinė). Tada $\angle APQ = \alpha$ (vidaus priešiniai, $PQ \parallel AL$), $\angle AQP = \alpha$ (atitinkamieji kampai), todėl $AP = AQ$ (lygiašonio požymis).
2. $\triangle BMP = \triangle CMK$ (kraštinė ir du kampai prie jos: $BM = CM$, kryžminiai kampai prie M, $\angle MBP = \angle MCK$ – vidaus priešiniai, $CK \parallel AB$), todėl $BP = CK$.
3. $\angle CKQ = \angle APQ = \alpha$ (atitinkamieji kampai, $CK \parallel AB$) $= \angle CQK$, todėl $CK = CQ$ (lygiašonio požymis).
4. $BP = CQ$, o $BP + CQ = (AB - AP) + (AC + AQ) = AB + AC$, todėl $BP = CQ = \frac{AB+AC}{2}$.

25 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

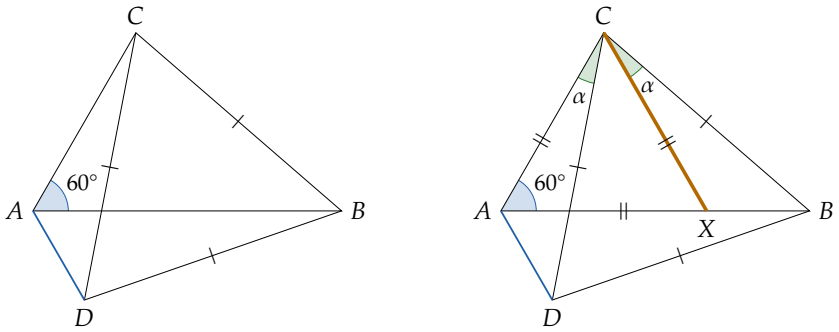
Ką matau. atkarpų suma; lygiakraštis trikampis ir kampas 120°.

Idėja (T5). pratęsiame BA už A iki E, $AE = AC$; tada $BE = AB + AC$, lieka įrodyti $AD = BE$.

1. $\angle CAE = 180° - 120° = 60°$ (gretutiniai), $AE = AC$, todėl trikampis ACE lygiakraštis (lygiakraštis trikampis): $CE = CA$, $\angle ACE = 60°$.
2. Pažymėkime $\angle ACB = \alpha$. Tada $\angle BCE = \angle DCA = \alpha + 60°$ (prie $\angle ACB$ pridedame po $60°$; lygiakraštis trikampis).
3. $\triangle BCE = \triangle DCA$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $CB = CD$, $CE = CA$), todėl $AD = BE = AB + AC$.

Pamoka. suma – pratęsk (25 uždavinys), skirtumas – atidėk (26 uždavinys).

26 uždavinys.



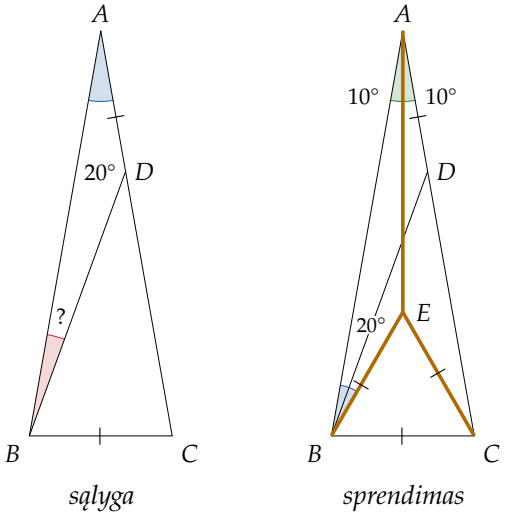
sąlyga *sprendimas*

Ką matau. atkarpų skirtumas $AB - AC$.

Idėja (T5). ant AB atidedame $AX = AC$; tada $XB = AB - AC$, lieka įrodyti, kad $AD = XB$.

1. Trikampis AXC lygiakraštis (lygiakraštis trikampis): $XC = AC$, $\angle ACX = 60°$.
2. $\angle XCB = \angle ACD$ (iš $60°$ atimame bendrą $\angle DCX$); pažymėkime juos α.
3. $\triangle XCB = \triangle ACD$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $XC = AC$, $CB = CD$), todėl $AD = XB = AB - AC$.

27 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

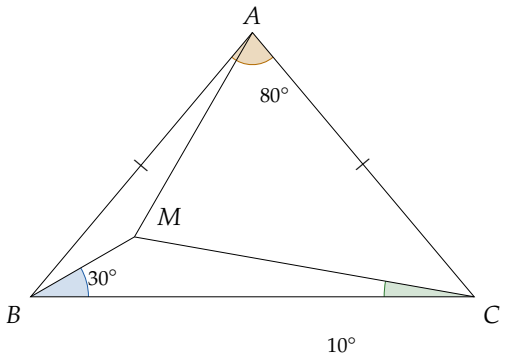
Ką matau. $\angle B = 80° = 60° + 20°$, o $20° = \angle A$.

Idėja (T3). trikampio viduje nubrėžiame lygiakraštį trikampį BCE; tada $BE = BC = AD$.

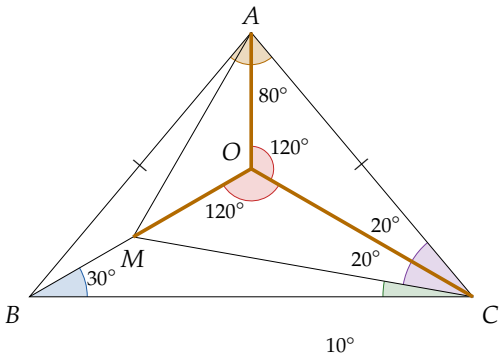
1. $\angle B = \angle C = 80°$ (kampai prie pagrindo).
2. $\triangle ABE = \triangle ACE$ (trys kraštinės: $AB = AC$, $EB = EC$, AE bendra), todėl $\angle BAE = \angle CAE = 10°$.
3. $\angle ABE = 80° - 60° = 20° = \angle BAD$.
4. $\triangle ABD = \triangle BAE$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: AB bendra, $AD = BE$), todėl $\angle ABD = \angle BAE = 10°$.

Pamoka. kampas $60° + 20°$ – signalas nubrėžti lygiakraštį trikampį.

28 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Ką matau. lygiašonis trikampis; kampo 30° prie B „pora“ prie C būtų 10° + 20°.

Idėja (T3). kampo A pusiaukampinė kerta tiesę BM taške O; nubrėžiame OC.

1. $\angle B = \angle C = 50°$ (kampai prie pagrindo). $\triangle ABO = \triangle ACO$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų: $AB = AC$, AO bendra, $\angle BAO = \angle CAO = 40°$), todėl $\angle ACO = \angle ABO = 50° - 30° = 20°$.
2. $\angle OCB = 30°$, todėl $\angle MCO = 30° - 10° = 20°$ ir $\angle MOC = \angle BOC = 180° - 60° = 120°$; $\angle AOC = 180° - 40° - 20° = 120°$ (trikampio kampų suma).
3. $\triangle AOC = \triangle MOC$ (kraštinė ir du kampai prie jos: OC bendra), todėl $CA = CM$.
4. $\angle ACM = 40°$, $\angle AMC = \frac{180°-40°}{2} = 70°$ (kampai prie pagrindo; trikampio kampų suma).

Pamoka. lygiašonio trikampio simetrijos ašis „atspindi“ kampą į kitą pusę.