Geometrija

Žodynas: sąvokos ir terminai

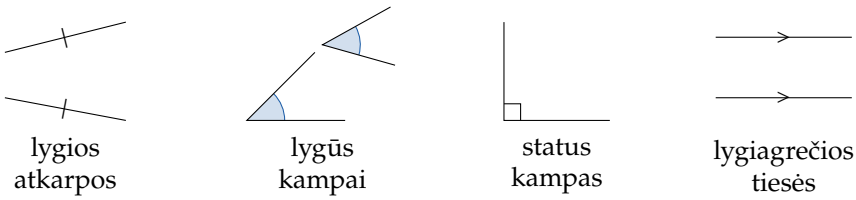
9 klasė

I dalis. Taškai, tiesės, kampai

Čia surinkti žodžiai, kuriuos vartosime per visą kursą. Teiginių ir įrodymų šiame lape nėra, tik pavadinimai ir paveikslėliai. Mokytis mintinai nereikia: kai pamiršite, ką reiškia žodis, grįžkite čia.

1. Kaip skaityti brėžinį

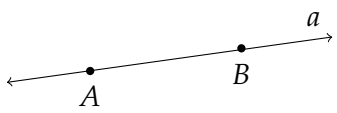
Brėžinyje nedaug rašome žodžiais. Vietoj jų dedame sutartines žymes:



Taškus žymime didžiosiomis raidėmis (A, B, C), tieses – mažosiomis (a, b), o kampus dažnai – graikiškomis raidėmis: α (alfa), β (beta), θ (teta), γ (gama), δ (delta). Pirmiausia vartojame α, β, θ, paskui γ, δ. Lygios atkarpos turi tiek pat brūkšnelių, lygūs kampai – tiek pat lankelių.

2. Tiesė, atkarpa, spindulys

Tiesė



Tiesi linija, kuri **be galo tęsiasi į abi puses**. Brėžinyje matome tik jos gabalą. Per du taškus eina tik viena tiesė.

Žymime: viena raide, a, arba dviem jos taškais, „tiesė AB“.

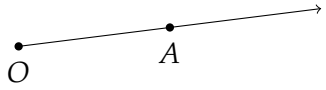
Atkarpa



Tiesės gabalas tarp dviejų taškų, kartu su tais taškais. Taškai A ir B yra atkarpos **galai**.

Žymime: AB. Tuo pačiu užrašu žymime ir atkarpos **ilgį**: „$AB = 5$“ reiškia, kad atkarpos AB ilgis lygus 5.

Spindulys (pustiesė)

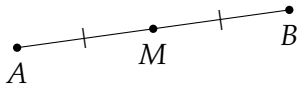


Tiesės dalis, kuri **prasideda taške** ir be galo tęsiasi **į vieną pusę**.

Žymime: OA: pirmoji raidė žymi pradžią, antroji – bet kurį kitą spindulio tašką.

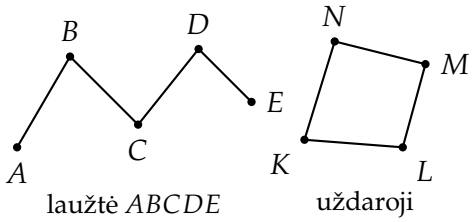
Dėmesio. žodis „spindulys“ turi ir antrą reikšmę: apskritimo spindulys yra *atkarpa*. Kuri reikšmė turima omenyje, visada aišku iš konteksto.

Atkarpos vidurio taškas



Atkarpos taškas, kuris ją dalija į **dvi lygias dalis**: $AM = MB$. Dar sakome, kad M dalija atkarpą AB **pusiau**.

Laužtė



Figūra iš atkarpų AB, BC, CD, ..., sujungtų **iš eilės**: kiekvienos atkarpos galas yra kitos pradžia. Atkarpos vadinamos **grandimis**, jų galai – **viršūnėmis**.

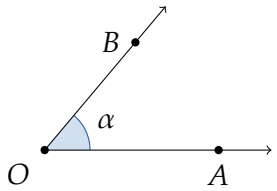
Žymime: viršūnių raidėmis iš eilės: $ABCDE$.

Laužtės ilgis yra visų jos grandžių ilgių suma.

Laužtė **uždaroji**, jei paskutinės grandies galas sutampa su pirmosios pradžia (čia $KLMN$).

3. Kampas

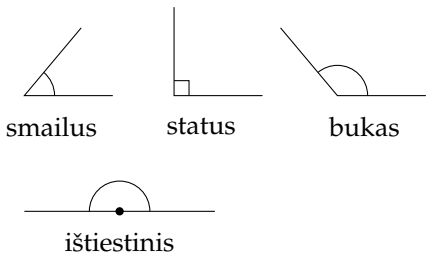
Kampas



Figūra iš **dviejų spindulių su bendra pradžia**. Bendra pradžia O yra kampo **viršūnė**, spinduliai OA ir OB yra kampo **kraštinės**.

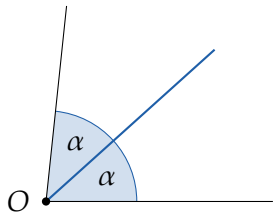
Žymime: $\angle AOB$ (viršūnės raidė **visada viduryje**) arba viena raide, α. Tas pats užrašas reiškia ir kampo didumą laipsniais: „$\alpha = 40°$“.

Kampų rūšys



smailus	mažesnis už 90°;
status	lygiai 90°;
bukas	tarp 90° ir 180°;
ištiestinis	lygiai 180°: kraštinės sudaro tiesę.

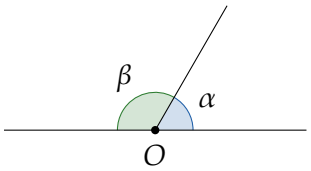
Kampo pusiaukampinė



Spindulys, kuris išeina iš kampo viršūnės ir dalija kampą į **du lygius kampus**. Lygius kampus brėžinyje galima žymėti ir ta pačia raide, čia α.

4. Kampų poros

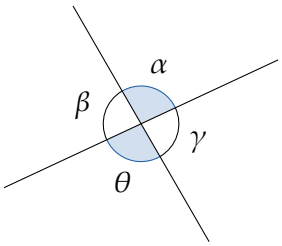
Gretutiniai kampai



Du kampai, kurių **viršūnė ir viena kraštinė bendros**, o kitos dvi kraštinės sudaro **tiesę**. Kartu jie sudaro ištiestinį kampą, todėl $\alpha + \beta = 180°$.

Kaip atpažinti. tiesė ir iš jos taško išeinantis spindulys.

Kryžminiai kampai

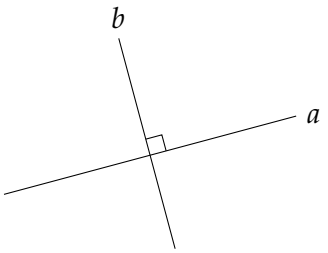


Dvi tiesės susikirsdamos sudaro keturis kampus. Du kampai, kurie yra **vienas prieš kitą**, vadinami kryžminiais: kiekvieno kraštinės yra kito kraštinių **tęsiniai**. Čia kryžminiai yra α ir θ, taip pat β ir γ.

Ar kryžminiai kampai lygūs? Tai bus mūsų **pirmasis įrodymas**.

5. Statmenumas

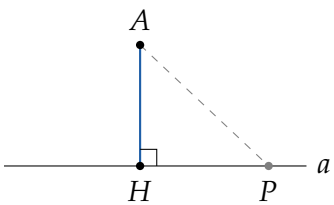
Statmenos tiesės



Dvi tiesės, kurios kertasi **stačiu kampu**. Tada visi keturi jų sudaryti kampai yra statūs.

Žymime: $a \perp b$.

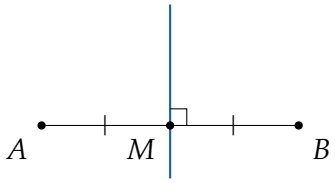
Statmuo ir atstumas iki tiesės



Statmuo iš taško A į tiesę a (taškas A nėra tiesėje a) yra atkarpa AH, kai $AH \perp a$ ir H yra tiesėje a. Taškas H vadinamas statmens **pagrindu**. **Atstumas nuo taško iki tiesės** yra statmens ilgis AH.

Dėmesio. AP (pilka) nėra statmuo ir jos ilgis nėra atstumas iki tiesės.

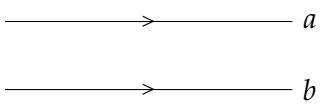
Atkarpos vidurio statmuo



Tiesė, kuri eina per atkarpos **vidurio tašką** ir yra **statmena** atkarpai. Abi sąlygos būtinos: ir per vidurį, ir statmena.

6. Lygiagrečios tiesės ir kirstinė

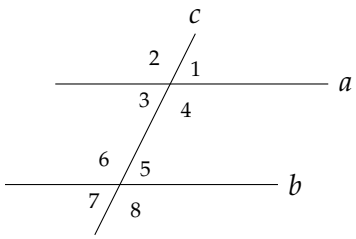
Lygiagrečios tiesės



Dvi vienos plokštumos tiesės, kurios **nesikerta**, kad ir kiek jas tęstume.

Žymime: $a \parallel b$. Brėžinyje dedame vienodas rodykles.

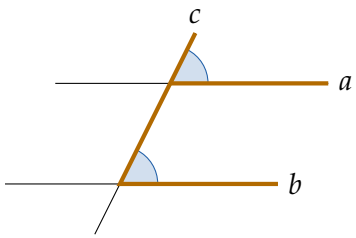
Kirstinė



Tiesė c, kuri kerta dvi kitas tieses a ir b **dviejuose skirtinguose taškuose**. Prie dviejų susikirtimo taškų susidaro **8 kampai**. Jų poros turi pavadinimus (žr. žemiau).

Dėmesio. šie pavadinimai tinka **bet kurioms** dviem tiesėms ir jų kirstinei, nebūtinai lygiagrečioms.

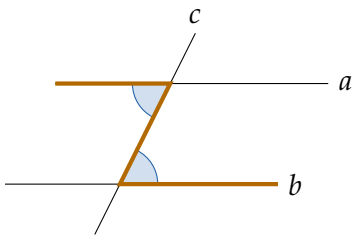
Atitinkamieji kampai (raidė F)



Kampai, kurie prie abiejų susikirtimo taškų **užima tą pačią vietą**: abu „viršuje dešinėje“, abu „apačioje kairėje“ ir t. t. Pavyzdžiui, 1 ir 5, 3 ir 7.

Kaip atpažinti. jų kraštinės sudaro raidę **F** (ji gali būti pasukta ar apversta).

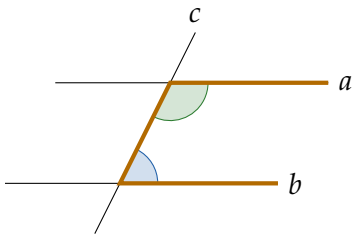
Vidaus priešiniai kampai (raidė Z)



Kampai **tarp tiesių** a ir b, bet **skirtingose kirstinės pusėse**: 3 ir 5, 4 ir 6.

Kaip atpažinti. jų kraštinės sudaro raidę **Z** (arba veidrodinę Z).

Vidaus vienašaliai kampai (raidė U)

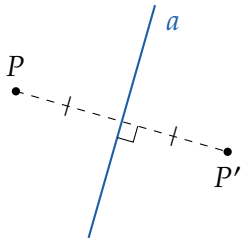


Kampai **tarp tiesių** a ir b, **toje pačioje kirstinės pusėje**: 4 ir 5, 3 ir 6.

Kaip atpažinti. jų kraštinės sudaro raidę **U** (arba C, pasuktą bet kaip).

7. Simetrija ir taškų aibės

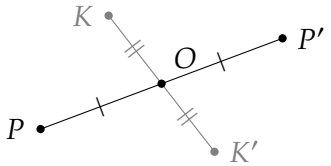
Atspindys tiesės atžvilgiu



Taškas P' yra **simetriškas** taškui P tiesės a atžvilgiu, jei tiesė a yra atkarpos PP' **vidurio statmuo**. Sakome, kad P' yra taško P **atspindys** tiesėje a, o a yra **simetrijos ašis**.

Taško, esančio tiesėje a, atspindys yra jis pats.

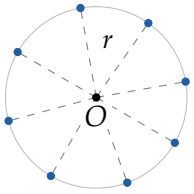
Centrinė simetrija



Taškas P' yra **simetriškas** taškui P taško O atžvilgiu, jei O yra atkarpos PP' **vidurio taškas**. Taškas O vadinamas **simetrijos centru**.

Taško O simetriškas taškas yra jis pats.

Taškų aibė



Taškų aibė yra **visi** taškai, turintys tam tikrą savybę, ir jokie kiti.

Pavyzdžiui, **apskritimas** (IV dalis) yra aibė visų taškų, nutolusių nuo taško O atstumu r.

Lapuose sužinosime, kurios kitos linijos yra taškų aibės (pavyzdžiui, kur yra visi taškai, vienodai nutolę nuo atkarpos galų).

Pasitikrinkite

Į klausimus a)–d) atsakykite remdamiesi brėžiniu „Kirstinė“ (kampai 1–8).

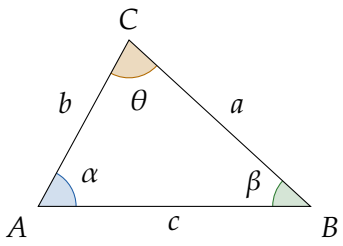
a) Kurie kampai yra gretutiniai su kampu 1? Kuris kampas yra kryžminis kampui 1?
b) Kuris kampas su kampu 2 yra atitinkamasis? Kuris su kampu 6 vidaus priešinis? Kuris su kampu 6 vidaus vienašalis?
c) Kampai 3 ir 5 yra vidaus priešiniai. Kuris kampas yra kryžminis kampui 5? Kokią porą jis sudaro su kampu 3?
d) Raskite visas atitinkamųjų kampų poras (yra keturios).
e) Laužtės $ABCD$ grandys lygios 2, 3 ir 4. Kiek ji turi viršūnių? Koks jos ilgis?
f) Taškas P' simetriškas taškui P tiesės a atžvilgiu. Kas yra tiesė a atkarpai PP'? O jei P' simetriškas P taško O atžvilgiu – kas yra O atkarpai PP'?

Atsakymai. a) Gretutiniai su 1 yra 2 ir 4; kryžminis yra 3. b) Atitinkamasis su 2 yra 6; vidaus priešinis su 6 yra 4; vidaus vienašalis su 6 yra 3. c) Kryžminis kampui 5 yra 7; kampai 3 ir 7 yra atitinkamieji. d) 1 ir 5, 2 ir 6, 3 ir 7, 4 ir 8. e) 4 viršūnes (A, B, C, D); ilgis $2 + 3 + 4 = 9$. f) Vidurio statmuo; vidurio taškas.

II dalis. Trikampiai

1. Trikampis ir jo dalys

Trikampis

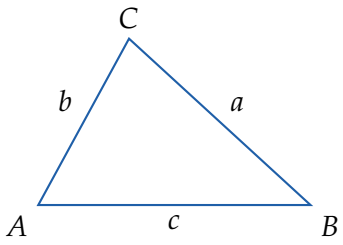


Trys taškai, kurie **nėra vienoje tiesėje**, ir juos jungiančios atkarpos. Taškai A, B, C yra **viršūnės**, atkarpos AB, BC, CA yra **kraštinės**.

Žymime: $\triangle ABC$. Įprasta kraštinę **prieš viršūnę** žymėti ta pačia mažąja raide: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Kampai: α prie A, β prie B, θ prie C.

Kraštinė a yra **prieš** kampą α; kampai β ir θ yra **prie** kraštinės a.

Perimetras ir pusperimetris

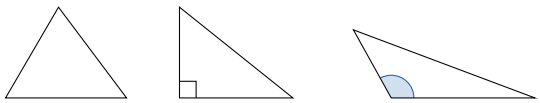


Perimetras yra visų kraštinių ilgių suma (visa mėlyna linija). Trikampio perimetras $P = a + b + c$. Taip pat apibrėžiamas ir bet kurio daugiakampio perimetras.

Pusperimetris yra pusė perimetro: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$.

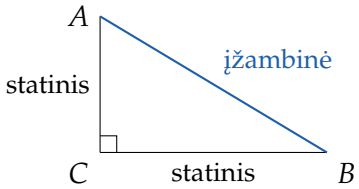
2. Trikampių rūšys

Pagal kampus



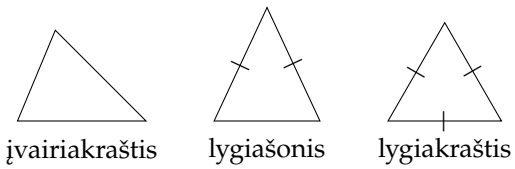
Smailusis: visi trys kampai smailūs.
Statusis: turi statų kampą.
Bukasis: turi buką kampą.

Statusis trikampis



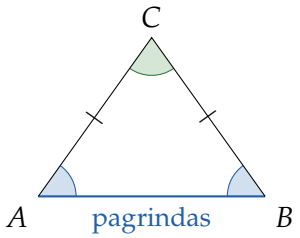
Dvi kraštinės **prie stačiojo kampo** vadinamos **statiniais**. Kraštinė **prieš statųjį kampą** vadinama **įžambine**.

Pagal kraštines



Įvairiakraštis: visos kraštinės skirtingos.
Lygiašonis: bent dvi kraštinės lygios.
Lygiakraštis: visos trys kraštinės lygios.
Dėmesio. lygiakraštis trikampis yra ir lygiašonis.

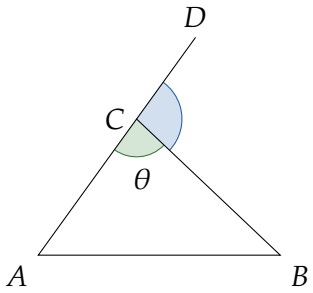
Lygiašonio trikampio dalys



Lygios kraštinės $AC = BC$ vadinamos **šoninėmis**, trečioji kraštinė AB yra **pagrindas**. Kampai A ir B yra **kampai prie pagrindo** (mėlyni), kampas C yra **kampas prie viršūnės**, arba kampas prieš pagrindą (žalias).

3. Priekampis

Priekampis



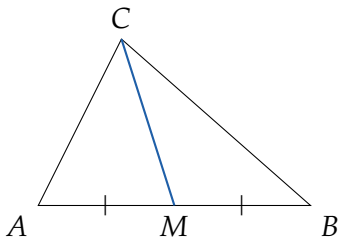
Pratęskime kraštinę AC už viršūnės C iki taško D. Kampas BCD (mėlynas) vadinamas trikampio **priekampiu prie viršūnės** C.

Priekampis ir trikampio kampas θ yra **gretutiniai**.

4. Svarbiosios trikampio atkarpos

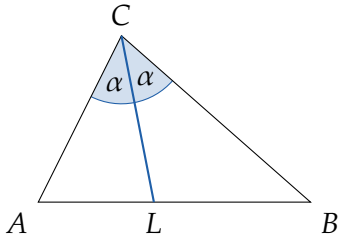
Pusiaukraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė išeina iš viršūnės. Kiekvienas trikampis turi tris pusiaukraštines, tris pusiaukampines ir tris aukštines. Brėžiniuose parodyta tik po vieną.

Pusiaukraštinė



Atkarpa, jungianti viršūnę su **priešingos kraštinės vidurio tašku**. Čia CM yra pusiaukraštinė, nes $AM = MB$.

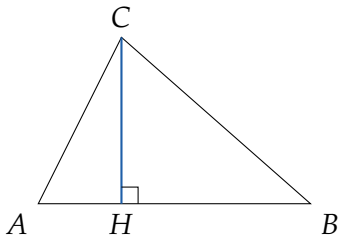
Pusiaukampinė



Atkarpa, kuri dalija trikampio kampą **pusiau** ir baigiasi priešingoje kraštinėje. Čia CL yra pusiaukampinė.

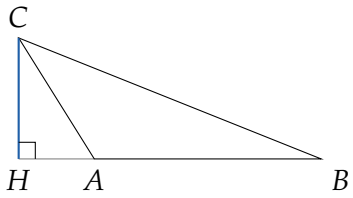
Dėmesio. *kampo* pusiaukampinė yra spindulys, o *trikampio* pusiaukampinė yra atkarpa.

Aukštinė



Statmuo, nuleistas iš viršūnės į tiesę, kurioje yra priešinga kraštinė. Čia CH yra aukštinė, H yra jos **pagrindas**. Aukštinės ilgį dažnai žymime h.

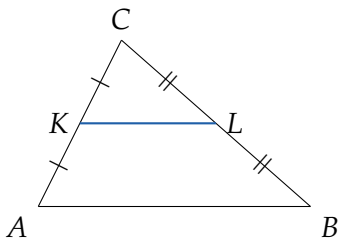
Aukštinė bukajame ir stačiajame trikampyje



Kai kampas A bukas, aukštinės iš C pagrindas H yra **už trikampio** – kraštinės BA **tęsinyje** (pilka). Todėl apibrėžime sakoma „į *tiesę*“, o ne „į kraštinę“.

Stačiajame trikampyje abu statiniai kartu yra ir aukštinės.

Vidurio linija



Atkarpa, jungianti **dviejų kraštinių vidurio taškus**. Čia KL yra vidurio linija. Trikampis turi tris vidurio linijas.

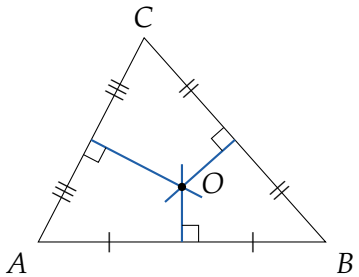
Dėmesio. nepainiokite su pusiaukraštine: pusiaukraštinė eina *iš viršūnės*.

5. Ypatingieji trikampio taškai

Trikampis turi po tris tos pačios rūšies linijas. Taškai, kuriuose jos susikerta, turi savo pavadinimus ir raides.

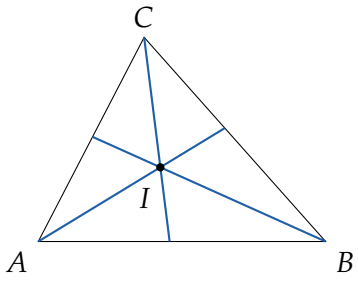
Dėmesio. kad visos **trys** linijos susikerta viename taške, nėra savaime aišku. Tai **įrodysime vėliau**.

Vidurio statmenų susikirtimo taškas O



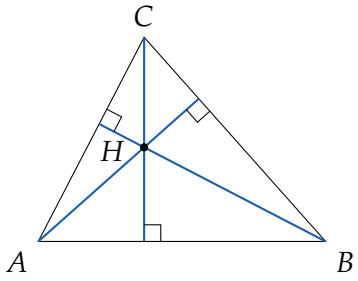
Taškas, kuriame susikerta trikampio kraštinių **vidurio statmenys** (mėlyni), žymimas raide O.

Pusiaukampinių susikirtimo taškas I



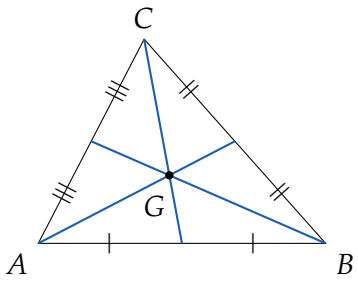
Taškas, kuriame susikerta trikampio **pusiaukampinės** (mėlynos), žymimas raide I.

Aukštinių susikirtimo taškas H



Taškas, kuriame susikerta trikampio **aukštinės** (mėlynos), žymimas raide H. Bukajame trikampyje H yra aukštinių **tiesių** susikirtimo taškas.

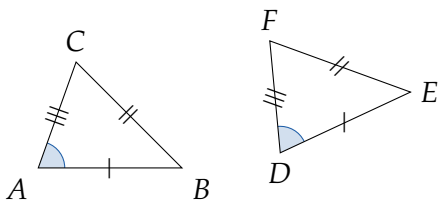
Pusiaukraštinių susikirtimo taškas G



Taškas, kuriame susikerta trikampio **pusiaukraštinės** (mėlynos), žymimas raide G. Jis dar vadinamas trikampio **sunkio centru**.

6. Lygūs trikampiai

Lygūs trikampiai



Du trikampiai **lygūs**, jei vieną galima uždėti ant kito taip, kad jie visiškai sutaptų. Tada lygios visos atitinkamosios kraštinės ir visi atitinkamieji kampai (tai ne tie atitinkamieji kampai, kurie susidaro prie kirstinės).

Žymime: $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Dėmesio. raidžių tvarka svarbi: $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$. Iš užrašo iš karto matyti, pavyzdžiui, kad $BC = EF$ ir $\angle A = \angle D$.

Pasitikrinkite

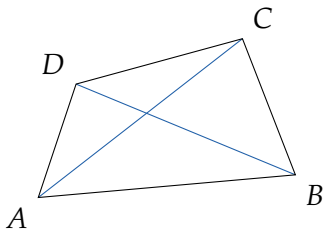
a) Trikampio ABC kampas C status. Kuri kraštinė yra įžambinė? Kurios yra statiniai?
b) Lygiašonio trikampio KLM šoninės kraštinės yra KL ir KM. Kuri kraštinė yra pagrindas? Kurie kampai yra prie pagrindo?
c) Trikampio ABC kampas A bukas. Iš kurių viršūnių nubrėžtų aukštinių pagrindai yra už trikampio?
d) $\triangle ABC = \triangle KLM$. Kuri kraštinė lygi kraštinei LM? Kuris kampas lygus kampui K?
e) Taškas M yra kraštinės AB vidurio taškas, N yra kraštinės BC vidurio taškas. Kas yra atkarpa MN? O atkarpa CM?
f) Trikampio kraštinės lygios 5, 6 ir 7. Raskite jo perimetrą ir pusperimetrį.
g) Kaip vadinamas ir kokia raide žymimas taškas, kuriame susikerta trikampio pusiaukampinės? O pusiaukraštinės?

Atsakymai. a) Įžambinė AB, statiniai AC ir BC. b) Pagrindas LM, kampai prie pagrindo L ir M. c) Iš B ir iš C. d) $LM = BC$, $\angle K = \angle A$. e) MN yra vidurio linija, CM yra pusiaukraštinė. f) $P = 5 + 6 + 7 = 18$, $p = 9$. g) Pusiaukampinių susikirtimo taškas I; pusiaukraštinių susikirtimo taškas G (sunkio centras).

III dalis. Keturkampiai

1. Keturkampis ir jo dalys

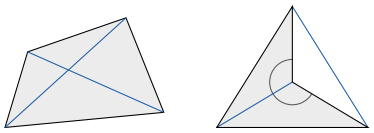
Keturkampis



Keturi taškai, iš kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje, sujungti **iš eilės** atkarpomis AB, BC, CD, DA taip, kad atkarpos nesikirstų (susitinka tik galais).

Žymime: $ABCD$: raidės rašomos **iš eilės aplink** figūrą. Kraštinės be bendros viršūnės (AB ir CD, BC ir DA) vadinamos **priešingomis**. Atkarpos, jungiančios priešingas viršūnes (AC ir BD, mėlynos), yra **įstrižainės**.

Iškilasis keturkampis



iškilasis neiškilasis

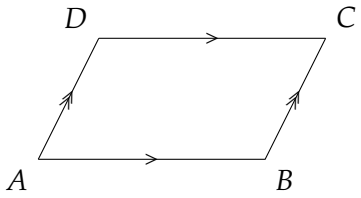
Keturkampis **iškilasis**, jei jo **įstrižainės susikerta** (mėlynos atkarpos turi bendrą tašką). Keturkampio vidus nuspalvintas pilkai.

Neiškilojo keturkampio įstrižainės nesusikerta: viena iš jų yra už keturkampio (už pilkos srities). Toks keturkampis tarsi „įlinkęs“ į vidų (įlinkimą rodo pilkas lankelis).

Mes nagrinėsime tik iškiluosius keturkampius.

2. Lygiagretainių šeima

Lygiagretainis



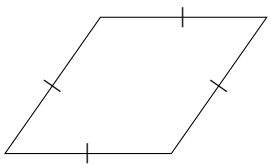
Keturkampis, kurio **priešingos kraštinės poromis lygiagrečios**: $AB \parallel CD$ ir $AD \parallel BC$.

Stačiakampis



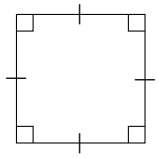
Keturkampis, kurio **visi kampai statūs**.

Rombas



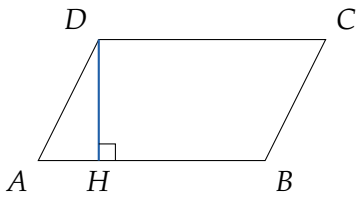
Keturkampis, kurio **visos kraštinės lygios**.

Kvadratas



Keturkampis, kurio **visos kraštinės lygios ir visi kampai statūs**. Taigi kvadratas yra ir stačiakampis, ir rombas.

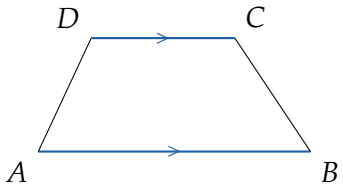
Lygiagretainio aukštinė



Statmuo iš vienos kraštinės taško į tiesę, kurioje yra priešinga kraštinė. Aukštinės ilgis yra **atstumas tarp tiesių** AB ir CD. Lygiagretainyje brėžiamos dviejų rūšių aukštinės: nubrėžtos į AB ir į AD. Jų ilgiai gali skirtis.

3. Trapecija

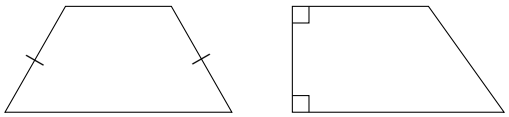
Trapecija



Keturkampis, kurio **dvi priešingos kraštinės lygiagrečios**, o kitos dvi **nelygiagrečios**. Lygiagrečios kraštinės (AB ir CD, mėlynos) yra **pagrindai**, kitos dvi yra **šoninės kraštinės**.

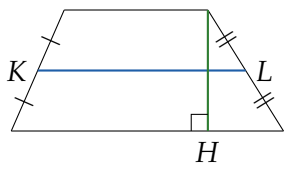
Dėmesio. pagal šį apibrėžimą lygiagretainis *nėra* trapecija.

Trapecijų rūšys



Lygiašonė: šoninės kraštinės lygios.
Stačioji: viena šoninė kraštinė statmena pagrindams.

Trapecijos vidurio linija ir aukštinė

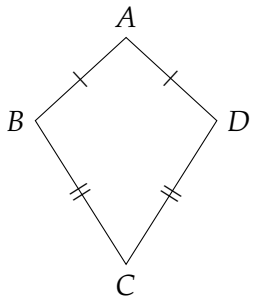


Vidurio linija jungia **šoninių kraštinių** vidurio taškus (čia KL, mėlyna).

Aukštinė yra statmuo iš vieno pagrindo taško į tiesę, kurioje yra kitas pagrindas (čia CH, žalia). Jos ilgis yra atstumas tarp pagrindų.

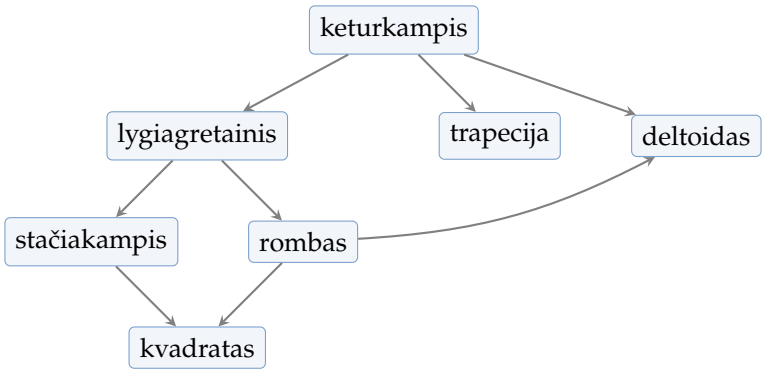
4. Deltoidas

Deltoidas



Keturkampis, kurio **dvi gretimos kraštinės lygios** ir **kitos dvi gretimos kraštinės taip pat lygios**: $AB = AD$ ir $CB = CD$. (Gretimos kraštinės turi bendrą viršūnę.)

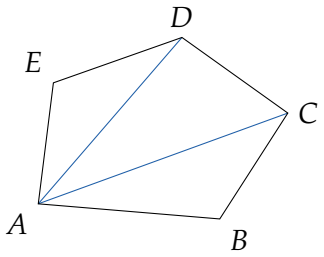
5. Šeimos medis



Rodyklė „$X \to Y$“ reiškia: *kiekvienas* Y yra ir X. Pavyzdžiui, kiekvienas kvadratas yra rombas. Kad stačiakampis ir rombas yra lygiagretainiai, iš apibrėžimų tiesiogiai nematyti. Tai **įrodysime vėliau**.

6. Daugiakampiai

Daugiakampis



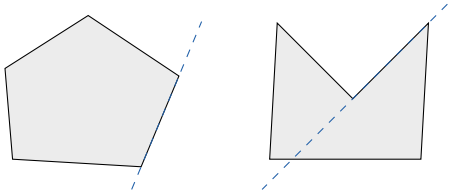
Uždaroji laužtė, kurios grandys nesikerta (gretimos susitinka tik galais), o gretimos grandys nėra vienoje tiesėje. Grandys vadinamos **kraštinėmis**, jų galai – **viršūnėmis**.

Daugiakampis su n viršūnių vadinamas n**-kampiu**: trikampis, keturkampis, penkiakampis, šešiakampis...

Žymime: viršūnių raidėmis iš eilės aplink: $ABCDE$.

Įstrižainė jungia dvi **negretimas** viršūnes (čia AC ir AD, mėlynos).

Iškilasis ir neiškilasis daugiakampis



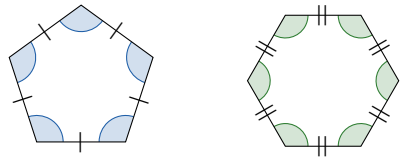
iškilasis neiškilasis

Daugiakampis **iškilasis**, jei jis visas yra **vienoje pusėje** kiekvienos tiesės, kurioje yra jo kraštinė.

Kitaip jis **neiškilasis**: kurios nors kraštinės tiesė (mėlyna punktyrinė) eina per jo vidų.

Mes nagrinėsime tik iškiluosius daugiakampius.

Taisyklingasis daugiakampis



penkiakampis šešiakampis

Iškilasis daugiakampis, kurio **visos kraštinės lygios** ir **visi kampai lygūs**.

Pavyzdžiui, kvadratas yra taisyklingasis keturkampis.

Dėmesio. rombas, kurio kampai nestatūs, nėra taisyklingasis: jo kraštinės lygios, bet kampai – ne.

Pasitikrinkite

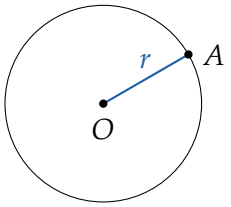
a) Kurios atkarpos yra keturkampio $ABCD$ įstrižainės? Kuri kraštinė priešinga kraštinei BC?
b) Ar kvadratas yra rombas? Ar rombas visada yra kvadratas?
c) Ar lygiagretainis yra trapecija?
d) Ar kvadratas yra deltoidas?
e) Keturkampis $KLMN$ yra rombas. Kurios atkarpos lygios kraštinei KL?
f) Kiek kraštinių ir kiek kampų turi šešiakampis? Kiek įstrižainių galima nubrėžti iš vienos jo viršūnės?
g) Ar stačiakampis, kuris nėra kvadratas, yra taisyklingasis keturkampis?

Atsakymai. a) AC ir BD; kraštinei BC priešinga kraštinė DA. b) Taip; ne (rombo kampai gali būti nestatūs). c) Ne: trapecijos dvi kraštinės turi būti nelygiagrečios. d) Taip: visos jo gretimos kraštinės lygios. e) LM, MN, NK. f) 6 kraštines ir 6 kampus; 3 įstrižaines (į visas viršūnes, išskyrus pačią ir dvi gretimas). g) Ne: jo kampai lygūs, bet kraštinės – ne.

IV dalis. Apskritimas

1. Apskritimas ir jo dalys

Apskritimas

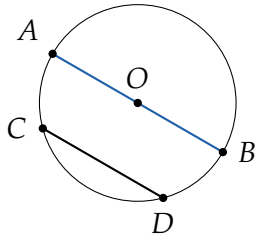


Visi taškai, nutolę nuo taško O **tuo pačiu atstumu** r. Taškas O yra **centras**. **Spindulys** yra atkarpa, jungianti centrą su apskritimo tašku (čia OA); spinduliu vadinamas ir jos ilgis r.

Skritulys yra apskritimas kartu su visa jo vidaus sritimi.

Apskritimą dažnai žymime graikiška raide ω (omega).

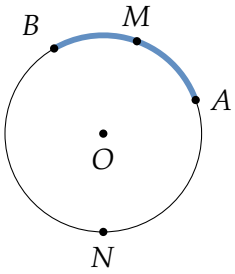
Styga ir skersmuo



Styga yra atkarpa, jungianti du apskritimo taškus (čia CD).

Skersmuo yra styga, einanti **per centrą** (čia AB, mėlyna). Skersmuo susideda iš dviejų spindulių, todėl jo ilgis yra $2r$.

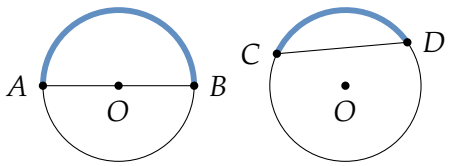
Lankas



Du apskritimo taškai A ir B padalija apskritimą į **du lankus**.

Žymime: $\overset{\frown}{AB}$, jei aišku, apie kurį lanką kalbame. Jei neaišku, pridedame tarpinį tašką: $A\overset{\frown}{M}B$ (mėlynas) arba $A\overset{\frown}{N}B$ (juodas).

Pusapskritimis, mažesnysis ir didesnysis lankas



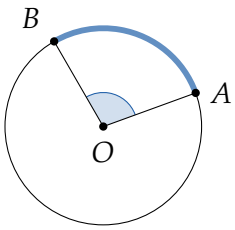
pusapskritimis mažesnysis lankas

Skersmens galai A ir B padalija apskritimą į du lankus; kiekvienas jų vadinamas **pusapskritimiu**.

Kai styga CD nėra skersmuo, vienas iš dviejų lankų CD yra mažesnis už pusapskritimį – tai **mažesnysis lankas** (mėlynas), o kitas didesnis – tai **didesnysis lankas**.

2. Kampai apskritime

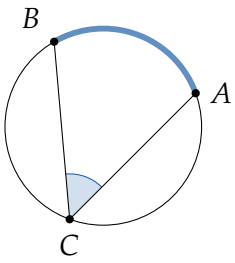
Centrinis kampas ir lanko didumas



Centrinis kampas yra kampas, kurio **viršūnė yra apskritimo centre** (čia $\angle AOB$).

Lanko didumas. Mažesniojo lanko didumas laipsniais lygus jo centrinio kampo didumui, o didesniojo lanko didumas yra 360° minus tiek. Čia $\angle AOB = 100°$, todėl mėlynojo lanko didumas 100°, o kito lanko – $360° - 100° = 260°$.

Įbrėžtinis kampas

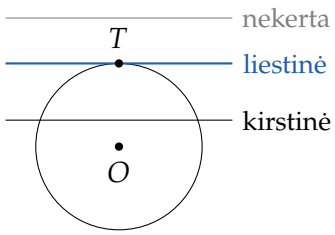


Kampas, kurio **viršūnė yra apskritime**, o abi kraštinės **kerta apskritimą** (čia $\angle ACB$; jo kraštinėse yra stygos CA ir CB).

Sakome, kad įbrėžtinis kampas **remiasi į lanką** AB: tą, kuris yra kampo viduje (mėlynas).

3. Tiesė ir apskritimas

Liestinė ir kirstinė

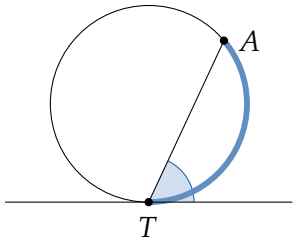


Tiesė ir apskritimas gali neturėti bendrų taškų, turėti vieną arba du bendrus taškus.

Liestinė turi su apskritimu **tik vieną** bendrą tašką. Tas taškas (T) vadinamas **lietimosi tašku**.

Kirstinė turi su apskritimu **du** bendrus taškus.

Kampas tarp liestinės ir stygos

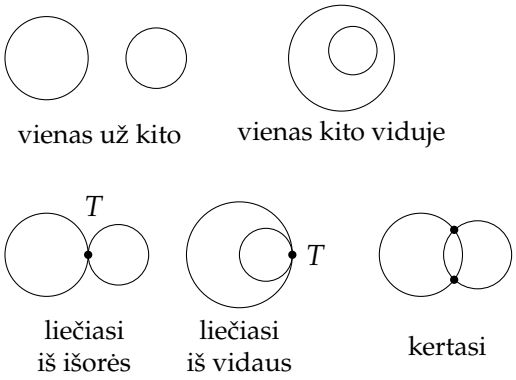


Kampas, kurio **viršūnė yra lietimosi taškas** T, viena kraštinė eina **liestine**, o kita – per **stygą** TA.

Sakome, kad šis kampas **remiasi į lanką** TA (mėlynas), esantį jo viduje.

4. Du apskritimai

Dviejų apskritimų padėtys



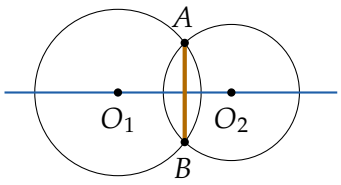
Du apskritimai gali:

neturėti bendrų taškų (vienas už kito arba vienas kito viduje);

liestis – turėti **vieną** bendrą tašką T, vadinamą **lietimosi tašku**. Jie liečiasi **iš išorės**, kai yra vienas už kito, ir **iš vidaus**, kai vienas yra kito viduje;

kirstis – turėti **du** bendrus taškus.

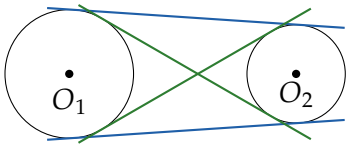
Centrų tiesė ir bendroji styga



Tiesė O_1O_2, einanti per abiejų apskritimų centrus, vadinama **centrų tiese** (mėlyna). Atkarpos O_1O_2 ilgis yra **atstumas tarp centrų**.

Kai apskritimai kertasi taškuose A ir B, atkarpa AB (oranžinė) yra abiejų apskritimų styga. Ji vadinama **bendrąja styga**.

Bendroji liestinė



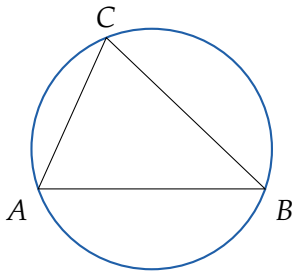
Tiesė, kuri **liečia abu** apskritimus, vadinama jų **bendrąja liestine**.

Išorinė bendroji liestinė (mėlyna): abu apskritimai yra **vienoje** jos pusėje.

Vidinė bendroji liestinė (žalia): apskritimai yra **skirtingose** jos pusėse.

5. Apskritimas ir daugiakampis

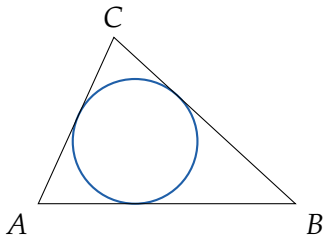
Apibrėžtinis apskritimas



Apskritimas, einantis **per visas trikampio viršūnes**.

Sakome: apskritimas **apibrėžtas apie** trikampį, o trikampis **įbrėžtas į** apskritimą.

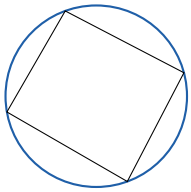
Įbrėžtinis apskritimas



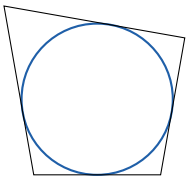
Apskritimas, kuris **liečia visas trikampio kraštines**: kiekviena kraštinė su juo turi tik vieną bendrą tašką, o jos tiesė yra liestinė.

Sakome: apskritimas **įbrėžtas į** trikampį, o trikampis **apibrėžtas apie** apskritimą.

Keturkampis ir apskritimas



įbrėžtas
į apskritimą



apibrėžtas
apie apskritimą

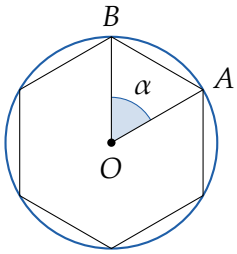
Įbrėžtinis keturkampis: visos keturios viršūnės yra apskritime.

Apibrėžtinis keturkampis: visos keturios kraštinės liečia apskritimą.

Dėmesio. ne kiekvieną keturkampį galima įbrėžti į apskritimą ir ne į kiekvieną keturkampį galima įbrėžti apskritimą. Kada galima, išsiaiškinsime vėliau.

Kaip nesupainioti. **Įbrėžta** yra ta figūra, kuri yra **viduje**. Įbrėžtinis apskritimas yra trikampio viduje ir liečia kraštines. Apibrėžtinis apskritimas apgaubia trikampį ir eina per viršūnes.

Taisyklingasis daugiakampis ir apskritimas



Kad apie kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą (jis eina per visas viršūnes), **įrodysime vėliau**. To apskritimo centras O vadinamas daugiakampio **centru**.

Centrinis kampas α yra kampas, kurio viršūnė yra centras O, o kraštinės eina per dvi **gretimas** viršūnes (čia $\angle AOB$). n-kampio centrinių kampų yra n, ir kartu jie sudaro $360°$. Kad jie visi lygūs, t. y. $\alpha = \dfrac{360°}{n}$, taip pat įrodysime vėliau.

Pasitikrinkite

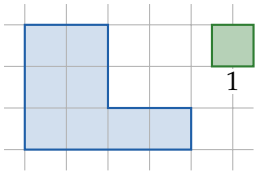
a) Ar skersmuo yra styga? Kiek kartų skersmuo ilgesnis už spindulį?
b) Taškai A ir B yra apskritime, kurio centras O, $\angle AOB = 70°$. Kokie abiejų lankų AB didumai?
c) Kiek bendrų taškų turi apskritimas ir jo liestinė?
d) Kuris apskritimas eina per trikampio viršūnes: įbrėžtinis ar apibrėžtinis?
e) Taškai A ir B yra apskritime, kurio centras O. Kodėl trikampis OAB yra lygiašonis?
f) Du apskritimai turi tik vieną bendrą tašką. Kaip jie gali būti išsidėstę?
g) Du apskritimai kertasi taškuose K ir L. Kaip vadinama atkarpa KL?

Atsakymai. a) Taip; 2 kartus. b) 70° ir 290°. c) Vieną. d) Apibrėžtinis. e) OA ir OB yra spinduliai, todėl $OA = OB$. f) Liečiasi iš išorės arba iš vidaus. g) Bendroji styga.

V dalis. Plotai, santykiai, panašumas

1. Plotas

Plotas

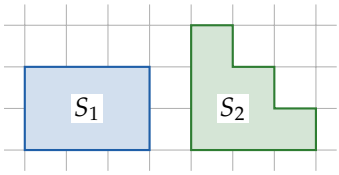


Plotas parodo, kiek vietos plokštumoje užima figūra. Plotą matuojame **kvadratiniais vienetais**: **vienetinis kvadratas** (žalias) yra kvadratas, kurio kraštinė lygi 1 (1 cm, 1 m. . .); jo plotas lygus 1 (1 cm^2, 1 m^2. . .).

Figūros plotas yra skaičius, rodantis, kiek vienetinių kvadratų joje telpa (skaičiuojamos ir kvadrato dalys; čia mėlynos figūros plotas 8).

Žymime: S; trikampio ABC plotas – S_{ABC}, keturkampio $ABCD$ – S_{ABCD}; kelių figūrų plotai – S_1, S_2, . . .

Lygiaplotės figūros



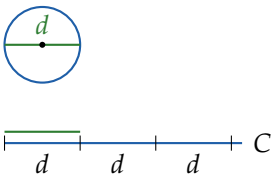
Figūros, kurių **plotai lygūs**, vadinamos **lygiaplotėmis**. Čia $S_1 = S_2 = 6$.

Dėmesio. lygiaplotės figūros **nebūtinai lygios**: pavyzdžiui, šių dviejų figūrų negalima uždėti vienos ant kitos taip, kad sutaptų.

Kaip apskaičiuoti įvairių figūrų plotus, išsiaiškinsime lapuose.

2. Apskritimo ilgis ir skritulio dalys

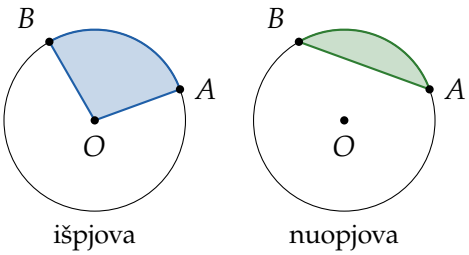
Apskritimo ilgis ir skaičius π



Apskritimo ilgis C yra apskritimo linijos ilgis: tarsi apskritimą „ištiesintume“ į atkarpą (mėlyna).

Apskritimo ilgio ir jo skersmens d santykis visiems apskritimams tas pats (pagrįsime vėliau); jis žymimas graikiška raide π (pi): $\pi = \dfrac{C}{d}$. Brėžinyje matyti, kad skersmuo telpa apskritimo ilgyje šiek tiek daugiau nei 3 kartus: $\pi \approx 3{,}14$.

Skritulio išpjova ir nuopjova

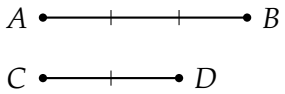


Skritulio išpjova yra skritulio dalis tarp **dviejų spindulių** ir **lanko** (mėlyna).

Skritulio nuopjova yra skritulio dalis tarp **stygos** ir **lanko** (žalia).

3. Atkarpų santykis

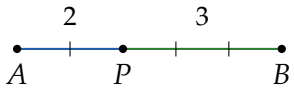
Atkarpų santykis



Dviejų atkarpų santykis yra jų ilgių dalmuo.

Žymime: $AB : CD$ arba $\frac{AB}{CD}$. Čia AB susideda iš 3, o CD – iš 2 vienodų dalių, todėl $AB : CD = 3 : 2$.

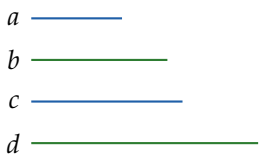
Taškas dalija atkarpą santykiu



Taškas P, esantis atkarpoje AB (tarp A ir B), dalija ją **santykiu** $m : n$, **skaičiuojant nuo taško** A, jei $AP : PB = m : n$. Čia $AP : PB = 2 : 3$.

Dėmesio. svarbu, nuo kurio galo skaičiuojame: nuo taško B tas pats taškas dalija atkarpą santykiu $3 : 2$.

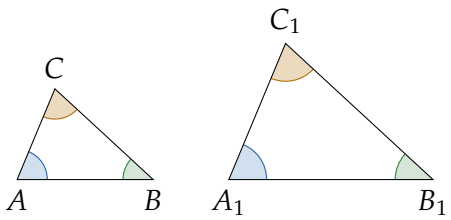
Proporcingos atkarpos



Atkarpos a ir b **proporcingos** atkarpoms c ir d, jei jų santykiai lygūs: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Čia $a = 1{,}2$, $b = 1{,}8$, $c = 2$, $d = 3$, todėl $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = 0{,}6$.

4. Panašumas

Panašūs trikampiai



Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ **panašūs**, jei jų atitinkamieji kampai lygūs ($\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$), o atitinkamosios kraštinės **proporcingos**:

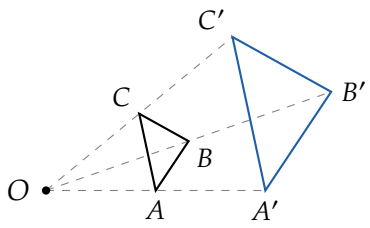
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k.$$

Žymime: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Dėmesio. **raidžių tvarka svarbi**, kaip ir lygiems trikampiams.

Skaičius k vadinamas **panašumo koeficientu**. Čia $k = 1{,}5$: antrojo trikampio kraštinės 1,5 karto ilgesnės už atitinkamąsias pirmojo.

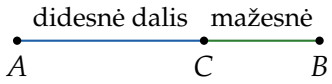
Homotetija



Homotetija su **centru** O ir **koeficientu** $k > 0$ kiekvieną tašką P perkelia į tašką P' spindulyje OP, kad $OP' = k \cdot OP$ (centras O lieka vietoje). Būna ir $k < 0$ – tada P' priešingame spindulyje; apie tai – vėliau.

Čia $k = 2$: $OA' = 2\,OA$, $OB' = 2\,OB$, $OC' = 2\,OC$. Mėlynas trikampis yra juodojo trikampio **vaizdas**.

Aukso pjūvis



Taškas C, esantis tarp A ir B ($AC > CB$), dalija atkarpą AB **aukso pjūviu**, jei visa atkarpa taip santykiauja su didesniąja dalimi, kaip didesnioji dalis su mažesniąja:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}.$$

Šis santykis žymimas graikiška raide φ (fi).

Pasitikrinkite

a) Ar dvi lygiaplotės figūros visada lygios? Ar dvi lygios figūros visada lygiaplotės?
b) Kuo skiriasi skritulio išpjova nuo skritulio nuopjovos?
c) Taškas P yra atkarpoje AB, $AP = 2$, $PB = 6$. Kokiu santykiu P dalija atkarpą AB, skaičiuojant nuo A? O nuo B?
d) $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. Kuri kraštinė atitinka kraštinę BC? Kuris kampas lygus kampui L?
e) $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 4$, $A_1B_1 = 6$. Koks panašumo koeficientas k?

Atsakymai. a) Ne (žr. brėžinį „Lygiaplotės figūros“); taip: sutampančios figūros užima tiek pat vietos. b) Išpjovą riboja du spinduliai ir lankas, nuopjovą – styga ir lankas. c) $2 : 6 = 1 : 3$ nuo A; $3 : 1$ nuo B. d) LM; $\angle B$. e) $k = \frac{6}{4} = 1{,}5$.