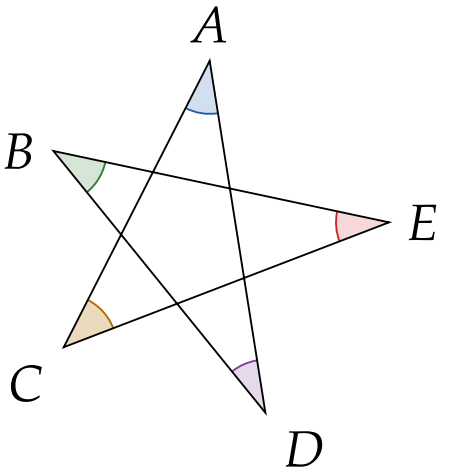
Geometrija

Lapas 1. Kampų metodas I: lygiagrečios tiesės ir trikampio kampai

9 klasė

Klausimas pradžiai. Nubraižykite bet kokią penkiakampę žvaigždę (sujunkite kas antrą iš penkių taškų). Išmatuokite ir sudėkite smaigalių kampus. Pakartokite su kita žvaigžde. Ar suma *visada* ta pati?
Atsakymą rasite 3 pavyzdyje.



1. Nuo ko pradedame

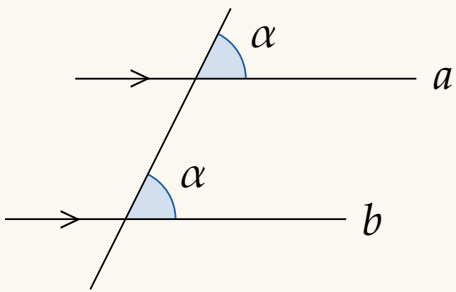
Priimame be įrodymo

A. Jei $a \parallel b$, tai kirstinė su jomis sudaro **lygius atitinkamuosius kampus**.

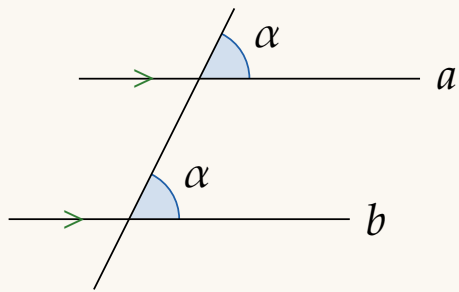
B. Ir atvirkščiai (**lygiagretumo požymis**): jei kirstinė su tiesėmis a ir b sudaro lygius atitinkamuosius kampus, tai $a \parallel b$.

C. Per tašką, nesantį tiesėje, eina **tik viena** tai tiesei lygiagreti tiesė.

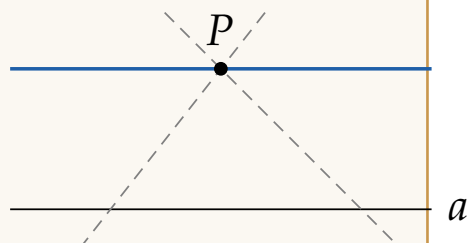
Be to: ištiestinis kampas lygus 180°; kampo dalių suma lygi visam kampui.



A. $a \parallel b \Rightarrow$ kampai lygūs



B. kampai lygūs $\Rightarrow$ $a \parallel b$

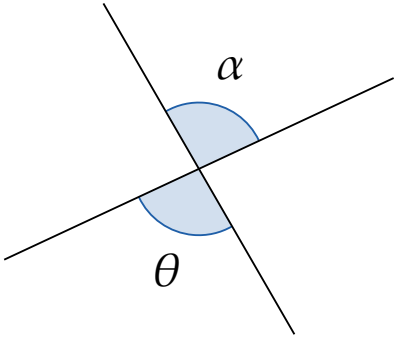


C. per P – tik viena $\parallel a$

2. Kryžminiai kampai

Įrankis 1 (kryžminiai kampai)

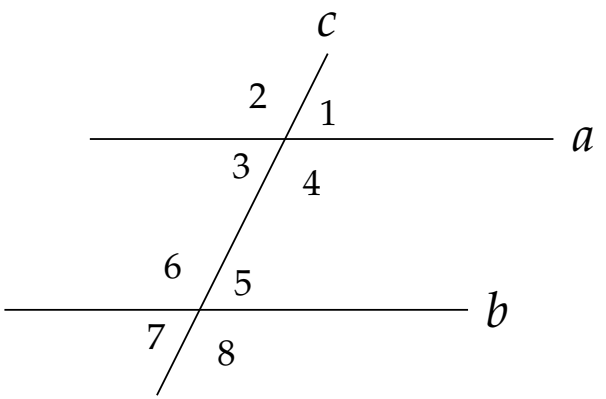
Kryžminiai kampai lygūs: $\alpha = \theta$.



3. Lygiagrečios tiesės

Įrankis 2 (lygiagrečios tiesės)

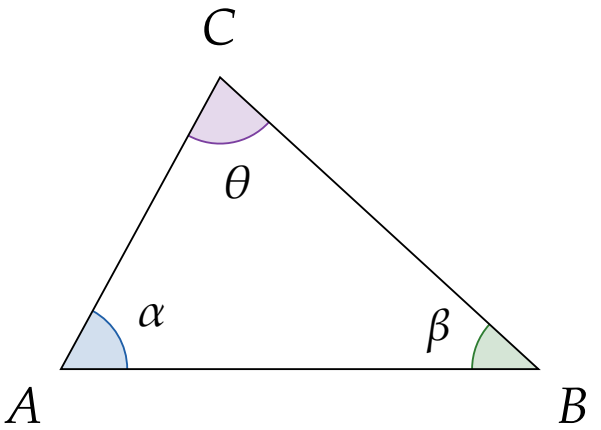
(a) Jei $a \parallel b$, tai vidaus priešiniai kampai lygūs ($\angle 3 = \angle 5$), o vidaus vienašalių kampų suma lygi $180°$ ($\angle 4 + \angle 5 = 180°$).
(b) Atvirkščiai (**lygiagretumo požymis**): jei $\angle 3 = \angle 5$ arba $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, tai $a \parallel b$.



4. Trikampio kampų suma

Įrankis 3 (trikampio kampų suma)

Bet kurio trikampio kampų suma lygi $180°$: $\alpha + \beta + \theta = 180°$.

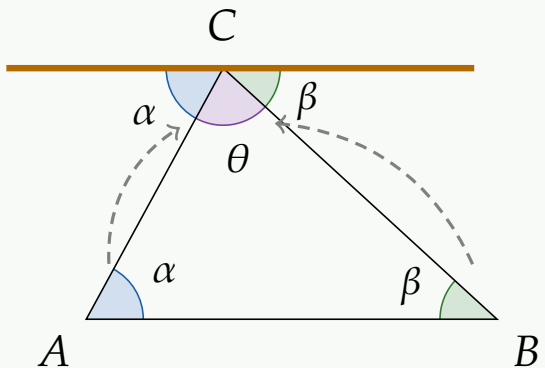


Išvada. Statusis trikampis. Stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma lygi 90°. Pagrindime rašome „(statusis trikampis)“.

Technika T2. Papildoma lygiagreti tiesė

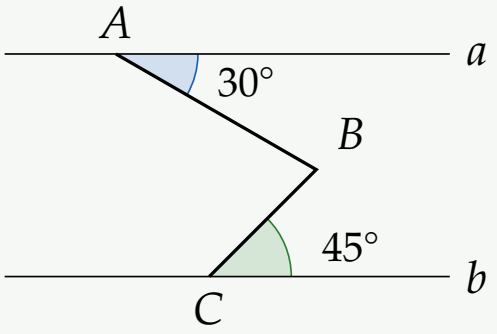
Signalas: kampą reikia „perkelti“ arba kelis kampus surinkti į vieną vietą (pvz., laužtė tarp lygiagrečių tiesių).

Veiksmas: nubrėžkite **papildomą lygiagrečią tiesę** per tašką, kuriame reikia kampų: trikampio viršūnę (kaip kampų sumos įrodyme) arba laužtės viršūnę. Ji **„teleportuoja“ kampus**: kampas iš tolimos vietos toks pat atsiranda prie tiesės (vidaus priešiniai ir atitinkamieji kampai). Taip išmėtytus kampus surenkame į vieną tašką ir sudedame.



Pavyzdys 1 (laužtė tarp lygiagrečių tiesių)

Tiesės a ir b lygiagrečios; taškas A yra tiesėje a, taškas C – tiesėje b, taškas B – tarp jų. Raskite $\angle ABC$.

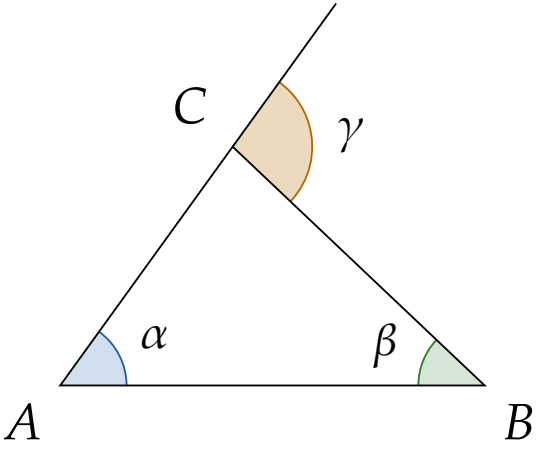


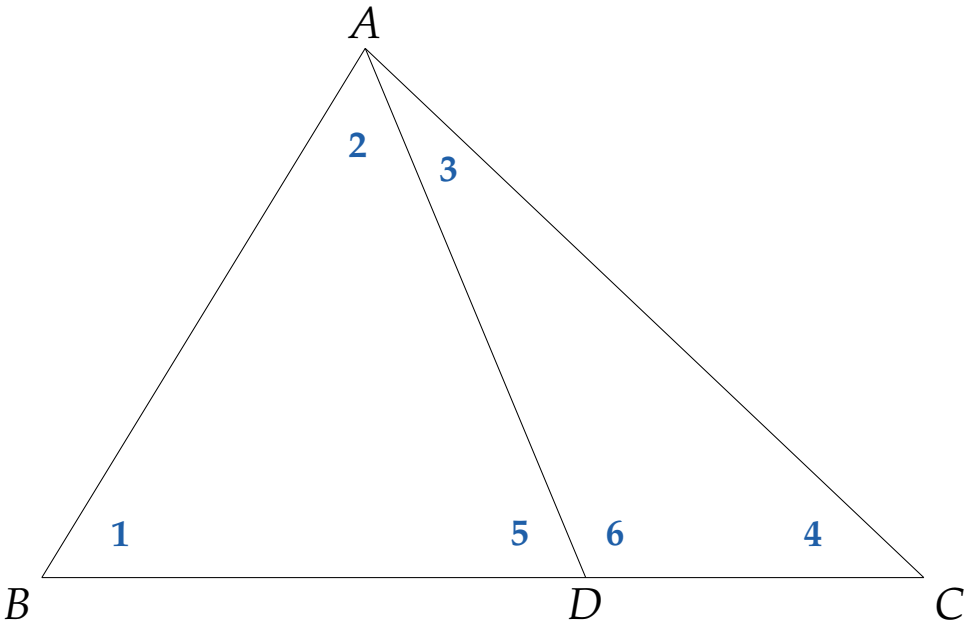
Išvada. Laužtė tarp lygiagrečių. Jei $a \parallel b$, A – tiesėje a, C – tiesėje b, laužtės ABC viršūnė B – tarp tiesių, o A ir C – toje pačioje statmens, nubrėžto per B, pusėje (kaip 1 pavyzdyje), tai $\angle ABC$ lygus **smailiųjų** kampų, kuriuos BA sudaro su a, o BC – su b, sumai. Pagrindime rašome „(laužtė tarp lygiagrečių)“.

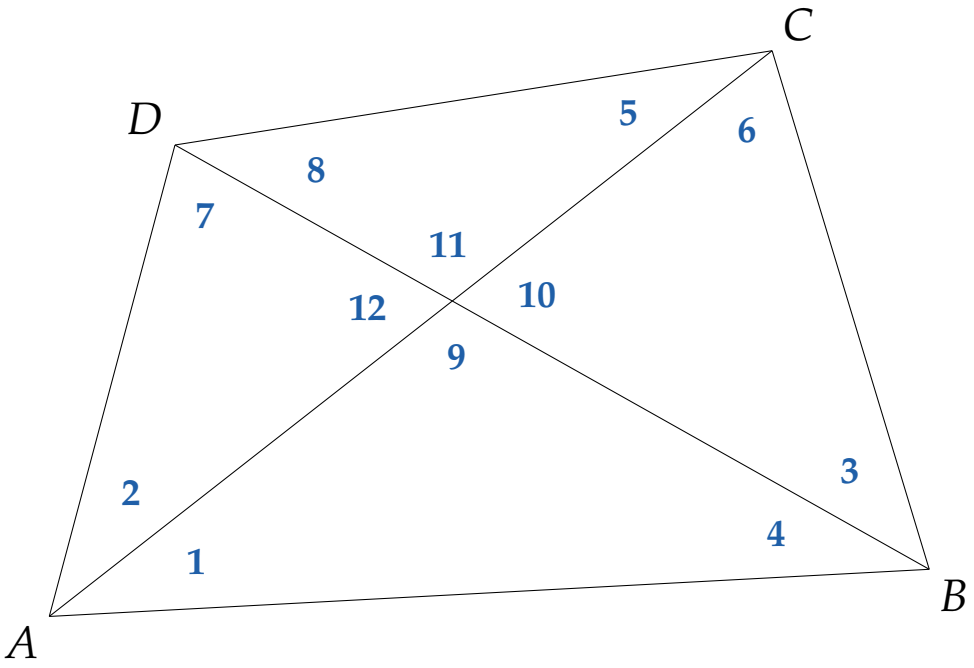
5. Priekampis ir kampų gaudymas

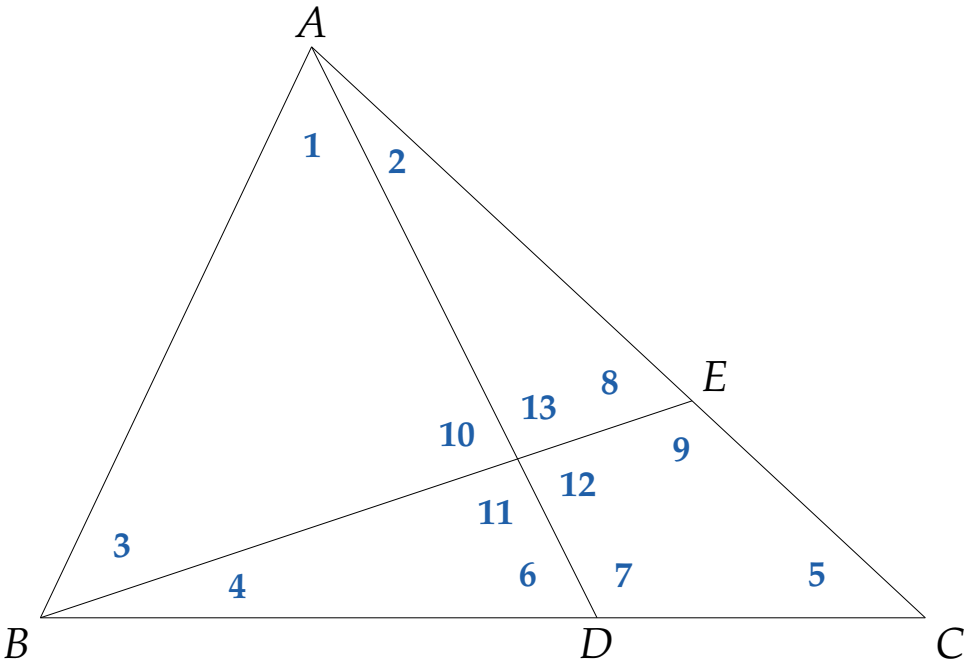
Įrankis 4 (priekampis)

Priekampis lygus dviejų jam negretimų trikampio kampų sumai: $\gamma = \alpha + \beta$. Vaizdžiai: priekampis – „kampų siurblys“.




A
2
3
1
5
6
4
B
D
C


C
D
5
6
8
7
11
12
10
9
3
2
4
1
B
A

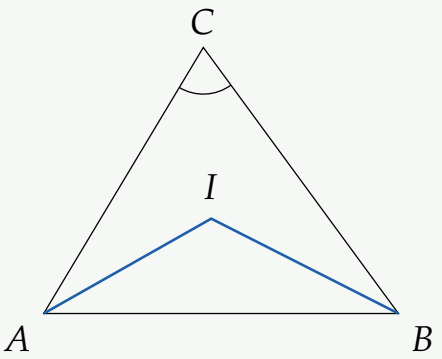

A
1
2
E
8
13
10
9
12
11
3
4
6
7
5
B
D
C

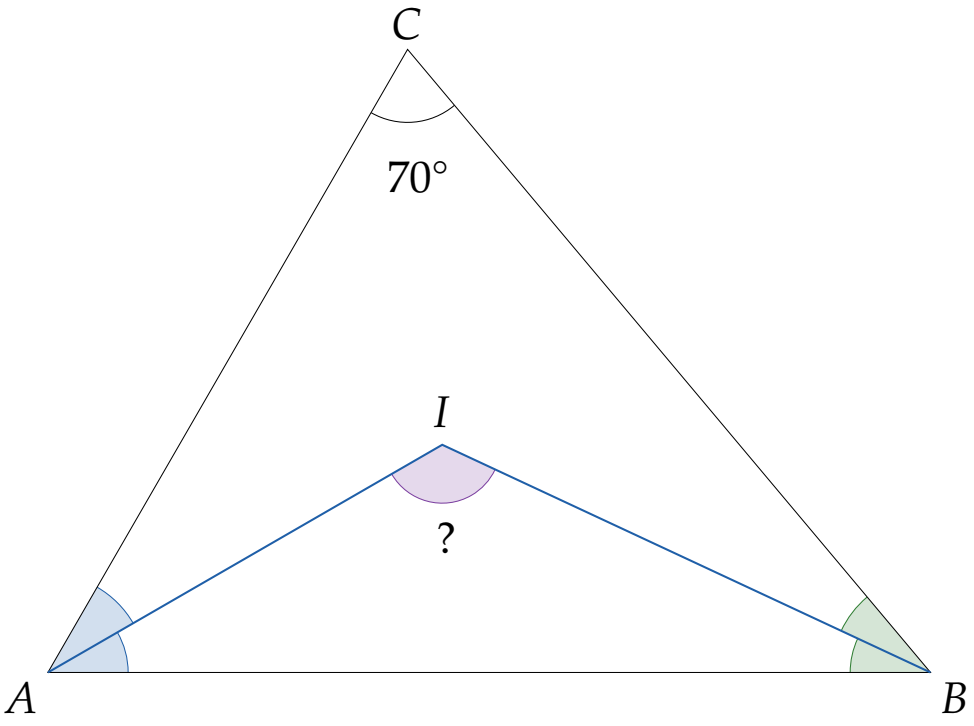
Technika T1. Kampų gaudymas

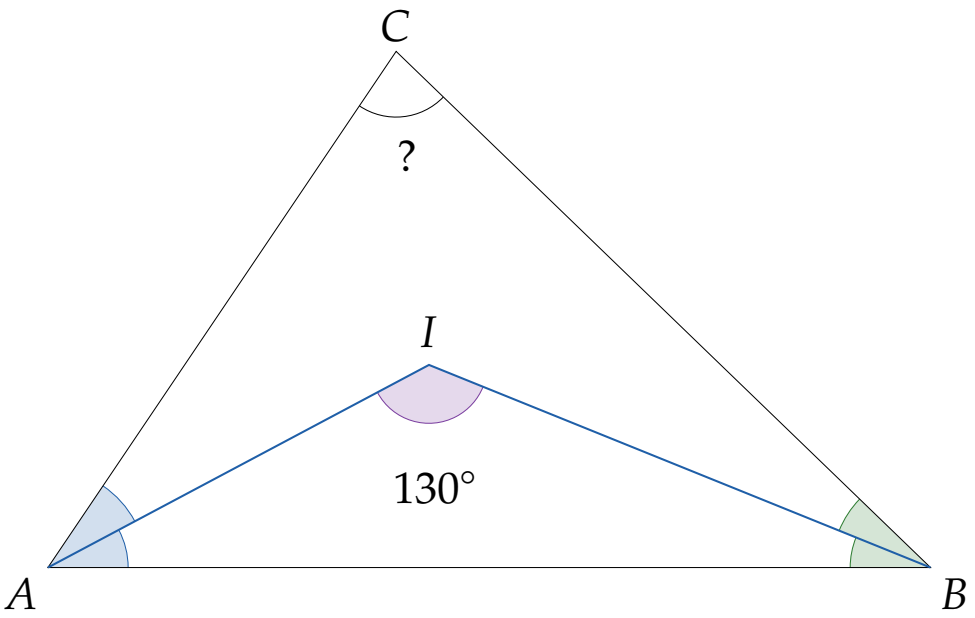
Signalas: daug kampų; reikia rasti ar palyginti kelis.
Veiksmas: nežinomus kampus pažymėkite α, β; kitus išreikškite jais ir **užrašykite brėžinyje**. Lygybės ieškokite trikampyje, ištiestiniame kampe, prie lygiagrečių tiesių.

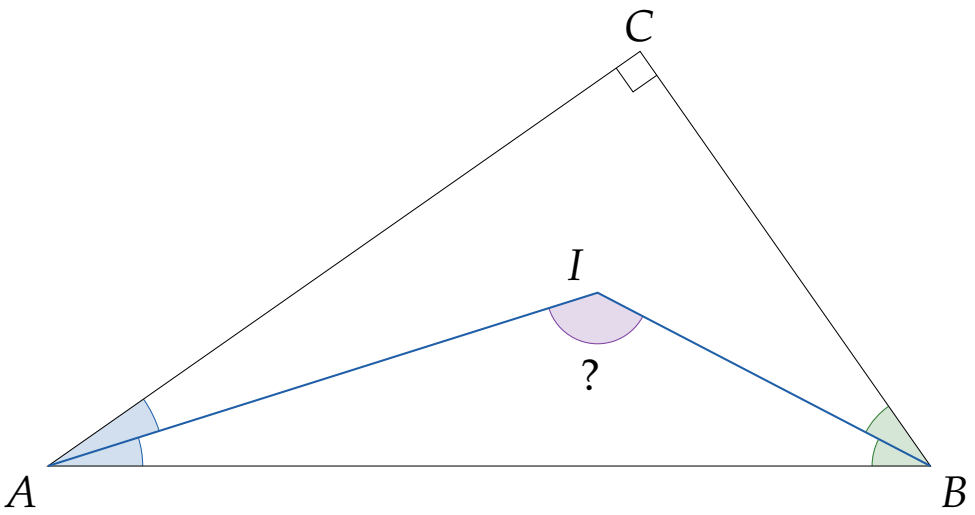
Pavyzdys 2 (kampas tarp pusiaukampinių)

Trikampio ABC kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške I. Įrodykite, kad $\angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$.



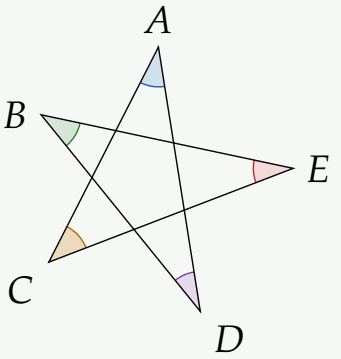

C
70°
I
?
A
B


C
?
I
130°
A
B


C
I
?
A
B

Pavyzdys 3 (žvaigždė iš lapo pradžios)

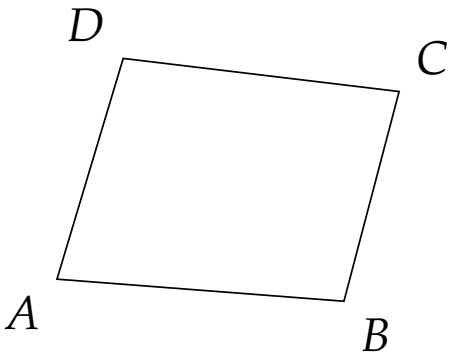
Įrodykite, kad penkiakampės žvaigždės $ACEBD$ smaigalių kampų suma lygi $180°$.

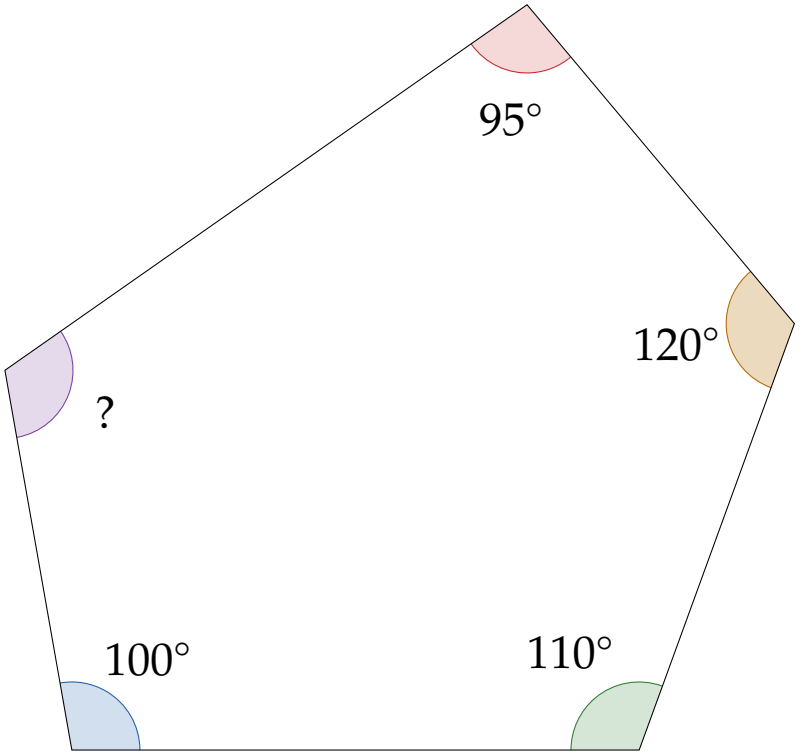


6. Daugiakampio kampų suma

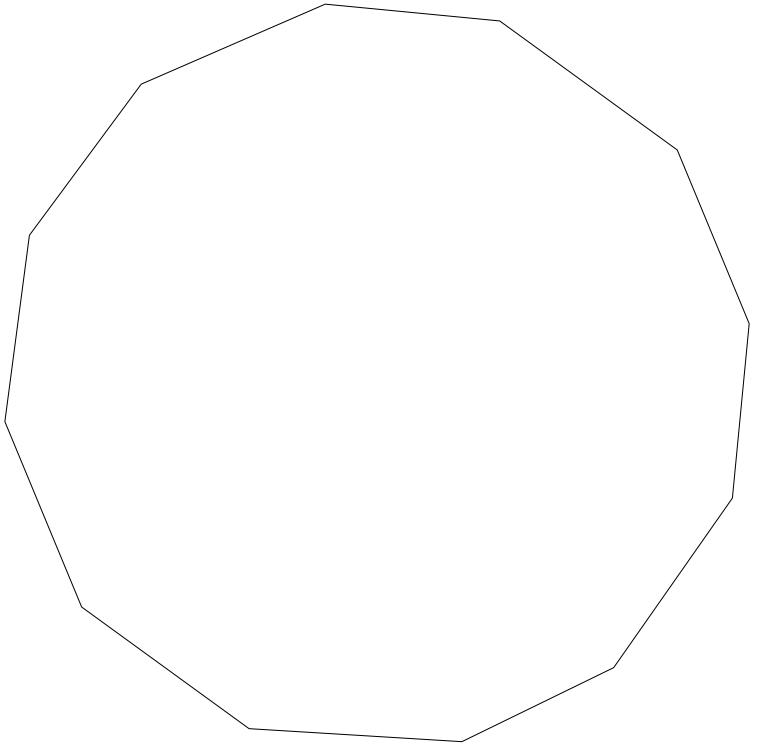
Įrankis 5 (daugiakampio kampų suma)

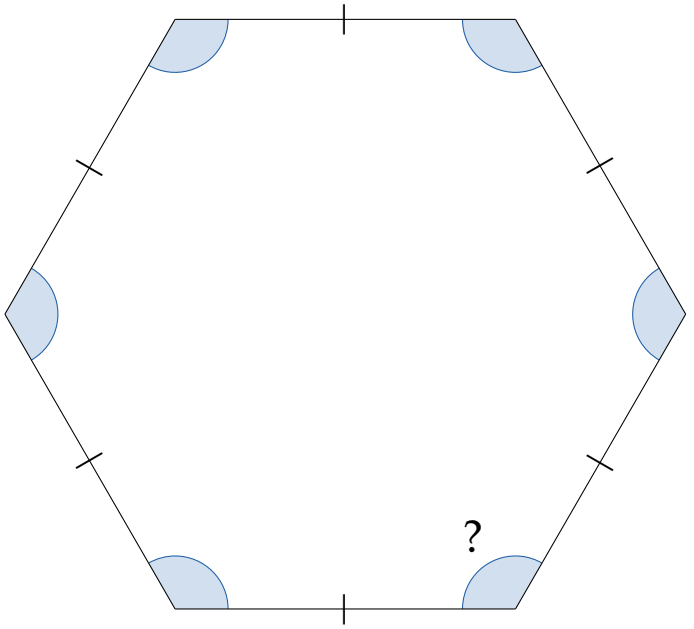
Iškilojo keturkampio kampų suma lygi $360°$. Iškilojo n-kampio kampų suma lygi $(n-2)\cdot 180°$.

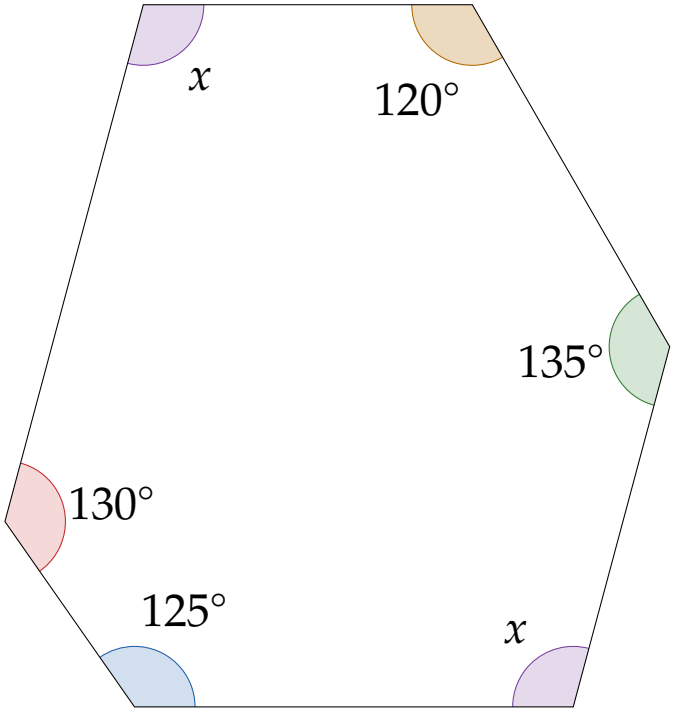



95°
120°
?
100°
110°

12-kampis

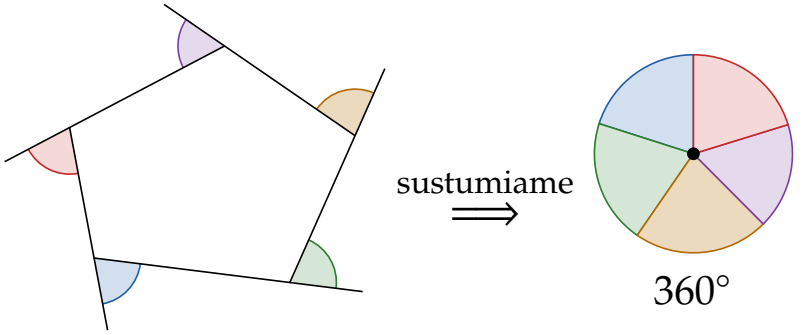





x
120°
135°
130°
125°
x

Išvada. Priekampių suma. Iškilojo daugiakampio priekampių (po vieną prie kiekvienos viršūnės) suma lygi 360° – **nesvarbu, kiek kampų** turi daugiakampis.

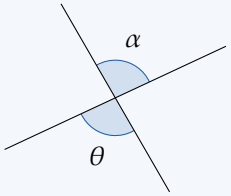
Vaizdžiai. Visus priekampius „sustumkime“ į vieną tašką (jų didumų nekeisdami): jie užpildo visą ratą be tarpų ir be persidengimų – tai 360°. Tą patį pajusite eidami aplink daugiakampį: kiekvienoje viršūnėje pasisukame priekampio kampu, o grįžę į pradžią esame apsisukę lygiai vieną kartą.



Santrauka

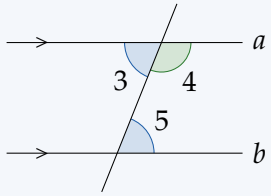
Įrankiai ir išvados

Įrankis 1 (kryžminiai kampai)



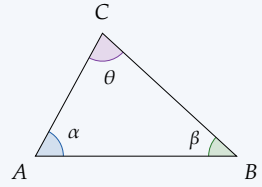
kryžminiai kampai lygūs

Įrankis 2 (lygiagrečios tiesės)



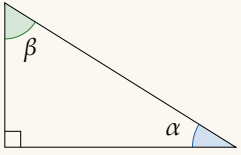
$a \parallel b \Leftrightarrow$ vidaus priešiniai lygūs $\Leftrightarrow$ vidaus vienašalių suma 180°

Įrankis 3 (trikampio kampų suma)



$\alpha + \beta + \theta = 180°$

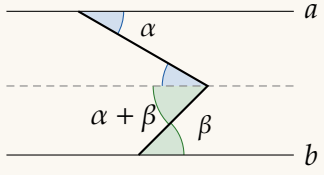
Išvada (statusis trikampis)



$\alpha + \beta = 90°$

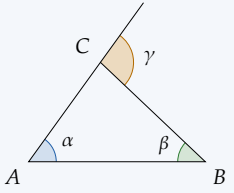
smailiųjų kampų suma 90°

Išvada (laužtė tarp lygiagrečių)



kampas laužtės viršūnėje lygus kampų prie tiesių sumai

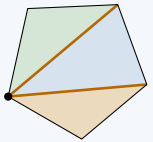
Įrankis 4 (priekampis)



priekampis = dviejų negretimų kampų suma („kampų siurblys“)

Įrankiai ir išvados

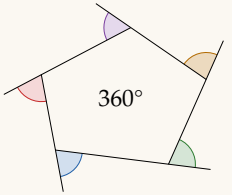
Įrankis 5 (daugiakampio kampų suma)



3 trikampiai: $3 \cdot 180°$

keturkampio $360°$, n-kampio $(n-2) \cdot 180°$

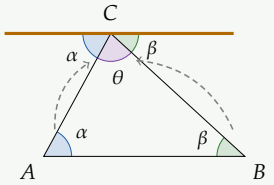
Išvada (priekampių suma)



iškilojo daugiakampio priekampių suma $360°$

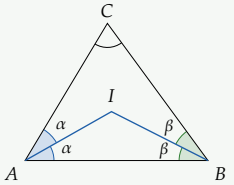
Technikos: signalas → veiksmas

Technika T2. Papildoma lygiagreti tiesė



kampus reikia perkelti ar surinkti (trikampis, laužtė tarp lygiagrečių) → papildoma lygiagreti tiesė per viršūnę: ji **„teleportuoja“ kampus** į tą viršūnę.

Technika T1. Kampų gaudymas



daug kampų → nežinomus žymėti α, β, kitus išreikšti jais ir užrašyti brėžinyje.