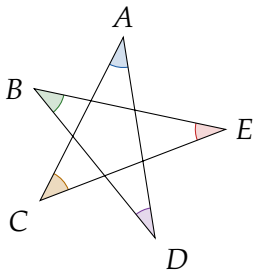
Geometrija

Lapas 1. Kampų metodas I: lygiagrečios tiesės ir trikampio kampai

9 klasė

Klausimas pradžiai. Nubraižykite bet kokią penkiakampę žvaigždę (sujunkite kas antrą iš penkių taškų). Išmatuokite ir sudėkite smaigalių kampus. Pakartokite su kita žvaigžde. Ar suma *visada* ta pati? Atsakymą rasite 3 pavyzdyje.



1. Nuo ko pradedame

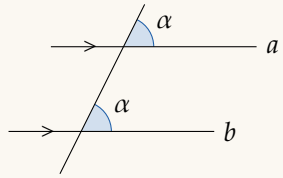
Priimame be įrodymo

A. Jei $a \parallel b$, tai kirstinė su jomis sudaro **lygius atitinkamuosius kampus**.

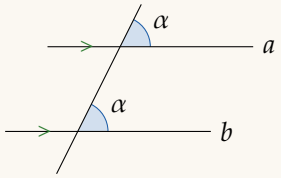
B. Ir atvirkščiai (**lygiagretumo požymis**): jei kirstinė su tiesėmis a ir b sudaro lygius atitinkamuosius kampus, tai $a \parallel b$.

C. Per tašką, nesantį tiesėje, eina **tik viena** tai tiesei lygiagreti tiesė.

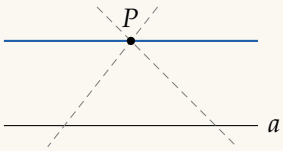
Be to: ištiestinis kampas lygus 180°; kampo dalių suma lygi visam kampui.



A. $a \parallel b \Rightarrow$ kampai lygūs



B. kampai lygūs $\Rightarrow$ $a \parallel b$



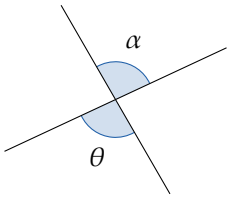
C. per P – tik viena $\parallel a$

Visa kita įrodome. Įrodytus faktus vadiname **įrankiais**; įrodymuose juos nurodome **pavadinimu**.

2. Kryžminiai kampai

Įrankis 1 (kryžminiai kampai)

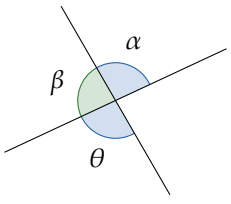
Kryžminiai kampai lygūs: $\alpha = \theta$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Įrodymas.

1. $\alpha = 180° - \beta$ (gretutiniai).
2. $\theta = 180° - \beta$ (gretutiniai).
3. Todėl $\alpha = \theta$.



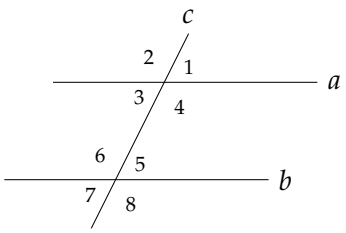
■

3. Lygiagrečios tiesės

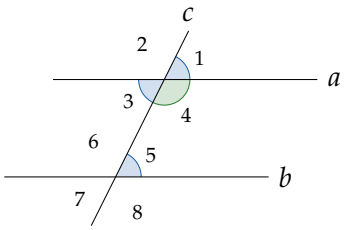
Kampai numeruoti kaip žodyne.

Įrankis 2 (lygiagrečios tiesės)

(a) Jei $a \parallel b$, tai vidaus priešiniai kampai lygūs ($\angle 3 = \angle 5$), o vidaus vienašalių kampų suma lygi 180° ($\angle 4 + \angle 5 = 180°$).
(b) Atvirkščiai (**lygiagretumo požymis**): jei $\angle 3 = \angle 5$ arba $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, tai $a \parallel b$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



(a)

1. $\angle 3 = \angle 1 = \angle 5$ (kryžminiai kampai; atitinkamieji kampai).
2. $\angle 4 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 1 = 180°$ (gretutiniai).

(b) Abiem atvejais gauname $\angle 1 = \angle 5$, todėl $a \parallel b$ (lygiagretumo požymis):

1. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5$ (kryžminiai; sąlyga);
2. $\angle 1 = 180° - \angle 4 = \angle 5$ (gretutiniai; sąlyga).

■

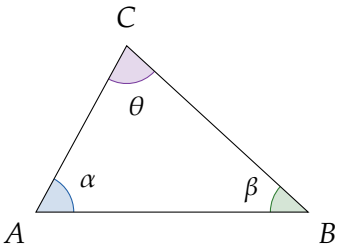
Pratimai 1. Raskite nežinomus kampus arba atsakykite į klausimą (brėžinį nusibraižykite patys).

a) Vienas iš gretutinių kampų 36° didesnis už kitą. Raskite abu kampus.
b) Gretutinių kampų didumų santykis yra 2 : 7. Raskite abu kampus.
c) Dvi tiesės susikirsdamos sudaro keturis kampus. Dviejų iš jų suma 100°. Raskite visus keturis.
d) Tiesės a ir b lygiagrečios, kirstinė su jomis sudaro aštuonis kampus, vienas iš jų 65°. Raskite kitus septynis.
e) Tiesės a ir b lygiagrečios, vidaus vienašalių kampų skirtumas 40°. Raskite tuos kampus.
f) Tiesės a ir b lygiagrečios, vidaus priešinių kampų didumai yra $3x + 10°$ ir $5x - 30°$. Raskite x ir kampus.
g) Kirstinė su tiesėmis a ir b sudaro vidaus vienašalius kampus 47° ir 133°. Ar $a \parallel b$?
h) Tiesės a ir b lygiagrečios, kirstinė $c \perp a$. Ar $c \perp b$? Kodėl?

4. Trikampio kampų suma

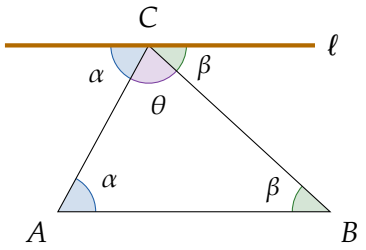
Įrankis 3 (trikampio kampų suma)

Bet kurio trikampio kampų suma lygi 180°: $\alpha + \beta + \theta = 180°$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. Per C nubrėžiame $\ell \parallel AB$.
2. Prie C susidaro kampai α ir β (vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių; kirstinės AC ir BC).
3. Kampai α, θ, β prie C sudaro ištiestinį kampą: $\alpha + \beta + \theta = 180°$.



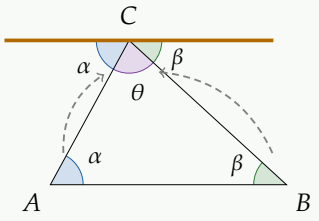
■

Lemiamas žingsnis – tiesė ℓ, kurios sąlygoje nebuvo: pirmoji **papildoma linija**. Ji „teleportavo“ kampus α ir β iš viršūnių A ir B į viršūnę C – ten visus tris kampus jau galime sudėti.

Išvada. Statusis trikampis. Stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma lygi 90°. Pagrindime rašome „(statusis trikampis)“.

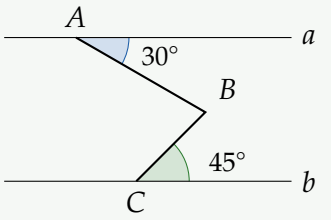
Technika T2. Papildoma lygiagreti tiesė

Signalas: kampą reikia „perkelti“ arba kelis kampus surinkti į vieną vietą (pvz., laužtė tarp lygiagrečių tiesių).
Veiksmas: nubrėžkite **papildomą lygiagrečią tiesę** per tašką, kuriame reikia kampų: trikampio viršūnę (kaip kampų sumos įrodyme) arba laužtės viršūnę. Ji **„teleportuoja“ kampus**: kampas iš tolimos vietos toks pat atsiranda prie tiesės (vidaus priešiniai ir atitinkamieji kampai). Taip išmėtytus kampus surenkame į vieną tašką ir sudedame.



Pavyzdys 1 (laužtė tarp lygiagrečių tiesių)

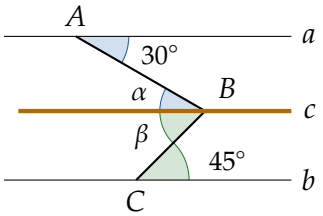
Tiesės a ir b lygiagrečios; taškas A yra tiesėje a, taškas C – tiesėje b, taškas B – tarp jų. Raskite $\angle ABC$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*

Ką matau. kampas B tarp lygiagrečių tiesių, bet nė viena jo kraštinė nekerta abiejų – vidaus priešinių kampų savybės tiesiogiai taikyti negalime.

Idėja (T2). per B – papildoma lygiagreti tiesė $c \parallel a$; ji dalija kampą B į dvi dalis. Pažymėkime jas α (prie BA) ir β (prie BC).



Sprendimas.

1. $\alpha = 30°$ (vidaus priešiniai: $c \parallel a$, kirstinė AB).
2. $c \parallel b$ (nes $c \parallel a$ ir $a \parallel b$), todėl $\beta = 45°$ (vidaus priešiniai, kirstinė BC).
3. $\angle ABC = \alpha + \beta = 75°$.

Pamoka. tiesė c „teleportavo“ kampus 30° ir 45° į viršūnę B.

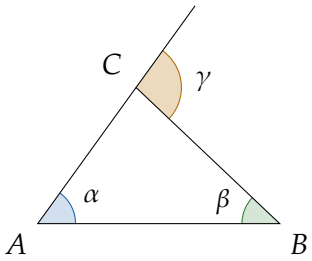
Išvada. Laužtė tarp lygiagrečių. Jei $a \parallel b$, A – tiesėje a, C – tiesėje b, laužtės ABC viršūnė B – tarp tiesių, o A ir C – toje pačioje statmens, nubrėžto per B, pusėje (kaip 1 pavyzdyje), tai $\angle ABC$ lygus

smailiųjų kampų, kuriuos BA sudaro su a, o BC – su b, sumai. Pagrindime rašome „(laužtė tarp lygiagrečių)“.

5. Priekampis ir kampų gaudymas

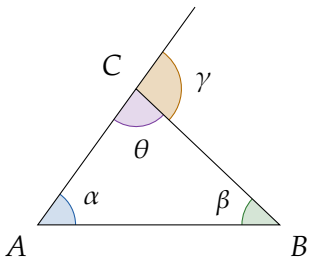
Įrankis 4 (priekampis)

Priekampis lygus dviejų jam negretimų trikampio kampų sumai: $\gamma = \alpha + \beta$. Vaizdžiai: priekampis – „kampų siurblys“.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.

1. $\gamma = 180° - \theta$ (gretutiniai).
2. $\alpha + \beta = 180° - \theta$ (trikampio kampų suma).
3. Todėl $\gamma = \alpha + \beta$.



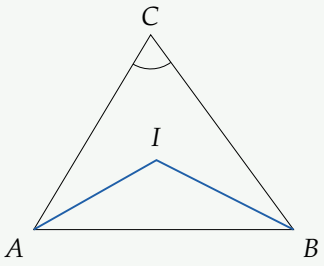
■

Technika T1. Kampų gaudymas

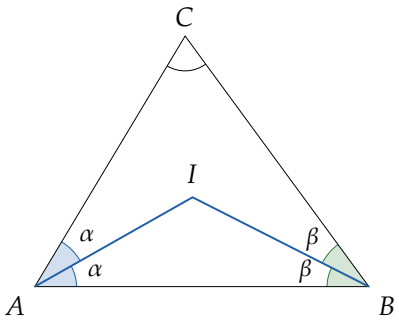
Signalas: daug kampų; reikia rasti ar palyginti kelis.
Veiksmas: nežinomus kampus pažymėkite α, β; kitus išreikškite jais ir **užrašykite brėžinyje**. Lygybės ieškokite trikampyje, ištiestiniame kampe, prie lygiagrečių tiesių.

Pavyzdys 2 (kampas tarp pusiaukampinių)

Trikampio ABC kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške I. Įrodykite, kad $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Ką matau. kampai A ir B dalijami pusiau – su $\frac{\angle A}{2}$ būtų daug trupmenų.

Idėja (T1). pažymėkime $\angle IAB = \alpha$, $\angle IBA = \beta$; tada $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$.

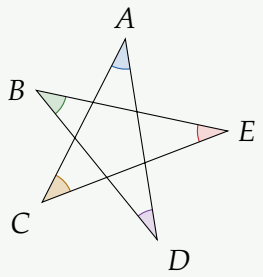
Sprendimas.

1. $2\alpha + 2\beta + \angle C = 180°$ (trikampio ABC kampų suma), todėl $\alpha + \beta = 90° - \frac{1}{2}\angle C$.
2. $\angle AIB = 180° - (\alpha + \beta) = 90° + \frac{1}{2}\angle C$ (trikampio AIB kampų suma).

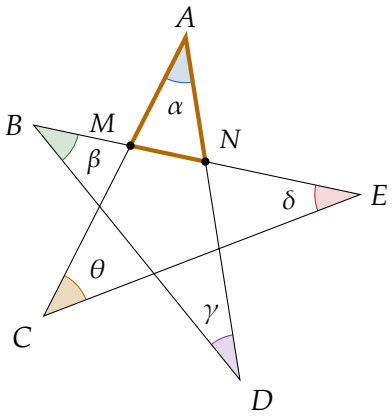
Pamoka. pusiau dalijamą kampą žymėkite 2α, ne α.

Pavyzdys 3 (žvaigždė iš lapo pradžios)

Įrodykite, kad penkiakampės žvaigždės $ACEBD$ smaigalių kampų suma lygi 180°.



Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*



Ką matau. penki kampai išmėtyti, o žinome tik trikampio kampų sumą. Pažymėkime smaigalių kampus prie A, B, C, D, E raidėmis α, β, θ, γ, δ.

Idėja (priekampis). jis sudeda du kampus. Trikampio AMN kampai prie M ir N – kitų trikampių priekampiai.

Sprendimas.

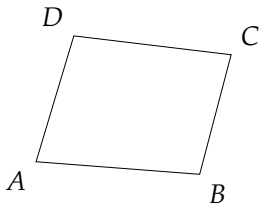
1. $\angle AMN = \theta + \delta$ (trikampio MCE priekampis).
2. $\angle ANM = \beta + \gamma$ (trikampio NBD priekampis).
3. $\alpha + (\theta + \delta) + (\beta + \gamma) = 180°$ (trikampio AMN kampų suma).

Pamoka. priekampis – „kampų siurblys“: toli esančius kampus priekampiais surenkame į vieną trikampį.

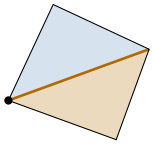
6. Daugiakampio kampų suma

Įrankis 5 (daugiakampio kampų suma)

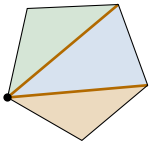
Iškilojo keturkampio kampų suma lygi 360°. Iškilojo n-kampio kampų suma lygi $(n-2)\cdot 180°$.



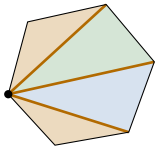
Sustokite. *Prieš skaitydami toliau, pabandykite patys.*
Įrodymas.



keturkampis:
1 įstrižainė, 2 trikampiai



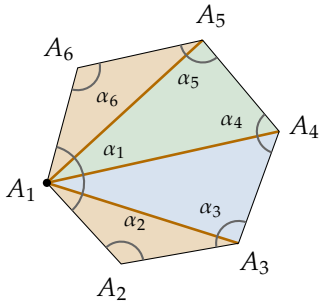
penkiakampis:
2 įstrižainės, 3 trikampiai



šešiakampis:
3 įstrižainės, 4 trikampiai

Pažymėkime n-kampio viršūnes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o jo kampus prie šių viršūnių – $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (brėžinyje $n = 6$).

1. Iš viršūnės A_1 nubrėžiame visas įstrižaines. Daugiakampis iškilasis, todėl jos eina viduje.
2. Tokių įstrižainių yra $n-3$, o trikampių **vienu daugiau**: $n-2$ (tai $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $\ldots$, $A_1A_{n-1}A_n$).
3. Kiekvieno trikampio kampų suma lygi 180° (trikampio kampų suma), todėl visų trikampių kampai kartu sudaro $(n-2)\cdot 180°$.
4. Trikampių kampai kartu sudaro daugiakampio kampus: α_2 ir α_n yra trikampių kampai, kampus $\alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ įstrižainė dalija į dvi dalis, o kampą α_1 – į $n-2$ dalis. Todėl



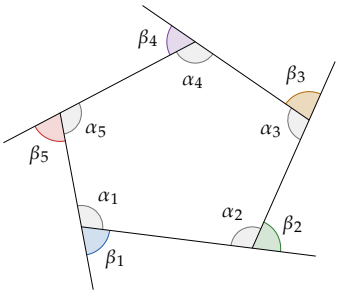
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = (n-2)\cdot 180°.$$

Keturkampiui ($n = 4$) gauname $2\cdot 180° = 360°$. ■

Išvada. Priekampių suma. Iškilojo daugiakampio priekampių (po vieną prie kiekvienos viršūnės) suma lygi 360° – **nesvarbu, kiek kampų** turi daugiakampis.
Įrodymas.

Pažymėkime daugiakampio kampus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, o priekampius prie tų pačių viršūnių – $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ (brėžinyje $n = 5$).

1. Prie kiekvienos viršūnės $\alpha_1 + \beta_1 = 180°$, $\alpha_2 + \beta_2 = 180°$, $\ldots$, $\alpha_n + \beta_n = 180°$ (gretutiniai).
2. Sudėkime visas šias lygybes:



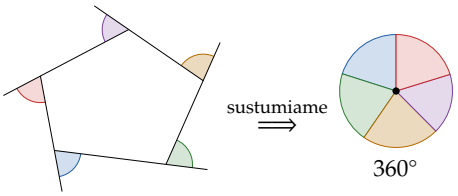
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) = n\cdot 180°.$$

3. Žinome, kad $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = (n-2)\cdot 180°$ (daugiakampio kampų suma), todėl

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = 2\cdot 180° = 360°.$$

■

Vaizdžiai. Visus priekampius „sustumkime“ į vieną tašką (jų didumų nekeisdami): jie užpildo visą ratą be tarpų ir be persidengimų – tai 360°. Tą patį pajusite eidami aplink daugiakampį: kiekvienoje viršūnėje pasisukame priekampio kampu, o grįžę į pradžią esame apsisukę lygiai vieną kartą.



Pratimai 2. Raskite nežinomus kampus arba dydžius.

a) Dviejų trikampio kampų didumai yra 40° ir 75°. Raskite trečiąjį.
b) Trikampio kampų didumų santykis yra 2 : 3 : 4. Raskite trikampio kampus.
c) Stačiojo trikampio vienas smailusis kampas 4 kartus didesnis už kitą. Raskite abu smailiuosius kampus.
d) Trikampio ABC priekampis prie C lygus 130°, $\angle A = 50°$. Raskite $\angle B$.
e) Trikampio priekampių (po vieną prie kiekvienos viršūnės) santykis 4 : 5 : 6. Raskite trikampio kampus. (Kam lygi priekampių suma?)
f) Kokia iškilojo penkiakampio kampų suma? Šešiakampio?
g) Iškilojo daugiakampio kampų suma lygi 1980°. Kiek jis turi kampų?
h) Iškilojo keturkampio kampų didumų santykis yra 1 : 2 : 3 : 4. Raskite keturkampio kampus.
i) Visi iškilojo aštuonkampio kampai lygūs. Raskite jo kampą. O dešimtkampio?

Uždaviniai

Lygiašonio trikampio savybių dar neturime – jų nenaudokite. ★ – sunkus uždavinys.

1. Tiesės a ir b lygiagrečios, c – kirstinė. Vienas iš susidariusių kampų lygus $3x$, kitas $2x + 20°$. Raskite x. (Yra du atvejai.)

2. Ar gali trikampis turėti du bukus kampus? Du stačius? Statų ir buką? Atsakymus pagrįskite.

3. Trikampio ABC priekampis prie viršūnės A lygus 120°, o $\angle B$ du kartus didesnis už $\angle C$. Raskite trikampio kampus.

4. Trikampyje ABC: $\angle A = 70°$, $\angle B = 60°$, CH – aukštinė. Raskite $\angle ACH$ ir $\angle BCH$.

5. Trikampyje ABC: $\angle A = 80°$, $\angle B = 40°$. Iš viršūnės C nubrėžtos aukštinė CH ir pusiaukampinė CL. Raskite kampą HCL.

6. Vienas trikampio kampas lygus kitų dviejų sumai. Įrodykite, kad trikampis statusis.

7. Trikampio ABC kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške I, $\angle AIB = 125°$. Raskite $\angle C$.

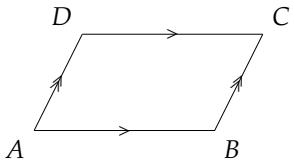
8. Įrodykite, kad gretutinių kampų pusiaukampinės yra statmenos.

9. Įrodykite, kad dviejų kryžminių kampų pusiaukampinės sudaro vieną tiesę.

10. Ar yra iškilasis daugiakampis, kurio visi kampai lygūs 100°? O 140°?

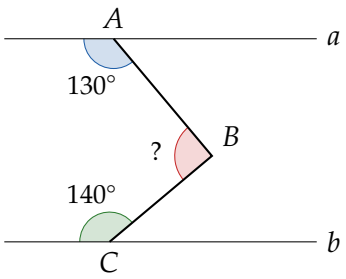
11.

Keturkampio $ABCD$ priešingos kraštinės lygiagrečios: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Įrodykite, kad $\angle A = \angle C$ ir $\angle B = \angle D$.



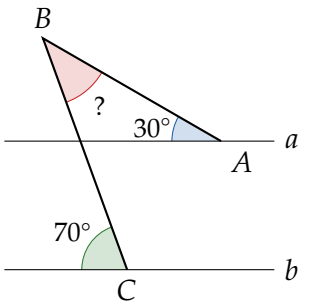
12.

Tiesės a ir b lygiagrečios; taškas A yra tiesėje a, taškas C – tiesėje b, taškas B – tarp jų. Raskite $\angle ABC$.



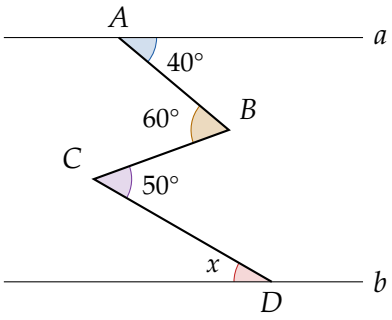
13.

Tiesės a ir b lygiagrečios; taškas A yra tiesėje a, taškas C – tiesėje b, o taškas B – *virš* tiesės a. Raskite $\angle ABC$.



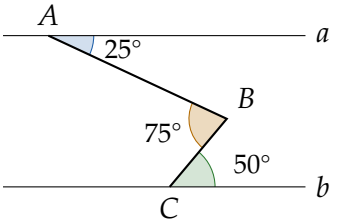
14.

Tiesės a ir b lygiagrečios. Laužtė $ABCD$ eina tarp tiesių (žr. brėžinį). Raskite kampą x.



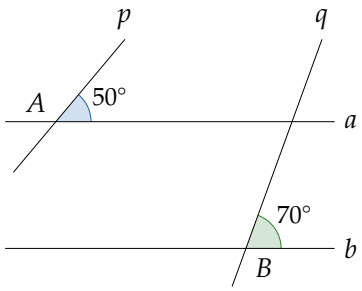
15.

Tiesė a eina per A, tiesė b – per C; kampai pažymėti brėžinyje. Įrodykite, kad $a \parallel b$.



16.

Tiesės a ir b lygiagrečios. Tiesė p kerta a taške A, tiesė q kerta b taške B; kampai pažymėti brėžinyje. Tiesės p ir q kertasi už brėžinio ribų. Raskite kampą tarp jų.

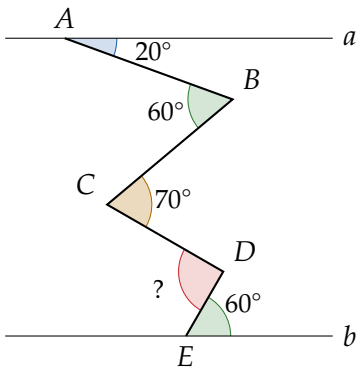


17.

Tiesės a ir b lygiagrečios; laužtė $ABCDE$ (žr. brėžinį).

a) Raskite $\angle D$.

b) Įrodykite: kampų prie A ir E (su tiesėmis a, b) ir kampo C suma lygi kampų B ir D sumai.



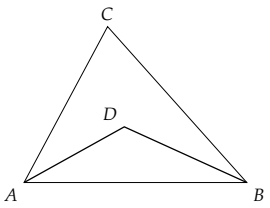
18. Smailiojo trikampio ABC aukštinės AA_1 ir BB_1 kertasi taške H. Įrodykite, kad $\angle AHB = 180^\circ - \angle C$.

19. Smailiajame trikampyje ABC kampas A didesnis už kampą B. Iš viršūnės C nubrėžtos aukštinė CH ir pusiaukampinė CL. Įrodykite, kad $\angle HCL = \dfrac{\angle A - \angle B}{2}$. (Patikrinkite pagal 5 uždavinį.)

20. Atkarpos AC ir BD kertasi taške O. Įrodykite, kad $\angle OAB + \angle OBA = \angle OCD + \angle ODC$.

21.

Taškas D yra trikampio ABC viduje. Įrodykite, kad $\angle ADB = \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD$.



22. Tiesės a ir b lygiagrečios, kirstinė kerta jas taškuose A ir B. Dviejų vidaus vienašalių kampų pusiaukampinės kertasi taške M. Įrodykite, kad $\angle AMB = 90^\circ$.

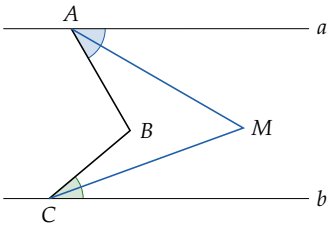
23. Nubrėžta stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90^\circ$) aukštinė CH. Įrodykite, kad $\angle ACH = \angle B$ ir $\angle BCH = \angle A$.

24. ★ Kiek daugiausia smailiųjų kampų gali turėti iškilasis daugiakampis?

25. Trikampio ABC kraštinės CA ir CB pratęstos už taškų A ir B. Gautų priekampių prie viršūnių A ir B pusiaukampinės kertasi taške J. Įrodykite, kad $\angle AJB = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle C$.

26.

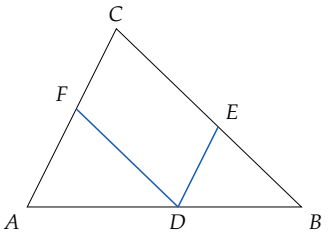
Tiesės a ir b lygiagrečios; laužtė ABC (kaip 1 pavyzdyje). Kampų, kuriuos laužtė sudaro su tiesėmis prie A ir C (pažymėti brėžinyje), pusiaukampinės kertasi taške M. Įrodykite, kad $\angle AMC = \frac{1}{2}\angle ABC$.



27. Trikampio ABC kraštinė BC pratęsta už taško C iki taško E. Kampo B pusiaukampinė ir kampo ACE pusiaukampinė kertasi taške J. Įrodykite, kad $\angle BJC = \dfrac{1}{2}\angle A$.

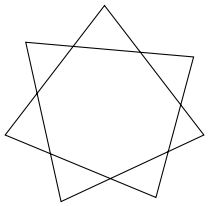
28.

Taškas D – trikampio ABC kraštinės AB vidinis taškas. Per D nubrėžtos $DE \parallel AC$ (E – kraštinėje BC) ir $DF \parallel BC$ (F – kraštinėje AC). Įrodykite, kad trikampio ABC kampų suma lygi 180°, naudodami kampus prie D (trikampio kampų sumos nenaudokite).



29. ★

Sujungus kas antrą iš septynių apskritimo taškų, gaunama septynkampė žvaigždė, kurios viduje – iškilasis septynkampis. Raskite žvaigždės septynių smaigalių kampų sumą.

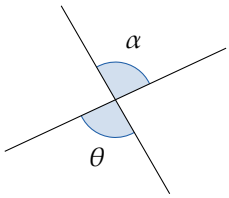


30. ★ Kirstinė kerta tieses a ir b taškuose A ir B, o vidaus vienašalių kampų didumai yra 70° ir 105°. Įrodykite, kad tiesės a ir b kertasi, ir raskite kampą tarp jų.

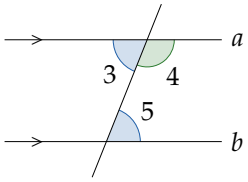
Įrankių santrauka

Šiuos faktus reikia mokėti – ir mokėti įrodyti.

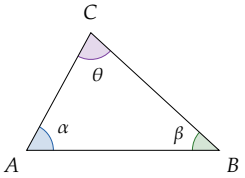
Įrankis 1 *(kryžminiai kampai)* kryžminiai kampai lygūs



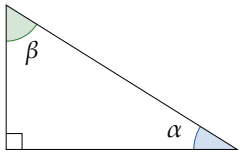
Įrankis 2 *(lygiagrečios tiesės)* $a \parallel b \Leftrightarrow$ vidaus priešiniai lygūs $\Leftrightarrow$ vidaus vienašalių suma 180°



Įrankis 3 *(trikampio kampų suma)* $\alpha + \beta + \theta = 180°$

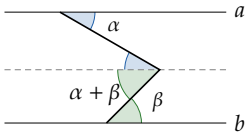


Išvada *(statusis trikampis)* smailiųjų kampų suma 90°

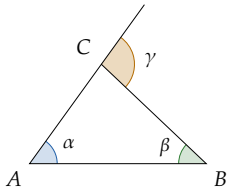


$\alpha + \beta = 90°$

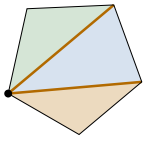
Išvada *(laužtė tarp lygiagrečių)* kampas laužtės viršūnėje lygus kampų prie tiesių sumai



Įrankis 4 *(priekampis)* priekampis = dviejų negretimų kampų suma („kampų siurblys“)

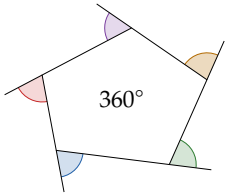


Įrankis 5 *(daugiakampio kampų suma)* keturkampio 360°, n-kampio $(n-2) \cdot 180°$



3 trikampiai: $3 \cdot 180°$

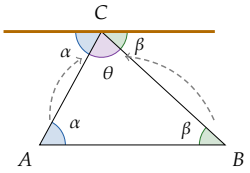
Išvada *(priekampių suma)* iškilojo daugiakampio priekampių suma 360°



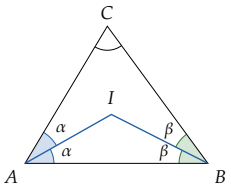
Technikų santrauka

Signalas → veiksmas. Šios technikos padeda rasti sprendimą.

T2 *(Papildoma lygiagreti tiesė)* kampus reikia perkelti ar surinkti (trikampis, laužtė tarp lygiagrečių) → papildoma lygiagreti tiesė per viršūnę: ji **„teleportuoja" kampus** į tą viršūnę.



T1 *(Kampų gaudymas)* daug kampų → nežinomus žymėti α, β, kitus išreikšti jais ir užrašyti brėžinyje.



Pratimų atsakymai

Pratimai 1. a) 72° ir 108°; b) 40° ir 140°; c) 50°, 130°, 50°, 130°; d) trys po 65°, keturi po 115°; e) 110° ir 70°; f) $x = 20°$, abu kampai po 70°; g) taip, nes $47° + 133° = 180°$; h) taip: atitinkamasis kampas prie b irgi 90° (atitinkamieji kampai);

Pratimai 2. a) 65°; b) 40°, 60°, 80°; c) 18° ir 72°; d) 80°; e) 84°, 60°, 36°; f) 540°; 720°; g) 13; h) 36°, 72°, 108°, 144°; i) 135°; 144°;

Uždavinių atsakymai

1. $x = 20°$ (kampai lygūs) arba $x = 32°$ (kampų suma 180°).
2. Negali: tie du kampai jau sudaro $\geq 180°$.
3. $\angle A = 60°$, $\angle B = 80°$, $\angle C = 40°$.
4. $\angle ACH = 20°$, $\angle BCH = 30°$.
5. 20°.
6. Įrodymas – lapo gale.
7. 70°.
8. Įrodymas – lapo gale.
9. Įrodymas – lapo gale.
10. 100° – nėra; 140° – yra, devynkampis (pvz., taisyklingasis).
11. Įrodymas – lapo gale. (Tai lygiagretainio savybė – jos prireiks vėliau.)
12. 90°.
13. 40°.
14. $x = 30°$.
15. Įrodymas – lapo gale.
16. 20°.
17. a) 90°; b) įrodymas – lapo gale ($20° + 70° + 60° = 60° + 90°$).
18. Įrodymas – lapo gale.
19. Įrodymas – lapo gale.

20. Įrodymas – lapo gale. (Šį brėžinį vadinsime „aštuoniuke“.)
21. Įrodymas – lapo gale. (Šį brėžinį vadinsime „bumerangu“.)
22. Įrodymas – lapo gale.
23. Įrodymas – lapo gale. (Šį faktą dar ne kartą naudosime.)
24. Daugiausia 3.
25. Įrodymas – lapo gale.
26. Įrodymas – lapo gale.
27. Įrodymas – lapo gale.
28. Įrodymas – lapo gale.
29. 540°.
30. Įrodymas – lapo gale; kertasi toje pusėje, kur 70° ir 105°, kampas 5°.

Užuominos

Žiūrėkite tik tada, kai tikrai įstrigote.

1. Du kampai prie lygiagrečių tiesių yra arba lygūs, arba jų suma 180°.
2. Kiek jau sudaro tie du kampai?
3. 1) Priekampis ir jam negretimi kampai. 2) $\angle B + \angle C = 120°$ ir $\angle B = 2\angle C$.
4. Trikampiai ACH ir BCH statieji.
5. 1) Aukštinė ir pusiaukampinė iš tos pačios viršūnės. 2) Raskite $\angle ACL$ ir $\angle ACH$, tada atimkite.
6. 1) Žinoma visų trijų kampų suma. 2) $\theta = \alpha + \beta$ įrašykite į $\alpha + \beta + \theta = 180°$.
7. 2 pavyzdys.
8. 1) Gretutinių kampų suma žinoma. 2) T1: pusės α ir β; kam lygi $2\alpha + 2\beta$?
9. 1) Pakanka įrodyti, kad kampas tarp pusiaukampinių lygus 180°. 2) Pažymėkite kryžminių kampų puses α, o tarp jų esantį kampą β.
10. 1) Visi kampai lygūs – tada ir visi priekampiai lygūs. 2) Priekampių suma 360°: kiek telpa priekampių po 80°? Po 40°?
11. 1) Dvi lygiagrečių tiesių poros. 2) Vidaus vienašaliai: kam lygios $\angle A + \angle B$ ir $\angle B + \angle C$?
12. 1) Laužtė tarp lygiagrečių, tik duoti kampai buki. 2) Smailieji kampai prie tiesių – gretutiniai duotiesiems; tada išvada „laužtė tarp lygiagrečių“.
13. 1) Viršūnė B ne tarp tiesių. 2) Per B – lygiagreti tiesė; ar kampai sudedami, ar atimami?
14. 1) Laužtė tarp lygiagrečių – kur jau tai matėte? 2) Per C – papildoma lygiagreti tiesė; laužtė ABC – kaip 1 pavyzdyje.
15. 1) Reikia *įrodyti* lygiagretumą. 2) Per B nubrėžkite $c \parallel a$ ir įrodykite, kad $c \parallel b$.
16. 1) Susikirtimo taško brėžinyje nėra – kampą reikia „atnešti“ į brėžinį. 2) Per A nubrėžkite $q' \parallel q$.
17. 1) Laužtė, kurios trys viršūnės yra tarp tiesių. 2) Per C – viena papildoma lygiagreti tiesė; abi laužtės ABC ir CDE – kaip 1 pavyzdyje.
18. 1) Kuriame keturkampyje yra abu statieji kampai prie A_1, B_1 ir kampas C? 2) Iš keturkampio CA_1HB_1 kampų sumos raskite $\angle A_1HB_1$, tada – kryžminiai kampai.
19. 1) Kaip 5 uždavinyje, tik bendruoju atveju. 2) $\angle ACL = \frac{\angle C}{2}$, $\angle ACH = 90° - \angle A$; atimkite.
20. 1) Du trikampiai, turintys bendrą viršūnę O. 2) $\angle AOD$ – kurių trikampių priekampis?
21. 1) Kampų trys, o įrankis „priekampis“ sudeda du. 2) Pratęskite AD iki kraštinės BC

(taškas E) ir du kartus taikykite priekampio savybę.

22. 1) Vidaus vienašalių kampų suma žinoma. 2) Pažymėkite jų puses α ir β; kam lygi $2\alpha + 2\beta$?

23. 1) Kiek stačiųjų trikampių čia susidaro? 2) Išreikškite $\angle ACH$ (trikampis ACH) ir $\angle B$ (trikampis ABC) kampu $\angle A$.

24. 1) Smailus kampas – bukas priekampis. 2) Priekampių suma 360°. Kiek bukų priekampių telpa?

25. 1) Kaip 2 pavyzdyje. 2) Priekampio prie A pusė lygi $\frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

26. 1) Kur dar matote laužtę tarp tų pačių tiesių? 2) AMC – irgi laužtė: laužtė tarp lygiagrečių dukart.

27. 1) $\angle ACE$ – priekampis. Kam jis lygus? 2) $\angle JCE$ – trikampio BCJ priekampis.

28. 1) Trys kampai prie D sudaro ištiestinį kampą. 2) Kiekvieną iš jų „teleportuokite“ į trikampio viršūnę (atitinkamieji ar vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių).

29. 1) Smaigalys – trikampis, kurio pagrindas – vidinio septynkampio kraštinė. 2) Smaigalio kampas = 180°− du septynkampio priekampiai; priekampių suma žinoma.

30. 1) Jei $a \parallel b$ – kokia vidaus vienašalių suma? 2) Kurioje pusėje gali būti trikampis ABP (P – tiesių susikirtimo taškas)?

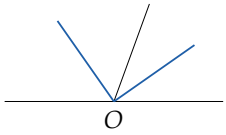
Sunkesnių uždavinių sprendimai

Skaitykite tik tada, kai uždavinį išsprendėte arba ilgai ir rimtai bandėte.

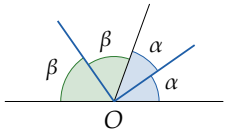
6 uždavinys.

Tarkime, $\theta = \alpha + \beta$ – kampas, lygus kitų dviejų kampų α ir β sumai. Tada $180° = \alpha + \beta + \theta = 2\theta$ (trikampio kampų suma), todėl $\theta = 90°$.

8 uždavinys.



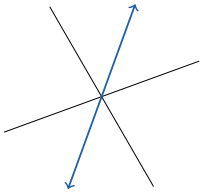
sąlyga



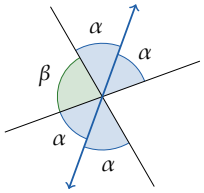
sprendimas

Pažymėkime vieno gretutinio kampo puses α, kito – β. Kadangi $2\alpha + 2\beta = 180°$ (gretutiniai), tai kampas tarp pusiaukampinių $\alpha + \beta = 90°$.

9 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

Pažymėkime kryžminių kampų puses α, o kampą tarp jų – β.

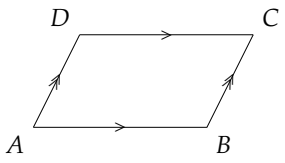
1. $2\alpha + \beta = 180°$ (gretutiniai; kryžminiai kampai lygūs).
2. Kampas tarp pusiaukampinių $\alpha + \beta + \alpha = 180°$ – ištiestinis: viena tiesė.

10 uždavinys.

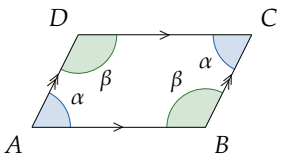
1. Priekampiai po $80°$: $n = 360° : 80° = 4{,}5$ nėra sveikasis skaičius: tokio daugiakampio nėra (priekampių suma).
2. Priekampiai po $40°$: $n = 360° : 40° = 9$ – yra, pvz., taisyklingasis devynkampis.

Kitas būdas. $(n-2) \cdot 180° = 100° \cdot n \Rightarrow n = 4{,}5$; $(n-2) \cdot 180° = 140° \cdot n \Rightarrow n = 9$ (daugiakampio kampų suma).

11 uždavinys.



sąlyga

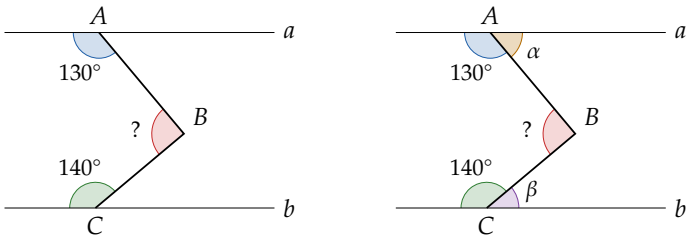


sprendimas

Pažymėkime $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

1. $\angle A + \angle B = 180°$ (vidaus vienašaliai: $AD \parallel BC$, kirstinė AB).
2. $\angle B + \angle C = 180°$ (vidaus vienašaliai: $AB \parallel CD$, kirstinė BC).
3. Todėl $\angle A = \angle C$; analogiškai ($\angle C + \angle D = 180°$) $\angle B = \angle D$.

12 uždavinys.



Ką matau. laužtė tarp lygiagrečių, bet duoti buki kampai.

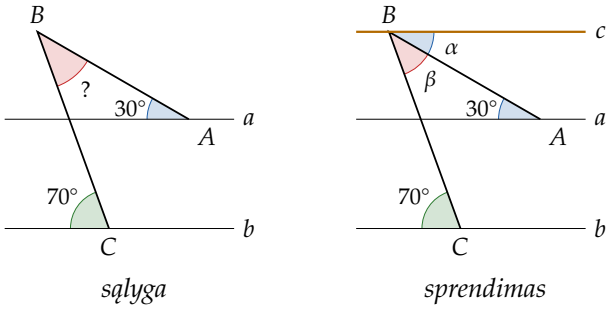
Idėja. smailieji kampai prie tiesių – gretutiniai duotiesiems. Pažymėkime juos α (prie A) ir β (prie C).

1. $\alpha = 180° - 130° = 50°$, $\beta = 180° - 140° = 40°$ (gretutiniai).
2. $\angle ABC = \alpha + \beta = 90°$ (laužtė tarp lygiagrečių).

Kitas būdas. Per B – papildoma lygiagreti tiesė $c \parallel a$: α ir β – vidaus vienašalių kampų 130° ir 140° papildiniai iki 180° ($c \parallel a$, $c \parallel b$).

Pamoka. išvadą „laužtė tarp lygiagrečių“ taikome smailiesiems kampams – bukuosius pirmiausia pakeičiame gretutiniais.

13 uždavinys.



Ką matau. B ne tarp tiesių – kampų nesudėsime.

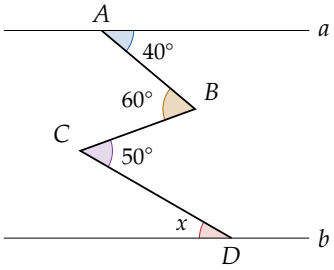
Idėja (T2). per B – $c \parallel a$. Pažymėkime kampą tarp BA ir c raide α, o $\angle ABC = \beta$.

1. $\alpha + \beta = 70°$ (kampas tarp c ir BC; vidaus priešiniai; $c \parallel b$, nes $c \parallel a$ ir $a \parallel b$).
2. $\alpha = 30°$ (vidaus priešiniai, $c \parallel a$).
3. $\angle ABC = \beta = 70° - 30° = 40°$.

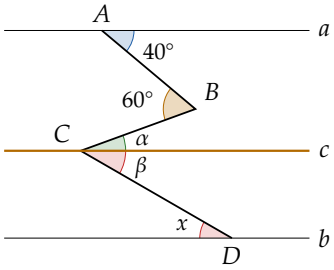
Kitas būdas. BC kerta a taške K; kampas prie K tarp a ir BC lygus 70° (vidaus priešiniai: $a \parallel b$, kirstinė BC) ir yra trikampio ABK priekampis: $70° = 30° + \angle B$.

Pamoka. viršūnė ne tarp tiesių – kampai atimami.

14 uždavinys.



sąlyga

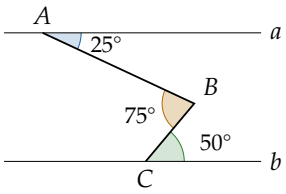


sprendimas

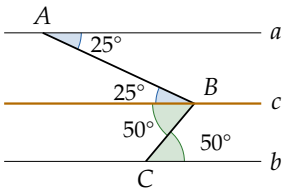
Idėja (T2). per C – papildoma lygiagreti tiesė $c \parallel a$ (tada ir $c \parallel b$); ji dalija kampą C į dvi dalis. Pažymėkime jas α (prie CB) ir β (prie CD).

1. $60° = 40° + \alpha$ (laužtė tarp lygiagrečių: ABC tarp a ir c), $\alpha = 20°$.
2. $\beta = 50° - 20° = 30°$, $x = \beta = 30°$ (vidaus priešiniai, $c \parallel b$, kirstinė CD).

15 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

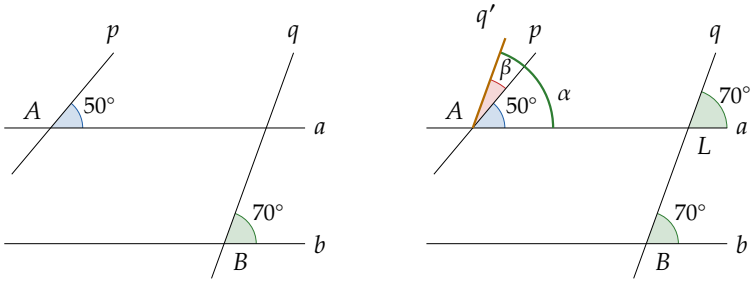
Ką matau. reikia įrodyti, ne naudoti lygiagretumą.

Idėja (T2). per B – $c \parallel a$.

1. Kampas tarp c ir BA lygus $25°$ (vidaus priešiniai, $c \parallel a$).
2. Likusi kampo B dalis lygi $75° - 25° = 50°$; ji ir $50°$ kampas prie C yra vidaus priešiniai kampai, todėl $c \parallel b$ (lygiagretumo požymis).
3. $a \parallel c$ ir $c \parallel b$, todėl $a \parallel b$.

Kitas būdas. Pratęsiame CB už B iki tiesės a (taškas K). Tada $75° = 25° + \angle AKB$ (trikampio ABK priekampis), $\angle AKB = 50°$. Kampas AKB ir $50°$ kampas prie C – vidaus priešiniai (kirstinė KC), todėl $a \parallel b$ (lygiagretumo požymis).

16 uždavinys.



Ką matau. susikirtimo taško brėžinyje nėra.

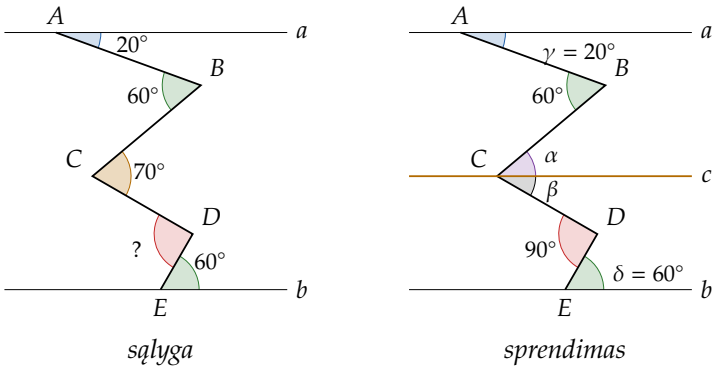
Idėja (T2). per A – $q' \parallel q$.

1. Pažymėkime tiesių q ir a susikirtimo tašką L. Kampas tarp q ir a prie L lygus $70°$ (atitinkamieji kampai, $a \parallel b$, kirstinė q), todėl $\alpha = 70°$ (atitinkamieji kampai, $q' \parallel q$, kirstinė a).
2. $\beta = \alpha - 50° = 20°$.
3. β lygus kampui tarp p ir q (atitinkamieji, $q' \parallel q$, kirstinė p).

Kitas būdas. P – tiesių p ir q susikirtimo taškas. Kampas tarp q ir a prie L lygus $70°$ (atitinkamieji kampai, $a \parallel b$, kirstinė q); jis – trikampio ALP priekampis: $70° = 50° + \angle P$, $\angle P = 20°$ (priekampis).

Pamoka. papildoma lygiagreti tiesė gali eiti ir per kitą tašką – ten, kur patogu.

17 uždavinys.

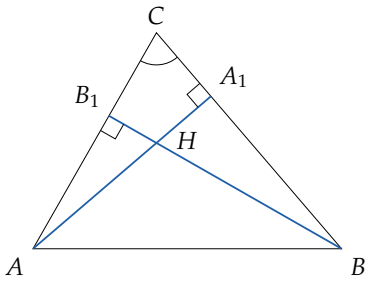


Idėja (T2). per C – papildoma lygiagreti tiesė $c \parallel a$ (tada ir $c \parallel b$); ji dalija kampą C į dvi dalis. Pažymėkime jas α (prie CB) ir β (prie CD).

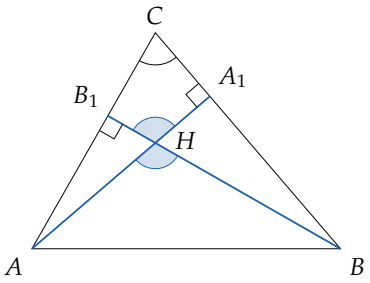
1. a) $60° = 20° + \alpha$ (laužtė tarp lygiagrečių: ABC tarp a ir c), $\alpha = 40°$; $\beta = 70° - 40° = 30°$.
2. $\angle D = \beta + 60° = 90°$ (laužtė tarp lygiagrečių: CDE tarp c ir b).
3. b) Pažymėkime γ ir δ kampus prie A ir E su tiesėmis. Tada $\angle B = \gamma + \alpha$, $\angle D = \beta + \delta$ (laužtė tarp lygiagrečių), $\angle C = \alpha + \beta$, todėl $\gamma + \angle C + \delta = \gamma + \alpha + \beta + \delta = \angle B + \angle D$.

Pamoka. laužtėje tarp lygiagrečių tiesių į vieną pusę ir į kitą pusę atsivėrusių kampų sumos lygios (kampai prie tiesių irgi skaičiuojami).

18 uždavinys.



sąlyga

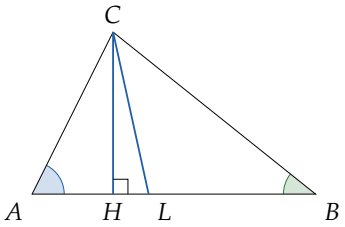


sprendimas

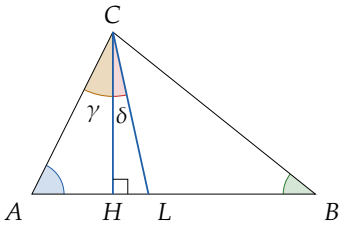
1. $\angle A_1HB_1 = 360° - 90° - 90° - \angle C = 180° - \angle C$ (keturkampio CA_1HB_1 kampų suma).
2. $\angle AHB = \angle A_1HB_1 = 180° - \angle C$ (kryžminiai kampai).

Pamoka. jei keturkampio du kampai statūs, likusių dviejų kampų suma lygi 180°.

19 uždavinys.



sąlyga

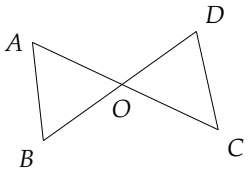


sprendimas

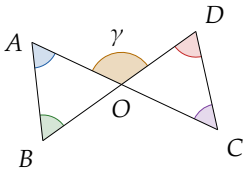
Pažymėkime $\angle ACH = \gamma$, $\angle HCL = \delta$.

1. $\angle ACL = \frac{\angle C}{2} = \frac{180° - \angle A - \angle B}{2} = 90° - \frac{\angle A + \angle B}{2}$ (pusiaukampinė; trikampio kampų suma).
2. $\gamma = 90° - \angle A$ (statusis trikampis ACH).
3. $\delta = \angle ACL - \gamma = 90° - \frac{\angle A + \angle B}{2} - 90° + \angle A = \dfrac{\angle A - \angle B}{2}$.

20 uždavinys.



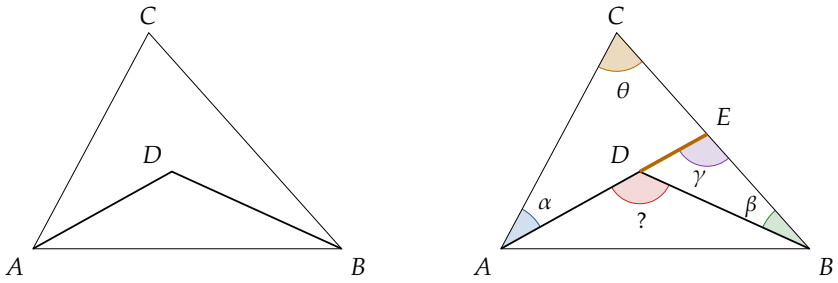
sąlyga



sprendimas

Pažymėkime $\angle AOD = \gamma$. Jis – trikampio AOB ir kartu trikampio COD priekampis, todėl $\angle OAB + \angle OBA = \gamma = \angle OCD + \angle ODC$ (priekampis, du kartus).

21 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

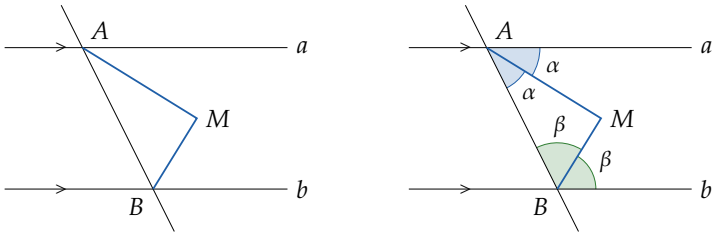
Idėja. pratęsiame AD iki BC (taškas E). Pažymėkime $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$, $\angle ACB = \theta$, $\angle DEB = \gamma$.

1. $\angle ADB = \gamma + \beta$ (trikampio DBE priekampis).
2. $\gamma = \alpha + \theta$ (trikampio AEC priekampis).
3. $\angle ADB = \alpha + \beta + \theta$, t. y. $\angle ADB = \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD$.

Kitas būdas (be papildomos linijos). Iš trikampio ADB kampų sumos $\angle ADB = 180^\circ - (\angle A - \alpha) - (\angle B - \beta)$, o iš trikampio ABC kampų sumos $\angle A + \angle B = 180^\circ - \theta$, todėl $\angle ADB = \theta + \alpha + \beta$.

Pamoka. pratęsta atkarpa sukuria trikampius su reikiamais priekampiais.

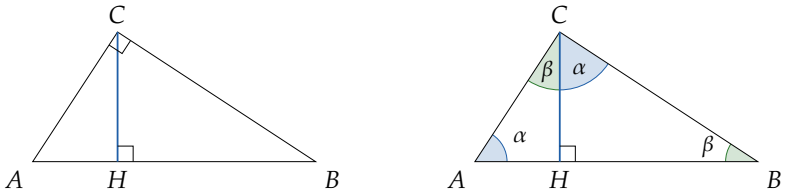
22 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

Pažymėkime vidaus vienašalių kampų prie A ir B puses α ir β. Kadangi $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ (vidaus vienašaliai kampai prie lygiagrečių), tai $\angle AMB = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$ (trikampio AMB kampų suma).

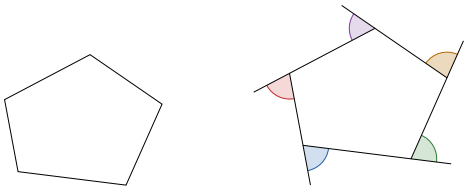
23 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

Pažymėkime $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Tada $\angle ACH = 90^\circ - \alpha = \beta$ (statieji trikampiai ACH ir ABC). Analogiškai $\angle BCH = 90^\circ - \beta = \alpha$.

24 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

Ką matau. smailus kampas – bukas priekampis.

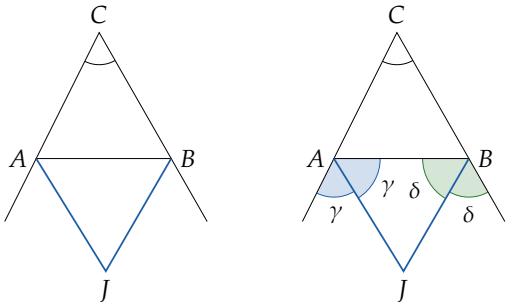
Idėja. skaičiuojame priekampių sumą.

1. Keturių bukų priekampių suma viršytų $360°$ (priekampių suma) – todėl smailiųjų kampų ≤ 3.
2. Trys galimi: smailusis trikampis.

Kitas būdas. Jei smailiųjų kampų būtų bent 4, kampų suma būtų $< 4\cdot 90° + (n-4)\cdot 180° = (n-2)\cdot 180°$ – prieštara daugiakampio kampų sumai.

Pamoka. klausimą apie kampus verčiame klausimu apie priekampius – jų suma visada ta pati.

25 uždavinys.

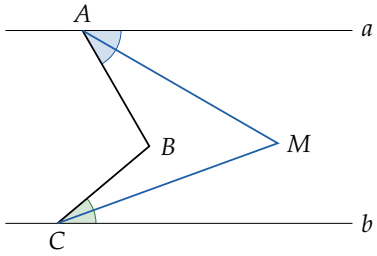


sąlyga *sprendimas*

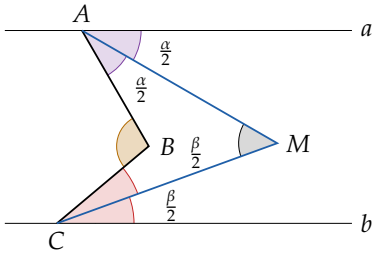
Pažymėkime priekampių puses: $\angle JAB = \gamma$, $\angle JBA = \delta$.

1. $\gamma = 90° - \frac{1}{2}\angle A$, $\delta = 90° - \frac{1}{2}\angle B$ (priekampių pusės).
2. $\angle AJB = 180° - \gamma - \delta = \frac{\angle A + \angle B}{2} = 90° - \frac{1}{2}\angle C$ (trikampių ABJ ir ABC kampų sumos).

26 uždavinys.



sąlyga



sprendimas

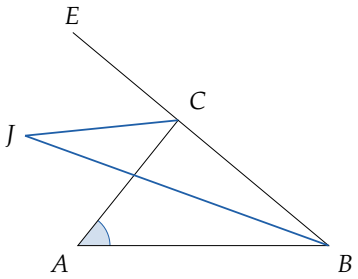
Ką matau. M – irgi laužtės AMC viršūnė tarp tų pačių tiesių.

Idėja. laužtę tarp lygiagrečių taikome du kartus. Pažymėkime laužtės kampus su tiesėmis: prie A – α, prie C – β.

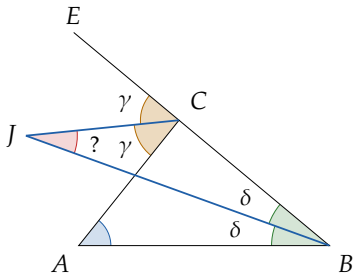
1. $\angle ABC = \alpha + \beta$ (laužtė tarp lygiagrečių).
2. $\angle AMC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ (laužtė tarp lygiagrečių: AMC).
3. Todėl $\angle AMC = \frac{1}{2}\angle ABC$.

Pamoka. išspręstas pavyzdys tapo įrankiu – jį taikome be naujų tiesių.

27 uždavinys.



sąlyga



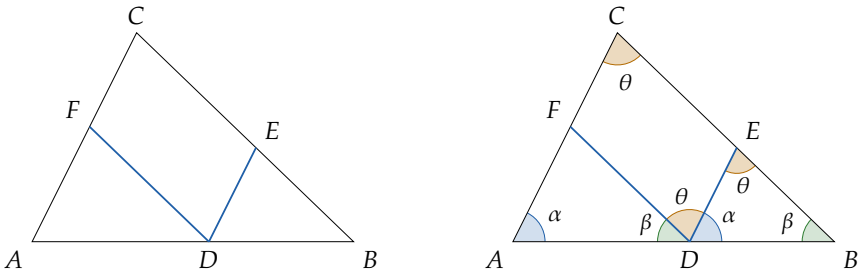
sprendimas

Pažymėkime $\angle JCE = \angle ACJ = \gamma$, $\angle ABJ = \angle JBC = \delta$.

1. $2\gamma = \angle ACE = \angle A + \angle B$ (priekampis), $\gamma = \frac{\angle A + \angle B}{2}$.
2. $\gamma = \delta + \angle BJC$ (trikampio BCJ priekampis), $\delta = \frac{1}{2}\angle B$.
3. $\angle BJC = \gamma - \delta = \frac{1}{2}\angle A$.

Pamoka. tas pats įrankis du kartus: didelio ir mažo trikampio priekampis.

28 uždavinys.



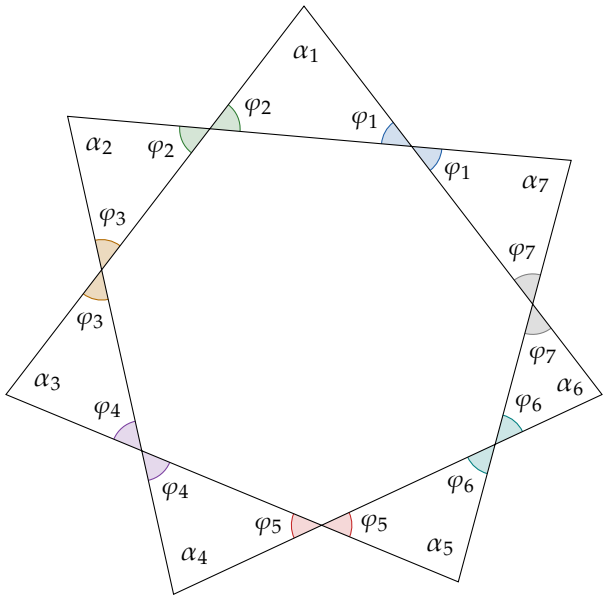
sąlyga *sprendimas*

Pažymėkime $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \theta$.

1. $\angle BDE = \alpha$ (atitinkamieji, $DE \parallel AC$, kirstinė AB).
2. $\angle ADF = \beta$ (atitinkamieji, $DF \parallel BC$, kirstinė AB).
3. $\angle FDE = \angle DEB$ (vidaus priešiniai, $DF \parallel BC$) $= \theta$ (atitinkamieji, $DE \parallel AC$).
4. Trys kampai prie D sudaro ištiestinį kampą: $\alpha + \beta + \theta = 180°$.

Pamoka. papildomos lygiagrečios tiesės gali eiti ir ne per viršūnę.

29 uždavinys.

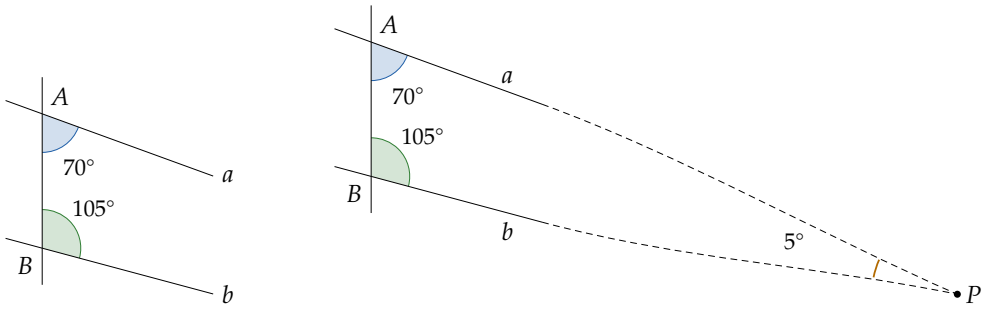


Ką matau. smaigaliai – trikampiai ant vidinio septynkampio kraštinių; jų kampai prie pagrindo – septynkampio priekampiai. Pažymėkime septynkampio priekampius $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$ (prie kiekvienos viršūnės du lygūs kryžminiai priekampiai – abu φ_i), smaigalių kampus – $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$.

1. $\alpha_1 = 180° - \varphi_1 - \varphi_2$, $\alpha_2 = 180° - \varphi_2 - \varphi_3$, $\ldots$, $\alpha_7 = 180° - \varphi_7 - \varphi_1$ (trikampio kampų suma).
2. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_7 = 7 \cdot 180° - 2(\varphi_1 + \cdots + \varphi_7) = 1260° - 2 \cdot 360° = 540°$ (priekampių suma).

Pamoka. kiekvienas priekampis įeina į du gretimus smaigalius, todėl atimame $2 \cdot 360°$. Bet kuriai žvaigždei, gautai sujungus kas antrą tašką, su n smaigalių: $n \cdot 180° - 720°$ (penkiakampei – 180°, kaip 3 pavyzdyje).

30 uždavinys.



sąlyga *sprendimas*

1. Kadangi $70° + 105° \neq 180°$, tai $a \nparallel b$ (prie lygiagrečių vidaus vienašalių suma 180°): tiesės kertasi taške P.
2. Kitoje pusėje trikampio ABP kampai būtų 110° ir 75° – suma $> 180°$, prieštara trikampio kampų sumai.
3. Todėl P – šioje pusėje, $\angle APB = 180° - 175° = 5°$ (brėžinys scheminis: tiesės susikerta labai toli).

Pamoka. „kas būtų, jei. . . “ (prieštara) atmeta negalimą atvejį.